普通高等教育“十二五”规划教材

优化设计

◎ 杨　挺　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育"十二五"规划教材

优化设计

主　编　杨　挺
参　编　冯瑛敏　耿令新
主　审　杨　巍

机 械 工 业 出 版 社

本书较系统地介绍了优化设计的基本概念、基本理论和常用的优化方法：一维优化方法、无约束优化方法、线性规划、约束优化方法和多目标函数的优化方法，同时注意到近年来发展起来的现代优化方法：工程遗传算法、模拟退火算法、人工神经网络算法和蚁群算法，并列举了优化设计方法在机械设计和电气工程设计中的典型应用实例。为便于教与学，本书在论述优化原理与方法时，力求说理透彻、概念清晰、深入浅出，尽可能多地列举算例和较详细的解题步骤以加深理解，并在各章首末辅以内容提示、学习要点和习题，以引导和巩固本章的学习。书末附有常用优化方法C语言和MATLAB的参考程序。

本书可作为高等院校机械类、电气工程类各专业本科生和研究生的教学用书，也可供其他相关专业的师生及工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

优化设计/杨挺主编. —北京：机械工业出版社，2014.5
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-111-46048-0

Ⅰ.①优… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①最优设计-高等学校-教材 Ⅳ.①TB21

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第040375号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：刘小慧 责任编辑：刘小慧 李 乐 于苏华
版式设计：赵颖喆 责任校对：张莉娟
封面设计：张 静 责任印制：刘 岚
北京京丰印刷厂印刷
2014年5月第1版·第1次印刷
184mm×260mm·16.75印张·409千字
标准书号：ISBN 978-7-111-46048-0
定价：33.00元

前　言

优化设计是随着计算机技术的迅速发展和广泛应用而产生的一种现代设计方法。优化设计是将工程设计问题转化为最优化问题，利用数学规划方法，借助于电子计算机高速度、高精度和大存储量的运算处理能力，从满足设计要求的一切可行方案中自动寻求最佳设计方案的设计方法。它能够综合处理并最大限度地满足各种不同性质甚至相互矛盾的设计要求，迅速而准确地得到满意的设计结果，且可用于各种工程项目的方案设计和技术设计。工程中采用优化方法设计，可以缩短设计周期、提高产品质量、节省原材料、降低成本，从而达到提高经济效益的目的。

本书是编者在多年从事优化设计教学和科研实践的基础上编写而成的。书中着重介绍优化设计的基本概念、基本理论和常用的优化方法，包括一维优化方法、无约束优化方法、线性规划、约束优化方法和多目标函数的优化方法，并列举了优化设计方法在机械设计和电气工程设计中的典型应用实例；同时注意到近年来发展起来的现代优化方法，包括工程遗传算法、模拟退火算法、人工神经网络算法和蚁群算法，对每种算法的基本思想、基本概念以及基本计算方法加以简单的介绍，其目的是为读者进一步深入地学习现代优化计算方法引路、打基础。

本书编写以循序渐进、理论与应用兼顾、注重工程实用性三原则为出发点。为便于教与学，本书在论述优化原理与方法时，力求说理透彻、概念清晰、深入浅出，尽可能多地列举算例和较详细的解题步骤以加深理解，并在各章首末辅以内容提示、学习要点和习题，以引导和巩固本章的学习。书末附录给出了较常用的优化方法 C 语言和 MATLAB 的参考程序，以便读者在学习时参考和上机实践。

参加本书编写的有天津大学杨挺（第一、二、三、四、八、九章和第六章中第四、五节及附录）、天津电力经济研究院冯瑛敏（第五章）、河南科技大学耿令新（第六章中第一、二、三节及第七章），天津大学研究生袁博、林志贤、向文平参与了附录程序调试工作。全书由杨挺担任主编。

本书承杨巍教授精心审阅并提出了许多宝贵意见和建议，谨致衷心感谢。

由于编者水平所限，书中疏漏及不当之处在所难免，恳请广大读者不吝指正。

编　者

目　录

第一章　优化设计的基本概念

提示：本章从简单实例入手引出优化设计的数学模型，说明其组成要素和主要类型，重点内容是优化设计中的基本概念：目标函数、设计变量和约束函数，然后通过优化设计问题的几何描述了解优化设计的直观概念。

第一节　优化设计概述

一、优化设计

人们做任何事情都力求用最小的付出得到最佳的效果，这就是优化问题。机械、电气工程设计中，设计者更是希望寻求一组合理的设计参数，使由该组参数所确定的方案既满足各种设计的性能要求，又使其技术经济指标达到最佳，即实现了最优设计。但常规的工程设计沿用着众所熟知的经验类比法。由于设计问题的复杂性及设计手段、方法的制约，不可能进行多方案的分析比较，更不可能得到最佳的设计方案。因此，人们只能在漫长的设计实践中不断地探索与改进，逐步使方案趋于完善。

