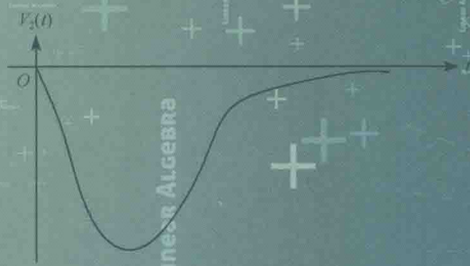
高等教育“十二五”规划教材



线性代数与概率统计

下册

周晨星　韩七星　主编

科学出版社

高等教育“十二五”规划教材

线性代数与概率统计

（下册）

周晨星　韩七星　主编

陈　岩　魏丽莉　付　静　副主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

《线性代数与概率统计》包括上、下两册，上册为线性代数部分，下册为数理统计部分. 其中，上册包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、矩阵的特征值、二次型、线性空间与线性变换等内容；下册包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、统计量及其分布、参数估计、假设检验等内容. 每章后配有习题，每分册后均附有相关实验内容及部分习题参考答案.

本书内容丰富，难易适中，可作为高等学校本科或专科非数学类专业的线性代数及概率统计课程教材，也可作为科技工作者和自学者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与概率统计：全2册/周晨星，韩七星主编. —北京：科学出版社，2013.1
(高等教育“十二五”规划教材)
ISBN 978-7-03-036512-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①周… ②韩… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 ②概率论-高等学校-教材 ③数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2 ②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 012678 号

责任编辑：张振华　刘文军 / 责任校对：耿　耘
责任印制：吕春珉 / 封面设计：科地亚盟

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2013 年 7 月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2013 年 7 月第一次印刷　印张：13
字数：466 000

定价：48.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈铭浩〉)
销售部电话 010-62140850　编辑部电话 010-62135763-1019

前　　言

我国高校的绝大部分工科、理科及管理类专业都开设“线性代数”和“概率论与数理统计”，它们是重要的基础课程. 这不仅仅是因为它们在各个领域中的应用非常广泛，从人才素质的全面培养的角度来说，它们也是不可或缺的. 根据高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革的总目标的要求，参照教育部有关考试大纲，结合编者多年的讲授经验，我们编写了《线性代数与概率统计》(上、下册).

这套书内容涵盖了教育部对非数学专业的“线性代数和概率论及数理统计”考试大纲的基本要求，还新增加了大学数学实验指导. 在大学数学实验部分，介绍了数学实用软件 MATLAB 和利用 MATLAB 计算行列式、特征值等内容，以提高学生对数学的应用意识，并培养学生用所学的数学知识和计算机技术去认识问题和解决实际问题的能力.

《线性代数与概率统计》包括上、下两册，上册为线性代数部分，下册为概率统计部分，合定价 48 元. 其中，上册 22 元，下册 26 元.

上册共 7 章，其中第 1～3 章由付静编写，第 4～6 章由陈岩编写，第 7 章由付静和陈岩共同编写. 下册共 9 章，其中第 1～3 章由魏丽莉编写，第 4～5 章由周晨星编写，第 6～9 章由韩七星编写. 全套书由周晨星、韩七星负责统稿.

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

2012 年 6 月 7 日

于长春

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

概率论与数理统计是从数量化的角度来研究现实世界中的一类不确定现象及其规律性的一门应用数学学科.在科学研究和社会生活中,概率论与数理统计的应用更为广泛,如应用于工业、国防、国民经济、工程技术等各个领域.本章介绍的随机事件及其概率是概率论中最基本、最重要的概念之一.

科学研究的目的就是要发现反映事物本质的客观规律,即排除偶然性的掩盖与干扰,为此必须首先认识偶然性,于是统计学应运而生.统计学不是直接研究事物本质的必然规律,而是通过随机现象来发现事物的统计规律,并把它应用于对客观规律的认识和把握.

1.1　随机事件

1.1.1　随机现象

从数学的角度来研究社会和自然现象时,可以把这些现象分为以下三类.

1. 确定现象

确定现象是指事前可预言的现象,即在准确地重复某些条件下,它的结果总是肯定的.例如,在一个标准大气压下将水加热到 100℃便会沸腾.又如,质量守恒定律、牛顿定理反映的也是这类现象.研究这类现象的数学工具有数学分析、几何、代数、微分几何等.

