南秀全初等数学系列

整数的性质

南秀全 编著

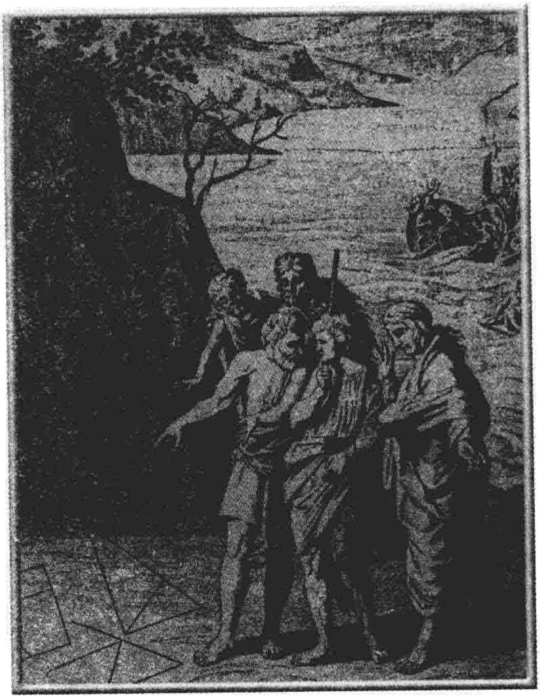
- 十进制整数及其多项式表示
- 带余除法与余数分类
- 整值多项式
- 整数整除问题的
- 竞赛题选讲

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

南秀全初等数学系列

整数的性质

南秀全 编著



◎十进制整数及其多项式表示
◎带余除法与余数分类
◎整值多项式
◎整数整除问题的证明方法
◎竞赛题选讲

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书根据初中数学竞赛大纲中关于整数论的要求,对大纲所列的每一个内容的方法和技巧都作了较为全面的论述.书中选取的大量例题和习题,基本上选自国内外各类数学竞赛试题,全部习题都给出了解答或提示.本书对于学生自学或教师、家长辅导学生极为方便,也为各地初中数学竞赛命题提供了有用的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

整数的性质/南秀全编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2012.11

ISBN 978-7-5603-3747-0

Ⅰ.①整… Ⅱ.①南… Ⅲ.①整数-初中-教学参考资料 Ⅳ.①G634.613

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 176403 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 李长波
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 19.25 字数 198 千字
版　　次 2012 年 11 月第 1 版 2012 年 11 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3747-0
定　　价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前　言

数…，-4，-3，-2，-1，0，1，2，3，4，…统称为整数.整数虽然看起来很简单，但它却有着极其深刻的性质.在数学中有一门叫“整数论”或“数论”的分支专门研究它.数论是一古老的数字分支，在公元前3世纪古希腊数学家欧几里得著的《几何原本》中的第八、九、十章，就是专门记载历史上有关数论的成就的.例如，用辗转相除法求最大公约数的步骤，至今仍称为欧几里得算法.我国的《九章算术》、《孙子算经》中也有不少关于数论的论述.

数论是古希腊人首创的，它始终是活跃着的，不断出现新的问题，获得

新成果的一门数学. 17 世纪法国数学家费马对数论作出了巨大的贡献,他的工作决定了这门学科的早期研究方向. 德国数学家高斯说过:“数学是科学的皇后,数论是数学的皇后.”这说明大数学家早就认识到数论在数学中享有的独特地位.

由于数论的命题含义往往浅显易懂,比较具体,能提供朴素的背景,而其解决问题所用的方法颇具技巧,因而它是培养和训练青少年掌握逻辑推理与灵活多变的思维的一个有效途径. 在各级数学奥林匹克的试题中,几乎都离不开初等数论的题目,而且在深度和广度上都在不断地提高.

在这本小册子里,我们力求在初中数学范围内,介绍有关整数的基本知识和解题思路. 书中所选的例题、习题大都是最新的国内外数学竞赛中的试题,对部分例题还作了进一步的研讨(如背景、拓展等). 希望读者通过阅读例题,解答每节后的习题,达到系统掌握数论的基本知识和解题思路、技巧的效果.

由于编者水平有限,加上时间仓促,书中疏漏和不足之处在所难免,敬请读者批评指正.

编 者
2012 年 6 月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目录

整除的定义与基本性质

一

初中学生在小学里，就已经初步接触到了整数的一些性质，但在中学里，不再专门学习和研究整数问题，加上一些与整除有关的问题的解法需要较高的技巧，许多学生在参加数学竞赛时，对有关整数性质的问题往往感到很困难，甚至无从下手. 因此，本书就向读者介绍与整数性质有关的内容和解法技巧.

本书中，如无特殊说明，字母都表示整数.