然而，随着电子计算机的发展和普及，出现了一批新的设计学科和一系列现代设计方法，诸如优化设计、有限元、计算机辅助设计、设计方法学和可靠性设计等。这些方法的发展和应用，使得各个工程领域的设计工作从形式到效果都发生了根本性的变化，产生了巨大的经济效益和社会效益。本书介绍了现代设计方法中的优化设计。

优化设计是以“数学规划论”为理论基础，借助于电子计算机，自动、迅速探优的设计方法。其设计的目的是寻求最佳的设计方案，理论基础是“数学规划论”，设计手段是计算机及优化计算软件。

二、优化设计发展简述

20 世纪 50 年代以前，用于解决最优化问题的数学方法仅限于古典的微分法和变分法。在第二次世界大战期间，由于军事上的需要，在英美国家产生了运筹学，用它来解决由古典微分法和变分法不能解决的问题。在此基础上，发展起来的以线性规划和非线性规划为主要内容的数学规划，形成了一个新的数学分支，其中还包括动态规划、几何规划和随机规划等。随着计算机的发展与应用，在数学规划的基础上形成了一门新兴学科——最优化设计。利用该设计方法，不仅使设计周期大大缩短，计算精度显著提高，而且可以解决传统设计方法所不能解决的比较复杂的最优化问题。近几十年来，优化设计方法已陆续应用到建筑结构、化工、冶金、航天航空、造船、机械、控制系统、电力系统以及电机、电器等工程领域，并得到了迅速发展，取得了丰硕成果。其主要原因是，实际工程中确实存在大量的优化问题，并且随着计算机技术的飞速发展，为优化设计提供了有力的计算工具。将优化设计再与其他的现代设计方法结合起来，使设计过程向自动化、智能化发展，设计方法将发生重大

的变革。

值得注意的是，基于数学规划的最优化方法虽然得到了广泛的应用，其理论日趋成熟，但工程优化问题中还存在着一些难解的问题无法解决，也就是优化理论中的NP-hard问题。因而，20世纪80年代初期兴起了一些现代优化方法，诸如：禁忌搜索、模拟退火、遗传算法、人工神经网络和蚁群算法等。现代设计方法以其很强的解决问题的能力和广泛的适应性，现已在自然科学、工程技术、商业管理、医学和社会科学等领域都有应用。在工程技术领域，如电力系统的机组组合优化、故障诊断、电网规划等方面取得了良好的应用效果；在机械领域的机械方案优化设计、机床挂轮组的最佳选择、机构参数优化以及机器人运动轨迹优化等方面都已取得了成功应用。

三、优化设计的一般过程

一个工程优化问题的解决，一般要经过如下四个阶段：

1. 确定设计目标

根据工程设计的问题，确定所追求的目标。目标大致可分为两类：一类是极大化目标（效果目标），例如：利润、产值、增益、效益、生产率、可靠性和精度等；另一类是极小化目标（成本目标），例如：成本、时间、重量、体积、人力、材料、损耗、误差等。设计目标可以是单目标也可以是多目标。

2. 建立数学模型

由于是利用计算机求解，因此，必须将工程设计的问题用数学表达式的形式给予全面、准确的描述。显然，建立数学模型要用到相应的专业知识确定设计目标的表达式、设计参数（设计变量）及要满足的各种限制条件，或者说要满足的各种性能要求。

3. 选择合适的优化方法

根据数学模型中的函数性态、变量多少及设计精度等，选择较有效的优化方法进行程序设计。

4. 优化求解

首先，需要进行上机计算，程序调试，解出最优解，然后对计算结果作出分析和正确的判断，分析解的实用性，最后得出最优设计方案。

优化设计可归结为“建模”与“解模”两大问题。由于建立数学模型需要相应的专业知识，因此，本课程的主要任务是解模，即对数学模型如何求解。具体来讲，本课程讨论最优化理论的基础知识和基本理论，以及常用最优化方法的基本原理、迭代步骤和程序设计。

第二节 优化设计的数学模型

工程的设计问题通常是相当复杂的，欲能利用计算机进行优化求解，必须对实际问题加以适当的抽象和简化，即建立便于求解的统一形式——数学模型。数学模型是进行优化设计的基础，根据设计问题的具体要求和条件建立完备的数学模型是优化设计成败的关键。

