特征值问题有限元法分析

杨一都 著

贵州人民出版社

AN ANALYSIS OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR EIGENVALUE PROBLEMS

特征值问题有限元法分析

杨一都 著

贵州人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

特征值问题有限元法分析/杨一都著. -贵阳:贵州人民出版社,2004.8
ISBN 7-221-06683-3

Ⅰ.特... Ⅱ.杨... Ⅲ.特征值问题-有限元法
Ⅳ.0175.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 086482 号

责任编辑: 唐光明
封面设计: 张世申

特征值问题有限元法分析
杨一都 著

出版发行	贵州人民出版社
社　　址	贵阳市中华北路 289 号
邮　　编	550001
印　　刷	贵州兴隆印务有限责任公司
开　　本	890×1240 毫米　32 开
字　　数	210 千字
印　　张	7.625
版　　次	2004 年 8 月第 1 版
印　　次	2004 年 8 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN7-221-06683-3/G·2311
定　　价	26.00 元

引言

20 世纪 60 年代, 在中国、美国和西欧各自独立发明了有限元法. 这是当代计算数学进展的一个里程碑, 意义重大, 影响深远. 40 余年来这一方法已发展成为一个独立的学科分支, 并在水坝、桥梁、飞机、船舶的设计、油田开发和核武器研制等科学和工程计算的极其广泛的领域得到重要应用. 特征值问题有限元法是有限元法的重要组成部分, 是数学家、物理学家和工程师们关注的课题.

F.Chatelin 的著作 [25] 讨论了 Banach 空间中线性算子特征值的数值逼近, 把 20 世纪 80 年代以前特征值问题有限元分析方面的成果纳入泛函分析框架, 进行系统研究和总结. I.Babuska 等的著作 [7], 以泛函分析为工具, 进一步对 20 世纪 90 年代以前微分算子特征值问题协调有限元法和混合有限元法方面的成果作了统一处理.

本书试图对特征值问题有限元法分析 (协调有限元法, 非协调有限元法, 混合有限元法) 方面的理论成果作系统论述和总结, 包括著作 [7],[25] 中的基本结果和近 20 年来在特征值问题协调有限元法超收敛及后验误差估计和特征值问题非协调有限元法方面的研究进展. 全书分为 6 章.

第 1 章介绍与微分算子有限元逼近相关的矩阵特征值问题的理论知识和适用于大型稀疏矩阵的 Rayleigh 商迭代法和子空间迭代法.

第 2 章介绍谱逼近的泛函分析方法. 详细介绍了 "谱分解定理", "逼近 $\{T_h\}$ 的强稳定性确保了近似特征值保持代数重数收敛于准确特征值". 论述了 "适用于多种有限元方法 (协调有限元法, 非协调有限元法, 混合有限元法) 的抽象误差估计式". 全书以本章为基础, 第 4 章、第 5 章和第 6 章都是在本章理论的基础上展开的. 第一章的选材也强调了与本章的联系.

第 3 章主要介绍椭圆边值问题有限元数学理论基础知识. 此外, 还论述了用插值后处理获取有限元整体超收敛. 由于对特征值问题有限元法的陈述和分析, 一般都基于相应的定常问题的结果, 所以为了

完整起见，在本书的内容中引用了必要的椭圆边值问题的结果.

第 4 章讨论特征值问题协调有限元法，对先验误差估计常数的性态、超收敛性、后验误差估计和特征值下界作了系统论述. 介绍了计算凹角域问题的有限元局部加密方法、插值校正方法和外推方法.

第 5 章讨论特征值问题非协调有限元法，给出了基本关系式，论述了 Wilson 元特征函数的双二次插值具有整体超收敛性并给出了后验误差估计，证明了 Adini 元可求得特征值下界.

第 6 章介绍特征值问题混合有限元法，主要介绍 Babuska,Osborn 等的工作.

上世纪 50~60 年代冯康先生把变分原理与剖分逼近有机结合创造了有限元，有限元法在中国得到广泛深入的研究和发展：在非协调有限元方面，石钟慈院士“建立了新的收敛判别法，证明了许多极有应用价值的非协调元的收敛性”；在有限元超收敛理论和高精度算法方面，林群院士及陈传淼、朱起定、吕涛等“采用独创性的方法，作出了十分重要的贡献，并形成了自己的理论和方法体系”；等. 受冯康、林群、石钟慈、陈传淼、吕涛、朱起定、雷晋干、 P.G.Ciarlet 、 I.Babuska 和 F.Chatelin 等学术思想的影响，作者学习、研究有限元，并在“有限元方法的插值与校正”和“特征值问题有限元法分析”方面做了一点工作. 2000 年第五届全国有限元会议曾计划编写一本《有限元手册》，石钟慈院士任主编，其中第七章“特征值问题的有限元逼近”由本书作者编写. 师友的信任推动作者完成手册第七章，并在此基础上撰写本书.