整数包括正整数(自然数)、负整数和零. 我们知道，两个整数 a 和 b 的和、差与积仍然是整数，但 a 与 b 的商就不一定是整数，所以我们有必要引进整除的概念.

定义　对于整数 a 与 $b(b \neq 0)$，若存在整数 q，使等式 $a = bq$ 成立，那么称 b 整除 a 或 a 能被 b 整除，这时称 a 是 b 的倍数，b 是 a 的约数，并记作 $b \mid a$. 若不存在这样的整数 q，则称 b 不能整除 a，记作 $b \nmid a$.

关于整数的整除性有下面一些性质:

性质 1 如果 $a \mid b, b \mid c$,那么 $a \mid c$.

性质 2 如果 $a \mid b$,那么对任意整数 k,有 $a \mid kb$.

性质 3 如果 $a \mid b, a \mid c$,那么对任意整数 k, l 有 $a \mid (kb \pm lc)$.

证明 因为 $a \mid b, a \mid c$,所以 $b = aq_1, c = aq_2$(q_1, q_2 为整数).

所以 $kb \pm lc = kaq_1 \pm laq_2 = (kq_1 \pm lq_2)a$.

而 $kq_1 \pm lq_2$ 是整数,因此,$a \mid (kb \pm lc)$.

性质 1,2 的证明方法与此证法相仿,请读者自己完成.

性质 4 如果 $m \mid ab, (m, a) = 1$,那么 $m \mid b$.

证明 因为 $m \mid ab$,而 $a \mid ab$,所以 ab 是 m 和 a 的公倍数.又因为最大公约数 $(m, a) = 1$,所以最小公倍数 $[m, a] = ma$,由于两个数的最小公倍数是这两个数的公倍数的约数,因而有 $ma \mid ab$,即 $m \mid b$.

性质 5 如果 $a \mid c, b \mid c$,且 $(a, b) = 1$,那么 $ab \mid c$.

证明 由 $a \mid c, b \mid c$ 可知 c 是 a, b 的公倍数,因为 $(a, b) = 1$,所以 $[a, b] = ab$.

由于两个数的公倍数能被这两个数的最小公倍数整除,所以 $ab \mid c$.

性质 6 如果 $a \mid m, b \mid m$,那么 $[a, b] \mid m$.

性质 7 如果 p 是质数,且 $p \mid ab$,则 $p \mid a$ 或 $p \mid b$.

性质 8 n 个连续自然数之积必能被 $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ 整除.

这个结论的证明要用到较多知识,故从略.

下面仅就一个特殊情况予以证明.

三个连续的自然数之积能被 6 整除.

证明　设三个连续的自然数为$n,n+1,n+2$(n为自然数). 因为两个连续的自然数中必有一个是偶数,所以三个连续的自然数中至少有一个是偶数. 所以$2\mid n(n+1)(n+2)$.

又因为三个连续的自然数中一定有一个是3的倍数,所以$3\mid n(n+1)(n+2)$.

因为$(2,3)=1$,所以$6\mid n(n+1)(n+2)$.

说明:以后我们可以直接应用性质8的结论来论证一些问题.

在解决与整除有关的问题时,还常用到下列公式:

基本性质　对任意一正整数n以及整数a,b,总有

$$a-b\mid a^n-b^n\quad(a\neq b)$$

成立.

例如,因为

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

所以

$$a-b\mid a^3-b^3$$

一般地,由乘法可得

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$$

所以

$$a-b\mid a^n-b^n\quad(a\neq b,n\text{为正整数})$$

推论1　当n为正奇数时,有

$$a+b\mid a^n+b^n$$

这是因为$a-(-b)\mid a^n-(-b)^n$,而n为奇数,所以

$$(-b)^n=-b^n$$

即

$$a+b\mid a^n+b^n$$

推论 2 当 n 为正偶数时,有 $a+b \mid a^n - b^n$.

推论 3 对任给的整数 a,b 及正整数 n,必有某整数 k,使得 $(a+b)^n = a^n + kb$.

因为 $(a+b) - a \mid (a+b)^n - a^n$,所以有整数 k 使

$$(a+b)^n - a^n = k[(a+b) - a] = kb$$

所以

$$(a+b)^n = a^n + kb$$

例 1 已知 a,b,c,d 为整数,且 $ab+cd$ 能被 $a-c$ 整除,证明 $ad+bc$ 也能被 $a-c$ 整除.

证明 因为 $ad+bc = ad+bc+ab-ab+cd-cd=(ab+cd)+(a-c)(d-b)$,又因为

$$a-c \mid ab+cd, \quad a-c \mid (a-c)(d-b)$$

由性质 3,得

$$a-c \mid [(ab+cd)+(a-c)(d-b)]$$

即

$$a-c \mid ad+bc$$

例 2 (1) x,y 均为整数,若 $5 \mid x+9y$,求证:

$$5 \mid 8x+7y$$

(2) x,y,z 均为整数,若 $11 \mid 7x+2y-5z$,求证:

$$11 \mid 3x-7y+12z$$

(1987 年北京市初二数学竞赛题)

(1) **分析** 已知 $5 \mid x+9y$,要证 $5 \mid 8x+7y$,只需将 $8x+7y$ 设法凑成 $x+9y$ 的倍式与 5 的倍式的代数和.

