畅销全球的趣味经典科普读物

激发读者学习科学的兴趣，自觉地探索和钻研科学知识，在兴趣的引导下将所学到的知识更加牢固地掌握，并灵活地运用。读者不仅能丰富科学知识，培养创新意识，还能启迪科学思维，丰富科学想象力。

超值白金版

39.80

趣味科学

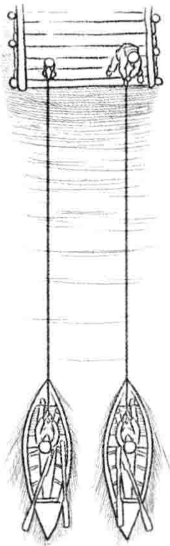
大全集（下）

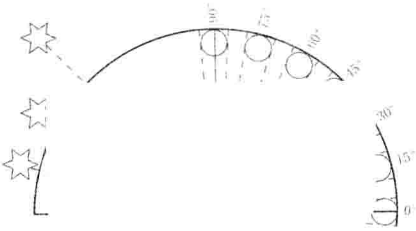
（苏）别莱利曼 著　罗子倪 译

世界著名科普大师趣味科学的经典力作

别莱利曼将文学语言与科学语言完美地结合，将生活实际和科学理论巧妙地联系，能把一个问题、一个原理叙述得简洁生动、妙趣横生，而又十分准确，避免枯燥的说教，而能与读者分享一些神奇的故事、有趣的难题、各种奇谈怪论，共同探讨其中的科学知识，使人忘记是在读书、学习，而更像在听一个个新奇迷人的故事。

中国华侨出版社

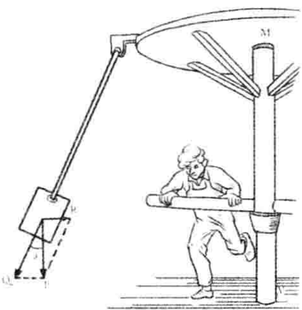




趣味科学

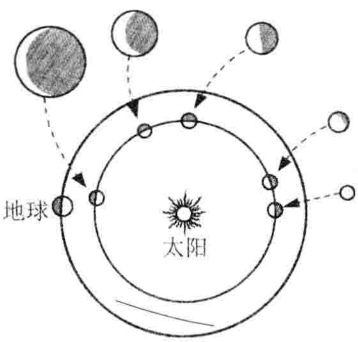
大全集

（下）



（苏）别莱利曼　著

罗子倪　译



中国華僑出版社

第八章　级　数

8.1　古老的级数问题

［题］关于级数的最古老问题并不是两千年前象棋发明者的奖励问题，而是更古老的记录在埃及著名的林德氏草纸文献中的关于分面包的题目。林德于 18 世纪末发现这种草纸本，它大约是公元前两千年编写成的，里面列举了许多算术的、代数的和几何的题目。分面包的问题就是这众多题目中的一个。这道题是这样的：

五个人分一百份面包，后面一个人总比前面一个人得的多，而且多的份数相同。同时，已知前两人所得的面包总数是后三个人所得面包总数的七分之一。问每个人所分得的面包分别是多少份？

［解］很容易就能看出，五个人所得的面包是一个递增的算数级数。我们设第一个人分得的面包为 x 份，第二个人比第一个人多分得 y 份，那么，每个人分得的面包份数如下：

第一个人…………………… x

第二个人…………………… $x+y$

第三个人…………………… $x+2y$

第四个人…………………… $x+3y$

第五个人…………………… $x+4y$

根据题意，列出如下方程组：

$$\begin{cases} x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100, \\ 7\times[x+(x+y)]=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y) \end{cases}$$

化简后得：

$$\begin{cases} x+2y=20, \\ 11x=2y \end{cases}$$

解方程组，可得：

$$x=1\frac{2}{3}, y=9\frac{1}{6}。$$

也就是说，每个人分得的面包份数如下：

$$1\frac{2}{3}, 10\frac{5}{6}, 20, 29\frac{1}{6}, 38\frac{1}{3}。$$

8.2 方格纸的妙用

级数问题已经出现几千年了，但是300年前，关于级数的计算公式还没有被给出。那个时候，马格尼茨出版了一本书，这本书中，已经涉及到了级数，但是由于没有计算公式，级数的计算对于他来说还非常困难。