近半个世纪以来，由于众多专家学者的工作，特征值问题有限元法分析已经发展到比较成熟的阶段，但是还有许多问题需要进一步深入研究，例如高维特征值问题，非自共轭特征值问题等. 作者希望本书的出版有助于读者了解这个研究领域的历史和现状，并促进其进一步的发展.

为撰写本书，作者直接或间接地引用了国内外较多文献的成果. 特别是专著 [7],[25],[28],[36],[92],[164] 和在这些专著中的许多重要的参考文

献. 作者感谢同行的研究和帮助.

作者在特征值问题有限元法分析方面的研究工作先后得到国家自然科学基金、贵州省科学技术基金和贵州省高层次人才科研条件特助经费的支持，该书由贵州省高层次人才科研条件特助经费资助出版，特此致谢.

作者感谢贵州人民出版社唐光明先生的热心支持和为本书出版所做的工作.

由于作者水平有限，未能穷尽史料，书中难免有不少疏漏之处，祈望读者指正.

作者

2004 年 8 月

目 录

第一章　矩阵特征值问题

矩阵特征值问题计算方法是计算数学基本论题之一,在科学研究,工程技术,经济管理等方面有广泛应用.在计算机上用有限元法求解微分算子特征值问题,最后也都归结为计算矩阵特征值问题.本章介绍与微分算子特征值问题有限元逼近相关的矩阵特征值问题的理论知识,和适用于大型稀疏矩阵的 Rayleigh 商迭代法和子空间迭代法.

本章主要参考文献[23],[25],[127],[137].

§1.1　预备知识

§1.1.1　C^n 空间

用 C^n 表示以复数为分量的 n 维列向量构成的复 n 维空间.

向量和矩阵的范数　C^n 中向量 x 的 Minkowski 范数和最大范数分别定义为

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= (\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty; & (1.1)\\ \|x\|_\infty &= \max_{1\le i\le n} |\xi_i|. & (1.2)\end{aligned}$$

设矩阵 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$, 它的从属于向量范数 $\|x\|_p$ 的矩阵范数定义为

$$\|A\|_p = \sup_{x\in C^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}, \quad 1\le p\le\infty. \tag{1.3}$$

从属于向量范数的矩阵范数还可以用矩阵元素表示:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^m |\, a_{ij} \,|,\\ \|A\|_\infty &= \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^n |\, a_{ij} \,|,\\ \|A\|_2 &= \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)},\end{aligned}$$

其中 A^* 是 A 的转置共轭矩阵.

$m \times n$ 矩阵 A 还有一个常用的矩阵范数是:

$$\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid^2)^{\frac{1}{2}}.$$

通常称为 Frobenius 范数, 也称为 Euclid 范数.

内积　对 $\forall x, y \in C^n$, 定义内积为

$$(x, y) = y^* x, \tag{1.4}$$

其中 y^* 表示 y 的转置共轭向量.

直交　称 x 与 y 直交, 若 $(x, y) = 0$.

C^n 的基　C^n 中 n 个线性无关向量构成 C^n 的基. 设 $\{x_i\}_1^n$ 是 C^n 的一组基, 则 $\forall x \in C^n$ 有

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i. \tag{1.5}$$

标准直交基　设 $\{x_i\}_1^n \subset C^n$, 且

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \cdots n, \tag{1.6}$$

其中 δ_{ij} 是 kroneker 符号, 它满足

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

则称 $\{x_i\}_1^n$ 为 C^n 中标准直交基. 这时, 由 (1.5),(1.6) 可推出: $\forall x \in C^n$ 有

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, x_i) x_i. \tag{1.7}$$

伴随基，双直交系 设 $\{x_i\}_1^n$ 是 C^n 的一组基，若 $\{y_j\}_1^n \subset C^n$，且

$$(x_i, y_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \cdots n. \tag{1.8}$$

则称 $\{y_i\}_1^n$ 是 $\{x_i\}_1^n$ 的伴随基，称 $\{x_i\}_1^n$ 和 $\{y_i\}_1^n$ 构成 C^n 的一个双直交系. 这时，由 (1.5) 和 (1.8) 推出： $\forall x \in C^n$ 有 $\alpha_j = (x, y_j)$, 因此

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, y_i) x_i. \tag{1.9}$$

伴随基的存在唯一性 因为 (1.8) 一定存在唯一解 y_j ，所以伴随基的存在唯一性是显然的.