本节通过几个简单的优化设计实例，说明数学模型的一般形式及其有关的基本概念。

一、优化设计的实例

下面几个实例虽然简单，但都具有一定的代表性。

例 1-1 要用薄钢板制造一个体积为 $5\mathrm{m}^3$ 的无盖货箱。由于运输装载要求，其长度不小于4m。问：长、宽、高各为多少用料最省？

解 钢板的耗费量与货箱的表面积成正比，优化设计的目标是用料最省，也就是货箱的表面积最小。

设箱体的表面积为 S，长、宽、高分别为 x_1，x_2 和 x_3，由图 1-1 可知

$$S = x_1x_2 + 2(x_2x_3 + x_1x_3)$$

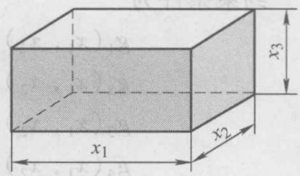

图 1-1 货箱例图

上式称为目标函数，参数 x_1，x_2 和 x_3 称为设计变量。优化设计就是恰当地选择这一组参数使货箱的表面积达到最小。但由题目的要求和实际情况可知，该组参数的选择还应受到如下条件的限制：

长 $x_1 \geqslant 4$，宽 $x_2 > 0$，高 $x_3 > 0$ 及体积 $V = x_1x_2x_3 = 5$，即 $x_1x_2x_3 - 5 = 0$。

以上的限制条件称为约束条件。其中，$x_1 \geqslant 4$、$x_2 > 0$、$x_3 > 0$ 为不等式约束条件，$x_1x_2x_3 - 5 = 0$ 为等式约束条件。

于是上述货箱下料问题可归结为：

求变量 x_1, x_2, x_3

使函数 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2(x_2x_3 + x_1x_3)$ 的值最小

约束条件为

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = 4 - x_1 \leqslant 0$$
$$g_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 > 0$$
$$g_3(x_1, x_2, x_3) = x_3 > 0$$
$$h(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 - 5 = 0$$

例 1-2 某工厂生产甲、乙两种产品，生产每件产品所需的材料、工时、电力和可以获得的利润，以及每天能够提供的材料、工时和电力见表 1-1。试确定两种产品每天的产量各为多少，以使每天可能获得的利润最大。

表 1-1 生产条件与供给的数据

产品	材料/kg	工时/h	电力/(kW·h)	利润/元
甲	9	3	4	60
乙	4	10	5	120
供应量	360	300	200	

解 这是一个生产计划问题，可归结为在满足各项生产条件下，使每天所获得的利润最大的优化设计问题。

设每天生产甲产品 x_1 件，乙产品 x_2 件，每天获得的利润用 $f(x_1, x_2)$ 表示，即

$$f(x_1, x_2) = 60x_1 + 120x_2$$

每天实际消耗的材料、工时和电力分别用函数 $g_1(x_1, x_2)$，$g_2(x_1, x_2)$，$g_3(x_1, x_2)$ 表示，即

$$g_1(x_1, x_2) = 9x_1 + 4x_2$$
$$g_2(x_1, x_2) = 3x_1 + 10x_2$$
$$g_3(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2$$

于是上述生产计划问题可归结为：

求变量　　x_1, x_2

使函数　　$f(x_1, x_2) = 60x_1 + 120x_2$　极大化

约束条件为

$$g_1(x_1, x_2) = 9x_1 + 4x_2 \leqslant 360$$
$$g_2(x_1, x_2) = 3x_1 + 10x_2 \leqslant 300$$
$$g_3(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \leqslant 200$$
$$g_4(x_1, x_2) = x_1 \geqslant 0$$
$$g_5(x_1, x_2) = x_2 \geqslant 0$$

这就是该生产计划问题的数学模型，其中 $f(x_1, x_2)$ 为设计目标，即目标函数。$g_u(x_1, x_2)$ $(u=1, 2, \cdots, 5)$ 为已知的生产指标的约束条件，即约束函数。

例 1-3　两发电站的输出功率分别为 P_1 和 P_2，两电站可利用的最大功率分别为 $P_{1\max} = 100\text{kW}$，$P_{2\max} = 150\text{kW}$，发电的费用分别为 A 元/kW 和 B 元/kW，负荷用量为 200kW。问若满足用电需要，两电站的电力如何分配才能使发电的总费用最小?