证明 因为 $5 \mid x+9y$,所以 $5 \mid 2x+18y$. 显然 $5 \mid 10x+25y$,但

$$(10x+25y)-(2x+18y)=8x+7y$$

所以

$$5 \mid 8x+7y$$

(2) **分析** 仿(1),充分利用已知条件 $11 \mid 7x+2y-5z$,将 $3x-7y+12z$ 或 $k(3x-7y+12z)$ 设法凑成 $7x+2y-5z$ 与 z 的倍式与11的倍式的代数和,其中只要 $(11,k)=1$ 即可.

证明 因为 $4(3x-7y+12z)+3(7x+2y-5z)=(12x-28y+48z)+(21x+6y-15z)=11(3x-2y+3z)$.

所以

$$11 \mid 11(3x-2y+3z)$$

且

$$11 \mid 7x+2y-5z$$

所以

$$11 \mid 4(3x-7y+12z)$$

又

$$(11,4)=1$$

所以

$$11 \mid 3x-7y+12z$$

例3 设 n 是整数,求证:$M=n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}$ 为整数,且 M 是3的倍数.

证法1 把 M 化成 $M=\frac{1}{2}n(2n^2+3n+1)$ 后可知,只要能证 M 能被2整除且含因数3即可.

但

$$M=\frac{1}{2}n(2n^2+3n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

因为 $n(n+1)$ 是两个连续自然数之积,必为偶数,所

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

以$\frac{1}{2}n(n+1)$为整数，故M为整数.

再把M改写成$M=\frac{1}{8}\cdot 2n\cdot(2n+1)(2n+2)$，因为$2n,2n+1,2n+2$是三个连续自然数，其中必有一个是3的倍数，从而$M$必是3的倍数.

证法2 因为$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{2}[n(n+1)(n+2)+n(n+1)(n-1)]$，而

$$6\mid n(n+1)(n+2)$$
$$6\mid n(n+1)(n-1)$$

所以$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$是整数，且

$$3\mid n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

例4 设n是正整数，求证：$73\mid 8^{n+2}+9^{2n+1}$.

证明 $8^{n+2}+9^{2n+1}=64\cdot 8^n+9\cdot 81^n=$
$73\times 8^n-9\times 8^n+9\times 81^n=$
$73\times 8^n+9(81^n-8^n)$

因为

$$81-8\mid 81^n-8^n$$

即

$$73\mid 81^n-8^n$$

所以

$$73\mid 8^{n+2}+9^{2n+1}$$

例5 求证：$7\mid 2\,222^{5\,555}+5\,555^{2\,222}$.

证明 $2\,222^{5\,555}+5\,555^{2\,222}=$
$(2\,222^{5\,555}+4^{5\,555})+(5\,555^{2\,222}-4^{2\,222})-$

$$(4^{5\,555}-4^{2\,222})$$

因为

$$7\mid 2\,222+4,7\mid 5\,555-4,7\mid 64-1$$

又

$$2\,222+4\mid 2\,222^{5\,555}+4^{5\,555}$$
$$5\,555-4\mid 5\,555^{2\,222}-4^{2\,222}$$
$$64-1\mid (64^{1\,111}-1)\cdot 4^{2\,222}$$

所以

$$7\mid (2\,222^{5\,555}+5\,555^{2\,222})$$

说明 以上几例,除用到了整除的一些基本知识外,主要还运用了拼凑、拆项的技巧.

例 6 设 a 是正整数,$a<100$,且 a^3+23 能被 24 整除,那么这样的 a 的个数为多少?

(1991 年全国高中数学联赛题)

解 只要考虑 $24\mid a^3-1$. 因

$$a^3-1=(a-1)[a\cdot(a+1)+1]$$

且 $a(a+1)+1$ 为奇数,故必有 $2^3\mid(a-1)$. 若 $a-1$ 不能被 3 整除,则 3 整除 $a(a+1)$,从而 $a(a+1)+1$ 不能被 3 整除. 因此,若要 $24\mid a^3-1$,必有 $3\mid(a-1)$. 于是 $a=24k+1$(k 为整数). 在 $a<100$ 范围内,a 可取 1,25,49,73,97,一共 5 个.

例 7 求证:$1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$ 能被 $1+2+\cdots+n$ 整除,其中 n 为正整数,k 为正奇数.