2. 随机现象

随机现象是指事前不可预言的现象,即在相同条件下重复进行试验,每次结果未必相同,或知道过去的状况,但未来的发展却不能完全肯定.

例 1.1　随机现象的例子.

(1) 在相同的条件下抛掷同一枚硬币,我们无法预知将出现正面还是反面.

(2) 走到某个十字路口时,可能正好是红灯,也可能正好是绿灯.

(3) 将来某日某种股票的价格是多少.

随机现象到处可见,人们早已认识到随机性在生活中的作用,但直到 20 世纪初,人们才认识到随机现象也可以通过数量化方法来进行研究.概率论就是一种用

数量化方法来研究随机现象及其规律性的一门数学学科.

随机现象有以下两个特点.

(1) 结果不止一个.

(2) 哪一个结果出现,人们事先并不知道.

3. 模糊现象

模糊现象是指事物本身的含义不确定的现象,如"情绪稳定"与"情绪不稳定","健康"与"不健康","年轻"与"年老"等. 研究这类现象的数学工具是模糊数学.

1.1.2 随机试验

随机现象到处可见,由于随机现象的结果事先是不能预知的,初看似乎毫无规律. 然而,人们发现同一随机现象大量重复出现时,其实每种可能的结果出现的频率具有稳定性,所以随机现象也有其固有的规律性.

在相同条件下可以重复的随机现象又称**随机试验**. 通常记为 E. 也有很多随机现象是不能重复的,例如,某场足球赛的输赢是不能重复的,某些经济现象也是不能重复的. 概率论与数理统计主要研究能大量重复的随机现象,但也会十分注意不能重复的随机现象.

历史上,曾经有许多学者做过大量的试验,例如,投掷一枚硬币的试验,观察"正面朝上"这一事件(记为 A)在 n 次试验中出现的次数,前者投掷 $n=4040$ 次,A 出现 2048 次;后者投掷 $n=24000$ 次,A 出现 12012 次. 因此 A 出现的频率$=\dfrac{A\text{出现的次数}}{\text{试验总次数}}$,他们的结果分别为 0.5069 和 0.5005. 他们还发现,随着试验次数的增大,事件 A 的频率总是围绕 0.5 上下波动,而且越来越接近 0.5. 这说明随机现象在少数试验或观察中其结果没有什么规律性,但通过长期的观察和大量的重复试验可以看出,试验的结果是有规律可循的,这种规律是随机试验的结果自身所具有的特征.

随机试验有以下特征.

(1) 可重复性:试验可以在相同条件下重复进行.

(2) 可观察性:每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果.

(3) 不确定性:每次试验出现的结果不能准确预知,但可以肯定会出现上述所有可能结果中的一个.

例 1.2 随机试验的例子.

(1) 投掷一颗骰子,观察其出现的点数.

(2) 从一批产品中一次任选三件,记录出现正品与次品的件数.

(3) 观察某地区 10 月份的天气情况.

(4) 某种型号电视机的寿命.

(5) 测量某物理量(如长度、直径等)的误差.

以上几例都具有上述三个特征,都是一些随机试验.

1.1.3 样本空间

随机现象的一切可能结果组成的集合称为样本空间,记为 $\Omega=\{\omega\}$,其中,ω 表示基本结果,也称样本点.

例 1.3 样本空间的例子.

(1) 在抛掷一枚硬币观察其出现正面或反面的试验中有两个样本点,即正面、反面. 样本空间为 $\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}$,其中,$\omega_1$ 表示正面,ω_2 表示反面.

(2) 观察一天内进入某商场的顾客数,其样本点有可数无穷多个:0,1,2,3,… 样本空间为 $\Omega_2=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

(3) 向一个直径为 50cm 的靶子射击,观察弹着点的位置,其样本点也有无穷多且不可数:$\omega(x,y)$,$(x^2+y^2\leqslant 25^2)$. 样本空间为 $\Omega_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 25^2\}$.