解　设两电站发电量分别为 x_1 和 x_2，发电的总费用 $f(x_1, x_2)$ 表示，即

$$f(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2$$

用电量满足 $(x_1 + x_2) \geqslant 200\text{kW}$，两发电站发电量分别不能超过 100kW 和 150kW。

于是上述电力分配问题可归结为：

求变量　　x_1, x_2

使函数　　$f(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2$ 的值最小

约束条件为

$$g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \geqslant 200$$
$$g_2(x_1, x_2) = x_1 - 100 \leqslant 0$$
$$g_3(x_1, x_2) = x_2 - 150 \leqslant 0$$

例 1-4　某电厂生产 $5 \times 10^4\text{kW}$ 电力需输送到一个降压配电站，导线电阻损失为 $0.263I^2G^{-1}$ 元，I 为导线电流（A），G 为导线电导（S）；输送功率 $P = \sqrt{3}UI$，U 为电厂处输电线电压（kV），导线成本为 $3.9 \times 10^6 G$ 元，设备投资 $10^3 U$ 元，问输电线电压 U 和电导 G 各为多少才能使系统成本最低?

解　因电流

$$I = \frac{5 \times 10^4}{\sqrt{3}U}$$

而导线电阻损失（元）为

$$0.263I^2G^{-1} = 0.263\left(\frac{5 \times 10^4}{\sqrt{3}U}\right)^2 \cdot G^{-1} = \frac{2.19 \times 10^8}{U^2 G}$$

由题意可知系统成本为

$$\frac{2.19 \times 10^8}{U^2 G} + 3.9 \times 10^6 G + 10^3 U$$

若令 $x_1 = U, x_2 = G$，于是上述输电问题可归结为：

求变量　x_1, x_2

使函数　$f(x_1, x_2) = \dfrac{2.19\times 10^8}{x_1^2 x_2} + 3.9\times 10^6 x_2 + 10^3 x_1$ 的值最小

满足条件　$x_1 > 0$，$x_2 > 0$

例 1-5　二阶有源低通滤波器设计问题：滤波器电路结构如图 1-2 所示，设放大系数 $K=2$，要求在角频率 $\omega\in[0, 5]$（rad/s）的范围内（采样点为 $\omega=0, 1, 2, 3, 4, 5$ 六个角频率）输出响应满足：$\overline{U}_o(j\omega) = \dfrac{2}{1-\omega^2 + j\sqrt{2}\omega} U_i(j\omega)$。试问如何选择电导 G_1，G_2 和电容 C_1，C_2 的参数，才能使得所组成的滤波器的输出响应与设计需求 $\overline{U}_o$ 最匹配（误差最小）？

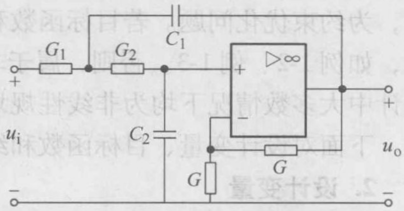

图 1-2　有源低通滤波器电路结构

解　由电路分析得

$$U_o(G_1, G_2, C_1, C_2, j\omega) = \frac{2C_1 G_2}{G_1 G_2 - \omega^2 C_1 C_2 - j\omega(G_1 C_2 + G_2 C_2 - G_2 C_1)} U_i(j\omega)$$

令设计变量　$x_1 = G_1$，$x_2 = G_2$，$x_3 = C_1$，$x_4 = C_2$，上式可改写为

$$U_o(x_1, x_2, x_3, x_4, j\omega) = \frac{2x_3 x_2}{x_1 x_2 - \omega^2 x_3 x_4 - j\omega(x_1 x_4 + x_2 x_4 - x_2 x_3)} U_i(j\omega)$$

使误差最小可有两种表示：

（1）误差二次方和最小

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=0}^{5}\left[U_o(x_1, x_2, x_3, x_4, j\omega) - \overline{U}_o(j\omega)\right]^2$$

（2）最大误差的绝对值最小

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \max_{0\leqslant i\leqslant 5}\left\{\left|U_o(x_1, x_2, x_3, x_4, j\omega) - \overline{U}_o(j\omega)\right|\right\}$$

于是该问题可归结为：

求变量　x_1, x_2, x_3, x_4

使函数　$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=0}^{5}\left[U_o(x_1, x_2, x_3, x_4, j\omega) - \overline{U}_o(j\omega)\right]^2$ 的值最小

或　$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \max_{0\leqslant i\leqslant 5}\left\{\left|U_o(x_1, x_2, x_3, x_4, j\omega) - \overline{U}_o(j\omega)\right|\right\}$ 的值最小

满足条件 $x_i > 0$（$i=1, 2, 3, 4$）

二、优化设计数学模型的一般形式

1. 数学模型

从以上五个简单的实例可看出，优化设计的数学模型的一般形式可归纳为

$$\left.\begin{aligned}&\min_{X\in\mathbf{R}^n} f(X)\\&\text{s.t.}\begin{cases} g_u(X)\leqslant 0 & (u=1, 2, \cdots, m)\\ h_v(X)=0 & (v=1, 2, \cdots, p<n)\end{cases}\end{aligned}\right\}\tag{1-1}$$