§1.1.2 投影矩阵，矩阵的投影

定义 1.1(投影阵，直交投影阵) 设 S_1, S_2 是 C^n 的两个子空间，且有直和分解 $C^n = S_1 \oplus S_2$. 对 $\forall x \in C^n$ 作分解

$$x = x_1 + x_2,$$

其中 $x_i \in S_i$ $(i = 1, 2)$. 定义矩阵

$$P : C^n \to C^n \quad , Px = x_1 \quad \forall x \in C^n.$$

称 P 是 C^n 中沿 S_2 到 S_1 上的投影阵. 若 S_2 还是 S_1 的直交补空间，则称 P 是 C^n 中沿 S_2 到 S_1 上的直交投影阵.

定理 1.1 P 是沿核空间 $kerP$ 到象空间 ImP 上的投影阵的充要条件是： P 是幂等阵，即 $P^2 = P$. P 是沿核空间 $kerP$ 到象空间 ImP 上的直交投影阵的充要条件是： 1.P 是幂等阵； 2.P 是自共轭矩阵.

例 1.1 设

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad M = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

根据定义 1.1, 矩阵 P 是沿着空间 W 到空间 M 的投影阵.
设

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad W=span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\},\quad M=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

根据定义 1.1, 矩阵 P 是沿着空间 W 到空间 M 的直交投影阵.

欧几里得几何指出：平面外一点到平面的最短途径是过这点到平面的垂线. 于是有

定理 1.2　设 P 是沿 W 到 M 上的直交投影阵, 则

$$\|x-Px\|_2=\min_{y\in M}\|x-y\|_2. \tag{1.10}$$

证　由定义 1.1,W 和 M 是 C^n 的直交分解. 故对 $\forall x\in C^n$, 有

$$\begin{aligned} x &= x_W+x_M,\\ Px &= x_M. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} (x-Px,y) &= (x_W,y)=0, \quad \forall y\in M,\\ \|x-Px\|_2^2 &= (x-Px,x-Px)\\ &= (x-Px,x-y+y-Px)\\ &= (x-Px,x-y)\\ &\le \|x-Px\|_2\|x-y\|_2, \quad \forall y\in M. \end{aligned}$$

两端用 $\|x-Px\|_2$ 除得

$$\|x-Px\|_2\le\|x-y\|_2, \quad \forall y\in M.$$

由于 y 是 M 中任意元素，故有

$$\|x-Px\|_2\le\min_{y\in M}\|x-y\|_2,$$

因为 $Px \in M$, 所以等号可以达到, (1.10) 式得证. 证毕.

直交投影阵的构造 设 P 是沿 W 到 M 上的直交投影阵. 若 $n \times k$ 矩阵 G 的 k 个列向量构成 M 的基, 则 M 中向量可表为 Gu, 其中 u 是 k 维向量. 对 $\forall x \in C^n$, 令 $Px = Gu$, 因为 Gu 是 x 在 M 上的直交投影, 所以

$$G^*(x - Gu) = 0.$$

由 G^*G 是 $k \times k$ 非奇异阵推出

$$u = (G^*G)^{-1}G^*x.$$

于是 x 在 M 上的直交投影是

$$Px = Gu = G(G^*G)^{-1}G^*x.$$

因此沿 W 到 M 上的直交投影阵 P 可表示为

$$P = G(G^*G)^{-1}G^*. \tag{1.11}$$

若进一步假设 G 的 k 个列向量是相互直交且规范的, 则

$$P = GG^*. \tag{1.12}$$

矩阵的直交投影

设 G 的 k 个列向量构成 M 的一个标准直交基, 则 $u = G^*x$ 是 x 在 M 上的直交投影 $Gu = GG^*x$ 的座标向量. 对 $\forall$ 矩阵 A 作 AGu 在 M 上的直交投影, 得

$$GG^*AGu.$$

它的座标向量是 G^*AGu. 由此导出矩阵直交投影的概念.

定义 1.2(矩阵的直交投影) 设 $n \times k$ 矩阵 G 的 k 个列向量是相互直交且规范的, 则称

$$B = G^*AG$$

是矩阵 A 关于 G 的直交投影，也称为 A 关于 G 的截部 (或 A 在 G 上的限制).