(4) 从含有两件次品 a_1,a_2 和三件正品 b_1,b_2,b_3 的产品中任取两件,观察出现次品的情况. 其样本点为 $\omega_i(i=0,1,2,\cdots,10)$;样本空间为 $\Omega_4=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3),(b_1,b_2),(b_1,b_3),(b_2,b_3)\}$.

注:(1) 对于同一个随机试验,试验的样本点与样本空间是根据要观察的内容来确定的.

(2) 样本空间中的元素可以是数,也可以不是数.

(3) 样本空间至少含有两个样本点,即仅含两个样本点的样本空间是最简单的样本空间.

(4) 样本空间含样本点的个数可以是有限的,也可以是无限的.

1.1.4 随机事件

在随机试验中,可能出现也可能不出现,而在大量重复试验中具有某种规律性的事件叫做**随机事件**,简称**事件**. 随机事件通常用大写英文字母 A、B、C 等表示.

例 1.4 在抛掷一枚均匀硬币的试验中,“正面向上”是一个随机事件,可用 $A=\{$正面向上$\}$表示.

随机试验中的每一个可能出现的试验结果称为这个试验的一个样本点,记作 ω_i,全体样本点组成的集合称为这个试验的样本空间,记为 Ω. 即

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}.$$

含一个样本点的随机事件称为基本事件,含有多个样本点的随机事件称为复合事件.

在随机试验中,随机事件一般是由若干个基本事件组成的. 样本空间 Ω 的任

一子集 A 称为随机事件. 属于事件 A 的样本点出现,则称事件 A **发生**.

随机事件可能有不同的表达方式:一种是直接用语言描述,同一事件可能有不同的描述;也可以用样本空间子集的形式表示,此时,理解它所表达的实际含义,有利于对事件的理解.

必然事件:记作 Ω,因为样本空间 Ω 也是其自身的一个子集,Ω 也是一个"随机"事件,每次试验中必定有 Ω 中的一个样本点出现,所以必然发生.

不可能事件:记作$\varnothing$,因为空集$\varnothing$也是样本空间的一个子集,$\varnothing$也是一个特殊的"随机"事件,不包含任何样本点,所以不可能发生.

注:必然事件与不可能事件都是确定事件,为讨论方便,今后将它们看作是两个特殊的随机事件.

1.1.5 事件的集合表示

样本空间是所有样本点的集合,而每个样本点又称基本事件,事件是由具有该事件所要求的特征的那些可能结果所构成的,而那些可能结果又是样本空间中的元素,所以,任何一个事件都可以用 Ω 样本空间的某个子集来表示,特别是$\varnothing$,Ω 都为Ω 的子集.

例 1.5 在抽签试验中,$\omega_i=\{$抽得标号为 i 的竹签,$i=0,1,2,\cdots,9\}$,则样本空间 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_9\}$,由 ω_8,ω_9 所构成的集合 $A=\{\omega_8,\omega_9\}$是 Ω 的子集,它是由基本事件 ω_8,ω_9 合成的**复合事件**,或者说事件为"标号大于 7".

例 1.6 在投掷一颗骰子的随机试验中,样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

事件 A:"点数为 4"可表示为 $A=\{4\}$.

事件 B:"点数小于 4"可表示为 $B=\{1,2,3\}$.

事件 C:"点数小于 4 的奇数"可表示为 $C=\{1,3\}$.

1.1.6 事件的关系与运算

我们知道样本空间的子集不止一个,显然一个样本空间可以定义的事件不止一个,那么这些事件间有什么样的关系呢? 一些较复杂的事件如何用一些较简单的事件的关系式表示呢? 事件之间的关系和运算又如何呢? 所有这些问题的解决,将对计算事件的概率起到重要的作用.

因为事件为样本空间的子集,故事件之间的关系与运算可按集合之间的关系与运算来处理,我们先来讨论两个事件 A 与 B 之间的关系.

(1) **包含**:对事件 A 与 B,若事件 A 中的每一个样本点都属于事件 B,则称事件 B **包含**事件 A,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 此时当且仅当事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

例 1.7 投掷一颗骰子的随机试验中,观察其出现的点数.