由上式可看出，优化设计的数学模型由设计变量 X、目标函数 $f(X)$ 和约束条件 $g_u(X)$

及 $h_v(\boldsymbol{X})$ 三个基本要素组成，它所表达的意义是：在满足一定的约束条件下，寻求一组合理的设计参数使得目标函数值达到极小。其中，$\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$ 表示设计向量 $\boldsymbol{X}$ 属于 n 维实欧氏空间 $\mathbf{R}^n$，s. t. 是“subject to”的缩写，意即“受约束于”。

模型中有 m 个不等式约束 $g_u(\boldsymbol{X})\leqslant 0$（$u=1, 2, \cdots, m$）和 p 个等式约束 $h_v(\boldsymbol{X})=0$（$v=1, 2, \cdots, p<n$），若 $m=0$、$p=0$，即没有任何的约束条件，则该问题是无约束优化问题；否则，为约束优化问题。若目标函数和所有的约束函数均是线性的，则该优化问题属于线性规划，如例 1-2、例 1-3。否则，属于非线性规划，如例 1-1、例 1-4、例 1-5。机械、电气工程设计中大多数情况下均为非线性规划问题。

下面对设计变量、目标函数和约束条件三个基本要素进行详细论述。

2. 设计变量

工程问题的一个设计方案通常是用一组特征参数表示，这组特征参数即是优化设计的设计变量。一个工程问题的设计参数一般是相当多的，其中包括设计常量和设计变量。所谓的设计常量是在优化设计过程中固定不变的参数，如材料的弹性模量、许用应力等。设计变量是指在优化设计过程中可进行调整和优选的独立参数。例如，在齿轮传动设计中，将模数 m、齿数 z 作为设计变量，而分度圆直径 d 就不是独立参数，因 $d=mz$。

设计变量应选择那些与目标函数和约束函数密切相关的、能够表达设计对象特征的参数。显然设计变量越多，可供选择的方案越多，设计的灵活性就越大（故又将设计变量的个数 n 称为设计的自由度），因而就容易得到比较理想的设计方案，但要兼顾到数学模型的复杂程度。一般来说，设计变量越多，数学模型越复杂，计算的工作量越大，求解就越困难。因此，在满足设计基本要求的前提下，应尽可能地减少设计变量的数目。对于复杂的设计问题，可以先把那些较次要的参数，或变化范围较窄的参数作为设计常量处理，以减少设计变量的数目，加快求解的速度。当确定这种简化的模型计算无误时，再逐渐增加设计变量的数目，逐步提高优化解的完整性。

设计变量有连续型变量和离散型变量两种。大多数的工程优化问题中的设计变量都是连续型变量，可用常规的优化方法求解。若变量只按某种设计规范标准取值或只能取整数才有实际意义，则称为离散型变量，如齿轮的模数、齿数。对离散型变量的优化问题求解属于整数规划问题，用离散优化方法求解。目前，关于离散型变量的优化问题的理论和方法还不完善。因此，对离散型变量的优化问题，一般先将其视为连续型变量，用常规的优化方法求解后，再进行圆整或标准化处理。虽然处理后的解不是最优解，但也是较理想的一个设计方案。

n 维设计变量的一般表达式为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \tag{1-2}$$

设计变量的个数 n 称为优化问题的维数。由线性代数可知，若 n 个设计变量 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 相互独立，则由它们形成的向量 $\boldsymbol{X}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$ 的全体集合构成一个 n 维实欧氏空间，又称为设计空间，记作 $\boldsymbol{R}^n$。于是，一组设计变量可看做设计空间的一个点，称为

设计点。反之，所有设计点的集合构成一个设计空间。因此，设计点、设计向量、设计方案是一一对应的。

当 $n=2$ 时构成二维设计平面，当 $n=3$ 时构成三维设计空间，其几何表示如图 1-3 所示。当 $n>3$ 时，构成 n 维超空间，无法用图形进行表示。

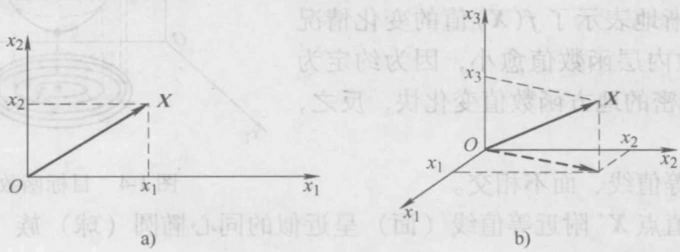

图 1-3　设计向量的几何表示
a）二维设计平面　b）三维设计空间

由图可知，设计空间（或平面）的一个设计点 $\boldsymbol{X}$ 表示一个以坐标原点为起点的、$\boldsymbol{X}$ 为终点的向量。在以后的论述中，如 $\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_0$，显然是向量运算。