后来，聪明的人们想到了一种简单的方法，可以很快计算出算数级数的和。不过这种方法要借助一种工具，那就是方格纸。

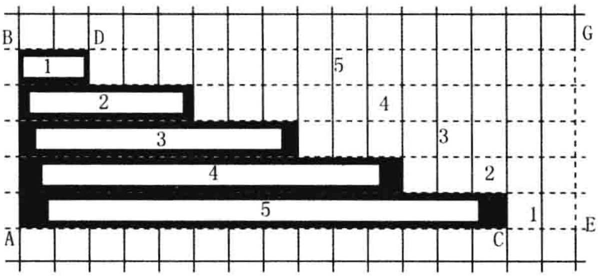


图 24

在方格纸上，我们可以用一个台阶式的图形来表示出任何一个算数级数。如图24所示，ABDC表示的就是级数2，5，8，11，14。要求这个级数的和非常容易，我们只需把这个级数的台阶式图形扩成一个如图的矩形ABGE，不难看出，ABDC和DGEC的面积相等，均为ABGE面积的一半，ABDC的面积即为所求级数的和。我们很容易就能求出ABGE的面积

$S=(AC+CE)\times AB=80$

据此，可以求出ABDC的面积

$s=\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}(AC+CE)\times AB=40$

即所求级数的和为40。

由于AC+CE所表示的是级数的第一项和第五项的和，而AB表示的是级数总的项数。根据上面的计算过程，我们不难推断，

$S=\frac{1}{2}$(首尾两项的和)×(项数)，

也就是

$S=\frac{(\text{首项}+\text{末项})\times(\text{项数})}{2}$。

8.3 园丁的问题

［题］一块菜园有30个菜畦，每畦长为16米，宽为2.5米，园丁需要从离菜园边界14米远的一口水井中提水浇园。在浇水的过程中，园丁只能沿着地界走，所以每次提水，他都要绕着菜畦的边走一圈，而且每次提的水都只够浇一个菜畦。

假如路程的起点和终点都以水井为准，那么，园丁浇完整块菜园一共需要走多远的路?

［解］由题意知，园丁在浇第一个菜畦的时候，所走的路程是：

14＋16＋2.5＋16＋2.5＋14＝65米。

在浇第二个菜畦时，所走的路程是：

14＋2.5＋16＋2.5＋16＋2.5＋2.5＋14＝65＋5＝70米。

通过观察题目不难看出，浇后面每一个菜畦时所走的路程都比浇前一个菜畦时多5米。据此，我们可以得出这样一列级数：

65；70；75；……65＋5×29

根据公式，我们可以求出它各项的总和

$$\frac{(65+65+29\times5)30}{2}=4125\text{ 米}$$

所以，园丁要走 4125 米才能浇完整块菜园。

8.4 养鸡

［题］一个养鸡场为了养 31 只鸡，按照每只鸡每周一斗的食量贮存了一批饲料。本来假定鸡的数量保持不变。但实际上每周鸡的数量都会减少一只，结果储备的饲料支持了原定期限两倍的时间。

试问，储备的饲料共有多少？原本预计维持的时间是多长？

［解］设储备了的饲料的数量为 x 斗，预计维持的时间为 y 周，根据题意

$x=31y$。

由于每周鸡的数量都会减少一只，所以每周消耗饲料的数量都会减少 1 斗。也就是第一周消耗了 31 斗，第二周消耗掉了 30 斗，第三周消耗了 29 斗……，直到最后一周，这一周（$31-2y+1$）斗。

据此，我们可以列出如下等式：

$x=31y=31+30+29\cdots\cdots(31-2y+1)$。

利用级数的求和公式，可得：

$$31y=\frac{(31+31-2y+1)2y}{2}=(63-2y)y\text{。}$$

化简之后，得：

$31=63-2y$，

因此

$x=496$，$y=16$

所以储备的饲料的数量为 496 斗，原本预计维持的时间是 16 周。

8.5 挖沟所用的时间

［题］学校将高年级同学组成了一个挖土队，让他们负责在学校里挖一条沟。如果所有队员全部出勤，那么只需要 24 个小时，这条沟就可以完成。但是事实上一开始只来了一个人。后来每过一段固定的时间，就会有一个人加入进来，直到最后全组人到齐。经计算得知，第一个人工作的时间是最后来的那个人的 11 倍。那么最后来的那个人工作了多长的时间？

［解］我们用 x 来表示最后来的那个人工作的时间，那么第一个人工作的时间就是 $11x$。设挖土队全队的总人数是 y，那么全队人员工作的总时间就是一个首项为 $11x$，末项为 x 的 y 项递减级数的和，也就是

$$\frac{(11x+x)y}{2}=6xy$$

另外，我们知道，如果所有队员全部出勤，那么只用 24 个小时就能挖成沟。也就是，完成只需 24 小时。因此，

$6xy=24y$

y 是大于 0 的整数，所以我们可以把它从方程中约去。然后得到：

$6x=24$

所以

$x=4$。

可知，最后到的那个人只共走了 4 个小时。

这样，我们就解答出了题目中要求的问题。但是，如果题目要求我们求出挖土队的人数，我们是求不出来的。尽管方程中含有表示挖土队人数的未知数，但是由于所给的条件补充分，我们无法解出这个未知数的值。