证明 记 $S=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$,因为

$$1+2+\cdots+(n-1)+n+n+(n-1)+\cdots+2+1=n(n+1)$$

所以

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

(1) 若 n 为正偶数,则

$$S=(1^k+n^k)+[2^k+(n-1)^k]+\cdots+\left[\left(\frac{n}{2}\right)^k+\left(\frac{n}{2}+1\right)^k\right]$$

因为 k 为正奇数,所以 S 中各项都被 $n+1$ 整除,从而 $n+1\mid S$. 又

$$S=[1^k+(n-1)^k]+[2^k+(n-2)^k]+\cdots+\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)^k+\left(\frac{n}{2}+1\right)^k\right]+\left[\left(\frac{n}{2}\right)^k+n^k\right]$$

因为 k 为正奇数,所以 S 中各项都能被 $\frac{n}{2}$ 整除,从而 $\frac{n}{2}\mid S$. 而 $\left(\frac{n}{2},n+1\right)=1$,所以

$$\frac{n(n+1)}{2}\mid S$$

(2) 若 n 为奇数,则

$$S=(1^k+n^k)+(2^k+(n-1)^k)+\cdots+\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^k+\left(\frac{n+3}{2}\right)^k\right]+\left(\frac{n+1}{2}\right)^k$$

$$\frac{n+1}{2}\mid S$$

又

$$S=[1^k+(n-1)^k]+\cdots+\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^k+\left(\frac{n+1}{2}\right)^k\right]+n^k$$

所以 $n\mid S$. 而 $\left(n,\frac{n+1}{2}\right)=1$,所以 $\frac{n(n+1)}{2}\mid S$.

练习一

1. 已知 $n \mid 10a-b, n \mid 10c-d$,求证:$n \mid ad-bc$.

2. 求证:$n(n+1)(2n+1)$ 能被 6 整除.

3. 若 n 为自然数,则 n^3+5n 为6 的倍数;n^5-n 能被 30 整除.

4. 若 $6 \mid a+b+c$,求证:$6 \mid a^3+b^3+c^3$.

5. 已知$7^{82}+8^{161}$ 能被57 整除,求证:$7^{83}+8^{163}$ 也能被 57 整除.

(1986 年齐齐哈尔市初中数学竞赛题)

6. 已知 $7 \mid 13x+8y$,求证:$7 \mid 9x+5y$.

7. 求证:$19 \mid (5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1})$,其中 n 为正整数.

8. 求证:$20 \mid 53^{53}-33^{33}$.

9. 设 a,n 为正整数,试证 $a^{n+2}+(a+1)^{2n+1}$ 能被 a^2+a+1 整除.

10. 对自然数 n,求证:

(1)$13 \mid 11^{n+2}+12^{2n+1}$;

(2)$120 \mid n^5-5n^3+4n$;

(3)$\dfrac{n^5}{5}+\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{n}{15}$ 为一整数.

11. 求证:三个连续奇数的平方和加 1,能被 12 整除,但不能被 24 整除.

12. 若 $4x-y$ 能被 3 整除,则 $4x^2+7xy-2y^2$ 能被 9 整除.

13. 试证:对任意自然数 n,$3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ 能被 17

整除.

14. 求证:不存在这样的整数n,使得$n^2+n+1\ 986$能被1 985 整除.

15. 求证:n为奇数时,n^2-1能被8整除,而3^n-1不能被8整除.

(1983 年广西壮族自治区初中数学竞赛题)

16. 求证:在任意1 987 个连续整数中,一定有一个能被1 987 整除,而且只有一个能被1 987 整除.

(1987 年南昌市初中数学竞赛题)

17. 若有整数x,y,z,使$19\mid 4x+5y-12z$,则必有

(A)$16\mid 6x-3y+z$.　　(B)$19\mid 6x-2y+z$.

(C)$38\mid 10x-4y+2z$.　　(D)$19\mid 6x-2y+3z$.

十进制整数及其多项式表示

二

对于两位数来说，我们可以将它表示为$\overline{ab}$或$10a+b$的形式，对于三位数我们也可以将它表示为$\overline{abc}$或$100a+10b+c$的形式，其中a,b,c是$0,1,2,\cdots,9$中的数，且$a\neq 0$. 那么，对于任意位的自然数，我们又怎样来表示它呢？

一般地，一个十进制的$n+1$位自然数N可以表示为

$$N=\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}$$

或$$N=a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+a_1\times 10+a_0$$

其中a_i都是整数，$0\leqslant a_i\leqslant 9(i=0,1,2,\cdots,n)$，且$a_n\neq 0$.

上面后者的表示方法称为自然数N的多项式表示法. 自然数N最左边的一位数字a_n称为整数的首位数字，最右边的一位数字a_0称为N的末位数字，而且$10^n\leqslant N<10^{n+1}$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com