3. 目标函数及等值线

（1）目标函数　设计中预期达到目标的数学表达式，其函数值的大小评价一个设计方案的优劣，称为目标函数，又称评价函数。用 $f(\boldsymbol{X})$ 表示，是设计变量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的函数。n 维设计变量的优化问题的目标函数记为

$$f(\boldsymbol{X})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1-3}$$

对于工程中各种优化问题，有时是求目标函数的极小值，有时是求目标函数的极大值，如例 1-2。为了使算法和程序统一，通常都写成追求目标函数的极小值即 $\min f(\boldsymbol{X})$ 的形式，如数学模型的式（1-1）。若为求极大值的问题，则可看成是求 $[-f(\boldsymbol{X})]$ 的极小值，显然 $\min[-f(\boldsymbol{X})]$ 与 $\max f(\boldsymbol{X})$ 是等价的。

目标函数有单目标函数和多目标函数之分。若设计指标只有一项，为单目标优化问题；若设计指标有多项，即为多目标优化问题。实际中较多的是单目标优化问题，其优化理论与方法也较成熟，因此，单目标优化问题是本书讨论的重点。对多目标优化问题也可化为单目标优化问题求解。其目标函数的表达式为

$$f(\boldsymbol{X})=\sum_{j=1}^{q} w_j f_j(\boldsymbol{X}) \quad (w_j=w_{j1}\cdot w_{j2}) \tag{1-4}$$

式中，$f_j(\boldsymbol{X})$ $(j=1,2,\cdots,q)$ 为分目标函数；w_j 为加权因子；$w_{j1}>0$ 为本征因子，其大小来平衡各分目标函数 $f_j(\boldsymbol{X})$ 之间的重要程度；$w_{j2}>0$ 为校正因子，其大小来调节各分目标函数 $f_j(\boldsymbol{X})$ 之间由于量纲的不同在数量级上的差别。

（2）目标函数的等值线　当目标函数为某一定值 $f(\boldsymbol{X})=C$ 时，可有无穷多个设计点的值与之对应。因此，把具有相等目标函数值的设计点所构成的平面曲线称之为等值线，当 $n=3$ 时，为等值面；若 $n>3$，则为等值超曲面。

现以二维优化问题为例，阐明目标函数等值线的几何意义。

如图 1-4 所示，二维变量的目标函数图形应在三维空间中描述。若令目标函数 $f(\boldsymbol{X})=C$，其几何意义相当于用距 x_1Ox_2 坐标平面为 C 且与其平行的平面截取曲面 $f(\boldsymbol{X})$ 所得到的一

条交线，该条交线即是等值线。令 $f(X)$ 的值分别等于 C_1，C_2，…，则对应不同的交线，再将所有的交线投影到 x_1Ox_2 坐标平面上，就得到了等值线族，如图 1-4 所示。

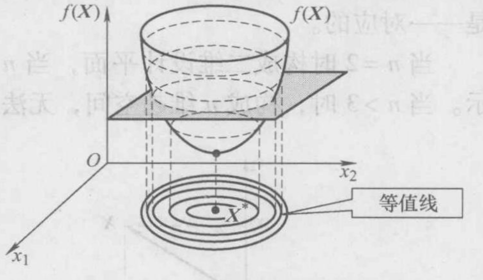

图 1-4 目标函数的等值线

等值线具有如下性质：

1）等值线清晰地表示了 $f(X)$ 值的变化情况（函数的性态）。愈内层函数值愈小，因为约定为极小化。等值线稠密的地方函数值变化快，反之，变化较慢。

2）不同值的等值线、面不相交。

3）一般在极值点 X^* 附近等值线（面）呈近似的同心椭圆（球）族（近似地看成二次函数），其中心即是极值点 X^*。

故从几何意义上来说，求目标函数的极小值点也就是求等值线族的共同中心。由于二维的问题容易用几何图形表示，因此，在后面的论述中都是以二维问题为例。对于多维问题可由二维问题进行推广，读者在学习中应抓住二维问题的学习。

4. 约束条件及几何意义

（1）约束条件　对设计变量的取值所加的某些限制条件称为约束条件。一般的表达式为

$$\left.\begin{aligned} g_u(X) &\leqslant 0 \quad (u=1,2,\cdots,m) \\ h_v(X) &= 0 \quad (v=1,2,\cdots,p<n) \end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