记事件 $A=\{$点数为小于 5 的偶数$\}$;事件 $B=\{$点数为偶数$\}$. 讨论事件 A 与 B 的关系:

因为 $A=\{2,4\}$,$B=\{2,4,6\}$,且 $2\in B$,$4\in B$,所以 $A\subset B$.

(2) **相等**:对事件 A 与 B,若事件 A 中的每一个样本点都属于事件 B,且事件 B 中的每一个样本点都属于事件 A,则称事件 A 与事件 B **相等**,记为 $A=B$. 此时当且仅当事件 A 发生必然导致事件 B 发生且事件 B 发生必然导致事件 A 发生,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$.

例 1.8　投掷一颗骰子的随机试验中,观察其出现的点数.

记事件 $A=\{$点数为小于 5 的偶数$\}$;事件 $B=\{$点数为偶数$\}$;事件 $C=\{$出现 2 或 4 或 6$\}$. 讨论事件 A、B、C 之间的关系:

$A\subset B$. 因为 $B\subset C$ 且 $C\subset B$,所以 $B=C$.

(3) **并**(**或和**):对事件 A 与 B,由事件 A 与 B 中所有的样本点(相同的只计入一次)组成的新事件称为事件 A 与事件 B 的**并**(**或和**),记为事件 $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$或记为事件 $A+B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$. 此时当且仅当事件 A 与 B 中至少有一个发生时,新事件 $A\cup B$ 就发生.

例 1.9　投掷一颗骰子的试验中,观察其出现的点数.

记事件 $A=\{$点数为奇数$\}$,事件 $B=\{$点数为偶数$\}$. 因为 $A=\{1,3,5\}$,$B=\{2,4,6\}$,所以 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$.

(4) **交**(**或积**):对事件 A 与 B,由同属于事件 A 与事件 B 中的样本点所构成的新事件,称为事件 A 与事件 B 的**交**(**或积**),记为 $A\cap B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$;又可记为 $A\cdot B$ 或 AB. 此时当且仅当事件 A 与事件 B 同时发生时,事件 $A\cap B$ 才发生.

例 1.10　投掷一颗骰子的试验中,观察其出现的点数.

记事件 $A=\{$点数为偶数$\}$,事件 $B=\{$点数为小于 5 的偶数$\}$. 因为 $A=\{2,4,6\}$,$B=\{2,4\}$,所以 $A\cap B=\{2,4\}$.

注:并与交是事件的两种最基本的运算,我们要弄清这两个新概念.

例 1.11　某种圆柱形零件有两个尺寸,直径与长度,产品质量标准要求直径合格同时长度也合格的产品才算是合格品.

记事件 $A=\{$直径合格$\}$,事件 $B=\{$长度合格$\}$,事件 $C=\{$产品合格$\}$;事件 $\overline{A}=\{$直径不合格$\}$,事件 $\overline{B}=\{$长度不合格$\}$,事件 $\overline{C}=\{$产品不合格$\}$. 则 $C=A\cap B$; $\overline{C}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1.12　投掷一颗骰子的试验中,观察其出现的点数.

记事件 $A=\{$点数为奇数$\}$,$B=\{$点数为偶数$\}$,则 $A\cap B=\varnothing$,$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega$.

(5) 当 $A\cap B=\varnothing$时,即事件 A 发生而事件 B 不发生,或者事件 B 发生而事件

A 不发生，此时事件 A 与事件 B 称为**互不相容事件**；反之，若事件 A 与事件 B 互不相容，则 $A\cap B=\varnothing$，即互不相容事件，其含义为事件 A 与事件 B 不能同时发生，又称为**互斥事件**.

(6) 当 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$ 时，事件 A 与事件 B 互为**对立事件**，记为 $A=\overline{B}$. 或称事件 A 与事件 B 互为**补事件**. 其含义为：在每次随机试验中，事件 A,B 中有且只有一个事件发生. 即事件 A 的对立事件为 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=\Omega-A$.

(7) 事件 A 对事件 B 的差：对事件 A 与 B，若事件 A 发生而事件 B 不发生，则称事件 A 对事件 B 的差，记为 $A-B=\{\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$. 此时当且仅当事件 A 发生，且事件 B 不发生时，事件 $A-B$ 才发生.