当 $k=1$, 即 $G=\frac{x}{\|x\|_2}$ 时， A 的直交投影就是著名的 Rayleigh 商：

$$R(x)=\frac{x^*Ax}{x^*x}.$$

当 G 取为单位阵的 k 个列，则 A 的直交投影就是 A 的相应的 k 阶主子矩阵.

定义 1.3 $n\times n$ 矩阵 A 的 k 阶投影 $B=G^*AG$ 的特征值 $\mu_1,\cdots,\mu_k$ 和由 $B=G^*AG$ 的任一特征向量 z 形成的向量 Gz, 分别称为 A 的 M- 近似特征值和 M- 近似特征向量.

令 $E=AG-GB$. 显然，当 M 是 A 的不变子空间时， $E=0$.

定理 1.3 设 A 是 Hermite 矩阵，则对 A 的任一 M- 近似特征值 μ_i, 存在 A 的一个特征值 λ_i, 使得

$$|\lambda_i-\mu_i|\le\|E\|_F,$$

进一步设 $\|E\|_F$ 足够小，则对 A 的任一规范 M- 近似特征向量 y_i, 存在 A 的一个规范特征向量 y', 使得

$$\|y_i-y'\|_2\le\frac{\|E\|_F}{d}(1+O(\frac{\|E\|_F}{d})),$$

其中 $d=\min\{|\lambda_i-\lambda_j|:\lambda_i\neq\lambda_j\}$.

证 见文 [23].

§1.1.3 特征值，特征向量

设 A 是 $n\times n$ 阶方阵. 考虑矩阵特征值问题：

求 $\lambda\in C$(复数域),$0\neq\varphi\in C^n$, 使得

$$A\varphi=\lambda\varphi. \tag{1.13}$$

称满足 (1.13) 的 λ 为 A 的特征值， φ 为 A 的相应于 λ 的 (右) 特征向量.

设 λ 是 A 的特征值，$0 \neq \psi \in C^n$，使得

$$\psi^* A = \lambda \psi^*, \tag{1.14}$$

则称 ψ 是 A 的相应于 λ 的左特征向量.

由于 (1.14) 等价于 $A^*\psi = \lambda^*\psi$，所以 $\sigma(A^*) = \{\lambda^* : \lambda \in \sigma(A)\}$，且 A 的相应于 λ 的左特征向量就是 A^* 的相应于 λ^* 的右特征向量 (λ^* 是 λ 的共轭复数).

谱集，谱半径　称 A 的全体特征值的集合为谱集，记为 $\sigma(A)$. 称 $r_\sigma(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ 为 A 的谱半径.

代数重数　容易验证 (1.13) 的特征值 λ 是特征多项式 $\rho(\lambda) = det(\lambda I - A)$ 的根，如果 λ 是 $\rho(\lambda)$ 的 q 重根，则称 q 是 λ 的代数重数.

特征向量空间, 几何重数　设 λ 是 A 的特征值, 称 $ker(A-\lambda I) = \{x \in C^n, (A-\lambda I)x = 0\}$ 为 A 的相应于 λ 的特征向量空间，称其维数 g 是 λ 的几何重数. 可证 $g \leq q$.

设 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 是 A 的特征值，代数重数为 q_i，几何重数为 g_i.

广义特征向量空间　称 $M_i = ker(A-\lambda_i)^{q_i}$ 为 A 的相应于 λ_i 的广义特征向量空间.

陡度，半简单特征值　易知，存在 $1 \leq l_i \leq q_i$ 使

$\{0\} \subset ker(A-\lambda_i I) \subset ker(A-\lambda_i I)^2 \subset \cdots \subset ker(A-\lambda_i I)^{l_i} = \cdots = ker(A-\lambda_i I)^{q_i}$.

包含是真包含，直到达到 M_i. 设 l_i 是使 $ker(A-\lambda_i I)^{l_i} = M_i$ 的最小数. 则称 l_i 为 λ_i 的陡度. 如果 $l_i = 1$, 则称 λ_i 是半简单的.

当 λ_i 是半简单特征值时，A 的相应于 λ_i 的广义特征向量空间就是特征向量空间.

不变子空间　设 M 是 C^n 的子空间，A 是 n 阶方阵，若 $AM \subset M$，则称 M 是 A 的不变子空间. 注意，特征向量空间 $ker(A-\lambda)$ 是 A 的不变子空间，每个特征方向都是不变的. A 的广义特征向量空间