式中，$g_u(X)$ 和 $h_v(X)$ 都是设计变量的函数；m 为不等式约束的个数；p 为等式约束的个数，而且 p 必须小于维数 n。因为一个等式约束可以消去一个设计变量，当 $p=n$ 时，即可以由 p 个方程解得唯一的一组设计变量 x_1，x_2，…，x_n，即设计方案是确定的，无需优化求解。

为了统一起见，若不等式约束为 $g_u(X)\geqslant 0$，应用 $-g_u(X)\leqslant 0$ 的等价形式代替。

按照设计约束的性质不同，约束又可分为性能约束和边界约束两类。性能约束是设计变量必须满足的某些设计性能的要求，如：强度、刚度等，又称隐式约束。边界约束是对设计变量的取值范围所加的限制，即设计变量的上、下界，其表达形式为 $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$，故又称为显式约束。

（2）约束条件的几何意义　$g(X)=0$ 把设计空间分为两个区域，如图 1-5 所示。一个区域内所有点都满足约束条件，即 $g_u(X)<0$ 部分；另一个区域不满足约束条件，即 $g(X)>0$ 部分，用阴影线表示。分界线 $g(X)=0$ 称为约束线（多维时为约束面、约束超曲面）。在阴影线一侧的区域中的任一点 X 均使 $g_u(X)>0$，即不满足约束条件，故该区域称为非可行域，域中的任一点称为非可行点（也称为外点）。显然，阴影线区域的另一侧为可行域，域中的点为可行点（也称为内点）。故可行域也看做满足所有约束条件设计点的集合。

例如，某个二维设计问题有 4 个不等式约束，$g_u(X)\leqslant 0$（$u=1,2,3,4$），4 条约束线把设计平面围成的约束可行域 $\mathscr{D}$ 如图 1-6 所示。若再增加一个等式约束 $h_1(X)=0$，则可行域缩小为曲线段 AB；若再增加一个等式约束 $h_2(X)=0$，则可行域缩小为两条等式约束线的交点。显然，二维优化问题等式约束的个数最多为一个，n 维优化问题等式约束的个数应小于其维数 n。

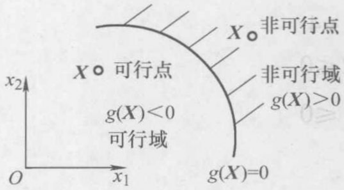

图 1-5　约束线

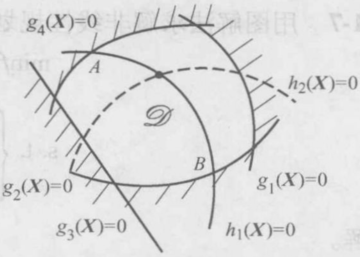

图 1-6　可行域

第三节　优化设计问题的几何描述

对于简单的二维优化问题，可在设计平面内直观地画出可行域、目标函数的等值线族，并且可以根据等值线与可行域的相互关系确定出最优点的位置。这种求解优化问题的方法称为图解法。图解法直观、概念清晰、便于理解，只适用于简单的二维问题的求解。虽然图解法没有什么实用价值，但由直观的二维图解建立优化求解的基本概念，对掌握最优解的存在规律有很大帮助，为后面多维问题的学习打下基础。

下面举两个简单的例子说明图解过程。

例 1-6　第一节中的例 1-2，其线性规划的数学模型改写为

$$\max f(x_1,\ x_2)=60x_1+120x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}g_1(x_1,\ x_2)=9x_1+4x_2\leqslant 360\\ g_2(x_1,\ x_2)=3x_1+10x_2\leqslant 300\\ g_3(x_1,\ x_2)=4x_1+5x_2\leqslant 200\\ g_4(x_1,\ x_2)=-x_1\leqslant 0\\ g_5(x_1,\ x_2)=-x_2\leqslant 0\end{cases}$$

解　如图 1-7 所示，先画出设计平面 x_1Ox_2，再令 5 个不等式约束函数等于零，画出 5 条约束直线，该 5 条约束线围成了可行域 $\mathscr{D}$。至于约束线划分的两个区域哪边是可行域，可以这样判断：任选一个点，为方便起见，选坐标原点，将 $x_1=0$、$x_2=0$ 代入约束方程，如果能满足约束条件，则该点所在的区域即是可行域，否则为非可行域。得出可行域后，再令目标函数等于一系列的常数画出等值线族（图中虚线所示），由于该问题是求最大值，故在这些平行直线族中，可找到离坐标原点最远，又与可行域多边形相交的等值线，该交点是可行域的一个顶点，即最优点 X^*。其最优解为

$$X^*=\begin{pmatrix}x_1^*\\ x_2^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\ 24\end{pmatrix}$$