例 1.13　投掷一颗骰子的试验中，观察其出现的点数.

记事件 $A=\{$点数为偶数$\}$，事件 $B=\{$点数小于 6$\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\},A\cap B=\{2,4\},A-B=\{6\}.$$

(8) 完备事件组：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是有限或可数个事件，若其满足：

① $A_i\cap A_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$；

② $\bigcup\limits_i A_i=\Omega,i=1,2,\cdots$.

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是一个**完备事件组**，也称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是样本空间 Ω 的一个划分.

显然，A 与 $\overline{A}$ 对立事件构成一个划分.

事件的关系与运算可用维恩图形象表示，如图 1.1 所示.

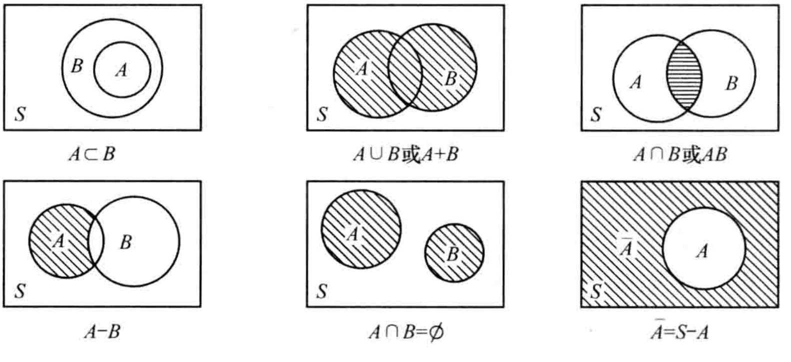


图 1.1

1.1.7　事件的运算性质

设 A,B,C 为同一随机试验 E 中的事件，则有：

(1) **结合律**：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

(2) **交换律**：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(3) **分配律**：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) **对偶律(德莫根公式)**：

事件并的对立事件等于事件对立的交：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,

事件交的对立事件等于事件对立的并：$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

(5) **反身律**：$\overline{\overline{A}}=A$.

例 1.14　有两门火炮同时向一架飞机射击，考察事件 $A=\{$击落飞机$\}$，依常识，“击落飞机”等价于“击中驾驶员”或者“同时击中两个发动机”，因此 A 为一个较为复杂的事件.

若记 $B_i=\{$击中第 i 个发动机$\}$，$i=1,2$，$C=\{$击中驾驶员$\}$. 则

$$
\begin{aligned}
A &=(B_1\cap B_2)\cup C=(B_1\cup C)\cap(B_2\cup C),\\
\overline{A} &=\{\text{未击落飞机}\}=(\overline{B_1}\cup\overline{B_2})\cap\overline{C}\\
&=(\overline{B_1}\cap\overline{C})\cup(\overline{B_2}\cap\overline{C})\\
&=\{\text{发动机 1,2 至少有一个未被击中且未击中驾驶员}\}.
\end{aligned}
$$

1.2　随机事件的概率

在日常生活中，我们知道彩民购买彩票后可能中奖，也可能不中奖，其中中奖可能性的大小可以用中奖率来衡量. 对于新生儿可能是男婴也可能是女婴，其中生男婴的可能性可以用男婴出生率来度量，所以对于一个随机事件 A 的发生是带有偶然性的，但随机事件 A 发生的可能性是有大小之分的，也就是说随机事件发生的可能性是可以设法度量的，它是事件本身的客观属性，不依人们的主观意志而转移，也不论是否做试验，它都是存在的. 例如，求正方形的面积，因为正方形的面积是客观存在的，它的大小与选择的测量方法无关.

1.2.1　频率及其性质

定义 1.1　在相同的条件下进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数，比值$\frac{n_A}{n}$称为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$.

易见，频率具有下述基本性质.

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

(2) $f_n(\Omega)=1$.

(3) 频率可加性：若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件，则 $f_n(A_1\cup$

$A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$.

频数是事件 A 在 n 次试验中发生的次数，而频率的大小反映了事件 A 在 n 次试验中出现的频繁程度，即在一次试验中事件 A 发生的可能性的大小. 反之，我们可以考虑用频率来表示事件 A 在一次随机试验中发生的可能性的大小.