故得最优值为

$$f(X^*)=60\times 20+120\times 24=4080$$

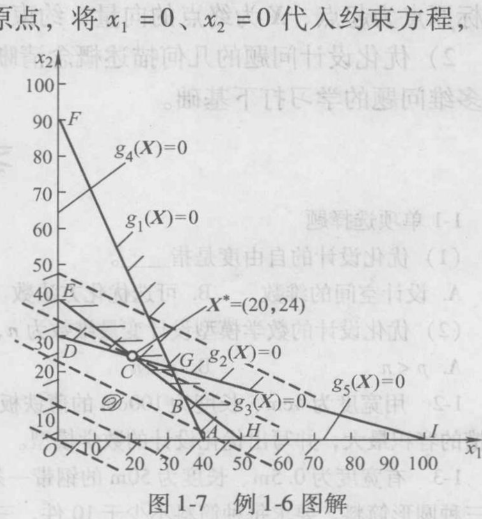

图 1-7　例 1-6 图解

例 1-7 用图解法求解非线性规划问题

$$\min f(\boldsymbol{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} g_1(\boldsymbol{X}) = x_2 - x_1 - 2 \leqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{X}) = x_1^2 - x_2 + 1 \leqslant 0 \\ g_3(\boldsymbol{X}) = -x_1 \leqslant 0 \end{cases}$$

的最优解。

解 这是一个非线性规划问题。其约束线是两条直线和一条二次曲线，等值线是圆心在（2，0）的同心圆族，如图 1-8 所示。由图可看出，最优点 $\boldsymbol{X}^*$ 是目标函数的等值线在下降方向上与可行域的一个切点，其最优解为

$$\boldsymbol{X}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.58 \\ 1.34 \end{pmatrix}$$

故得最优值为

$$f(\boldsymbol{X}^*) = 0.58^2 + 1.34^2 - 4 \times 0.58 + 4 = 3.812$$

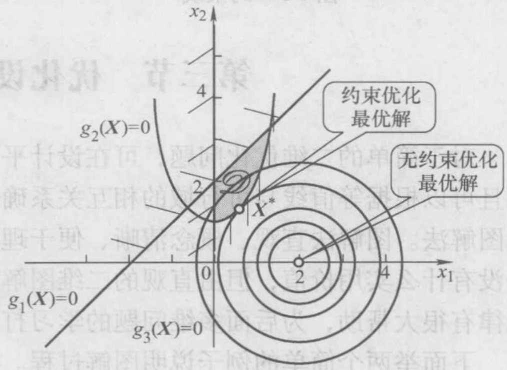

图 1-8 例 1-7 图解

一般来说，线性优化问题的最优点必定是两个或两个以上约束边界的交点，称为可行域的顶点。或者说，线性规划问题的最优点一定在可行域的顶点上取得。而非线性规划问题的最优点要么是一个内点（该情况在约束优化问题中很少出现），要么是一个边界点，而此边界点必定是目标函数的一条等值线与可行边界的一个切点。

本章学习要点

1）掌握数学模型的一般形式。了解什么是线性规划、非线性规划、无约束优化及约束优化。重点掌握目标函数的等值线及其性质；设计变量的几何表示，设计点 $\boldsymbol{X}$ 表示一个以坐标原点为起点、$\boldsymbol{X}$ 为终点的向量；约束可行域和可行点的概念。

2）优化设计问题的几何描述概念清晰，对掌握最优解的存在规律有很大帮助，为后面的多维问题的学习打下基础。

习 题

1-1 单项选择题

（1）优化设计的自由度是指____。

A. 设计空间的维数　　B. 可选优化方法数　　C. 分目标函数数　　D. 所提供约束条件数

（2）优化设计的数学模型设计变量维数为 n，等式约束的个数 p 应满足____。

A. $p<n$　　B. $p=n$　　C. $p>n$　　D. $p \leqslant n$

1-2 用宽度为 4cm、长度为 100cm 的薄铁板做成 100cm 长的等腰梯形槽，试确定其边长和角度，从而使槽的容积最大，并写出优化设计的数学模型。

1-3 有宽度为 0.5m、长度为 50m 的钢带一条，欲做成高为 0.5m，直径分别为 0.22m、0.35m 和 0.5m 的三种圆形筒料。要求每种筒料不少于 10 件，三种总数不少于 30 件，问如何下料，才能最节省材料？试

写出优化设计的数学模型。

1-4　用图解法求解：

(1)

$$\min f(X) = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 - 4x_2 + 40$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 9 \leqslant 0 \\ x_1 - x_2 + 2 \leqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2)

$$\min f(X) = -x_1 - x_2$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1^2 - x_2 \leqslant 0 \\ -x_1 + x_2 - 1 \leqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0 \end{cases}$$