例 1.15 考察英语中特定字母出现的频率，当观察字母的个数 n(试验的次数)较小时，频率有较大幅度的随机波动，但当 n 增大时，频率呈现出稳定性. 如表 1.1 所示，就是英文字母出现频率的统计情况.

表 1.1

字　母	出现频率	字　母	出现频率	字　母	出现频率
E	0.1268	L	0.0394	P	0.0186
T	0.0978	D	0.0389	B	0.0156
A	0.0788	U	0.0280	V	0.0102
O	0.0776	C	0.0268	K	0.0060
I	0.0707	F	0.0256	X	0.0016
N	0.0706	M	0.0244	J	0.0010
S	0.0634	W	0.0214	Q	0.0009
R	0.0594	Y	0.0202	Z	0.0006
H	0.0573	G	0.0187		

例 1.16 考察我国某地 1963 年关于新生儿男婴女婴出生的频率，如表 1.2 所示.

表 1.2

月　数	总　数	男婴数	女婴数	女婴频率
第一个月	4418	2297	2121	0.4801
头两个月	10109	5251	4858	0.4806
头三个月	15183	7864	7319	0.4821
头四个月	19584	10112	9472	0.4837
头五个月	23745	12266	11479	0.4834
头六个月	28421	14667	13754	0.4839
头七个月	31269	16163	15106	0.4831
头八个月	35185	18160	16998	0.4831
头九个月	39537	20490	19047	0.4818
头十个月	44605	23078	21527	0.4826
头十一个月	49480	25615	23865	0.4823
十二个月	54434	28181	26253	0.4823

大量的试验表明，随着试验重复次数 n 的增加，频率 $f_n(A)$ 总是稳定在一个常数 p 的附近，偏差会随着试验次数的增大而越来越小，我们称常数 p 为频率的稳定值，即我们所要求的概率. 频率的稳定性刻画了随机事件 A 发生的可能性大小. 但利用频率方法确定概率的缺点是，在现实世界里，人们无法把一个试验无限次地重复下去，所以要精确获得频率的稳定值是很困难的，但我们可以利用频率的稳定值去估计概率，即频率是概率的经验表现，概率是频率的数学抽象.

定义 1.2　在相同条件下所做的 n 次试验中，当 $n\to+\infty$ 时，事件 A 发生的频率稳定在某个常数 p 附近，称此常数为事件 A 发生的概率，记作 $P(A)=p$.

此定义是建立在试验及其统计数据的基础上的，称之为随机事件的概率的统计定义. 而概率值是随着试验次数的增加，估计的精确度就越高. 但这里从传统的数学惯有的严格型角度看，又有许多的不足之处，即定义中对频率与概率的关系的描述是定性的和非数学化的.

例 1.17　从某箱中取出 100 个小球，用红色笔标上记号再放入该箱中，现在从中任意取出 40 个小球，发现其中有两个有记号，问箱中大约有多少个小球？

解　设该箱内有 n 个小球，而从箱中取出一个标有记号的小球的概率为$\dfrac{100}{n}$，它近似于取到有标号的小球的频率为$\dfrac{2}{40}$，即$\dfrac{100}{n}\approx\dfrac{2}{40}$，解得 $n\approx2000$. 所以箱内大约有 2000 个小球.

1.2.2　概率的公理化定义及其性质

定义 1.3　设随机试验 E 的样本空间为 Ω，对于 Ω 中每一个事件 A 都赋予一个实数 $P(A)$，它具有以下三条基本性质：

(1) 非负性：对每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant0$.

(2) 完备性：$P(\Omega)=1$.

(3) 可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，即($A_i\cap A_j=\varnothing$，当 $i\neq j$)，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

因为概率为频率的数学抽象，从频率的性质自然合理地阐述了概率的三条公理. 而且我们看到频率的性质(3)是有限可加性，但对于概率的性质(3)却是更强的可列可加性，是频率性质(3)的拓展，使概率的定义对无限样本空间的事件也适用. 利用概率的三条基本性质可以推导出概率的其他性质.

性质 1.1　不可能事件的概率为 0，即 $P(\varnothing)=0$.