8.6 卖苹果

[题] 一个小水果店的老板卖给他的第一位顾客他所有苹果的一半加半个；卖给他的第二位顾客剩下的苹果的一半又加半个：卖给他的第三位顾客的还是剩下的苹果的一半加半个……就这样一直卖下去，直到第七位顾客，买走了他所剩苹果的一半加半个之后，所有的苹果刚好都卖完。试问这家水果店原来共有多少苹果？

[解] 设这家水果店最初所有的苹果的数量为 x 。由此，我们可以推断出每位顾客所买的苹果的个数：

第一位顾客：

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2},$$

第二位顾客：

$$\frac{1}{2}(x-\frac{x+1}{2})+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^2}$$

第三位顾客：

$$\frac{1}{2}(x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{4})+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^3}$$

……

第七位顾客：

$$\frac{x+1}{2^7}$$

据此，我们可以列出如下方程：

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2^2}+\frac{x+1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{x+1}{2^6}+\frac{x+1}{2^7}=x$$

变形后，得：

$$(x+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots\frac{1}{2^7})=x,$$

计算后，得出：

$$\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{2^7},$$

所以

$$x=2^7-1=127$$

也就是说，水果店最初一共有 127 个苹果。

8.7 买马还是买钉子

[题] 在马格尼茨基的《算术》有这样一道非常值得玩味的题，大意如下：

有个人以 156 卢布的价格卖了一匹马。但是买主买完以后，又觉得买得不划算，要把马退还给卖主。

于是卖主提出了新的条件：“如果你觉得这马太贵，那就只买马蹄铁上的钉子吧，你如果肯买这些钉子，我就把马白送给你。每个马蹄上有 6 个钉子。第一个钉子的价格是 $\frac{1}{4}$ 戈

比，第二个钉子的价格 $\frac{1}{2}$ 戈比，第三个是 1 戈比，就这样一直计算下去。”

买主觉得这样的条件太好了，买这些钉子加起来也用不了 10 卢布，这简直就是白白得到了一匹马。没有经过太多的思索，买主便接受了卖主的条件，

问买主要花多少钱才能买下这些钉子？

［解］由题意可知，买下所有马蹄铁上的钉子所需要的钱的总数为

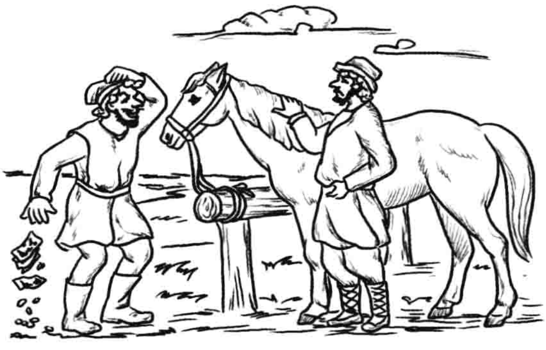


图 25

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{24-3}\text{ 戈比，}$$

也就是

$$\frac{2^{21}\times 2-\frac{1}{4}}{2-1}=2^{22}-\frac{1}{4}=419303\frac{3}{4}\text{ 戈比。}$$

这个数字接近 42000。也就是说，买下这些钉子一共需要的钱接近 42000 卢布。在这种情况下，卖主当然愿意白白把马送给他了。

8.8 战士的抚恤金问题

1795 年，俄国出版了一本有着长长的标题——《一本写给年轻人进行数学练习的纯数学教程，由研究炮兵学的教师施特科一容克尔和数学老师叶菲姆·沃依加霍夫斯基编写》的数学教材，这本教材中有这样一道题：

［题］在古代某国有这样一个规定：战士第一次受伤给 1 戈比的抚恤金，第二次受伤给 2 戈比的抚恤金，第三次受伤给 4 戈比的抚恤金，依此类推。如果有一个战士得到的抚恤金为 655 卢布 35 戈比，那么他一共受了多少次伤？

［解］根据题意我们可以列出方程：

$$65535=1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{x-1},$$

也就是：

$$65535=\frac{2^{x-1}\times 2-1}{2-1}=2^x-1,$$

即

$$65536=2^x,$$

所以

$$x=16$$

也就是说，这个战士一共受了 16 次伤，才得到了这笔抚恤金。我们很容易就能检验出这个结果是正确的。

第九章 第七种数学运算

9.1 第七种运算——求对数

前面我们曾经提到过，乘方有两种逆运算。现在，我们假设

$a^b = c$

那么，求 a 的值是一种乘方的逆运算——开方；而求 b 的值则是乘方的另一种逆运算——取对数。

发明对数的目的是为了使计算变得简单而迅速。

著名数学家拉普拉斯曾说："对数的发明，使原来需要几个月才能做完的计算工作，几天就能完成了。我们可以说对数把天文学家的寿命拉长了一倍。"他之所以提到天文学家，是因为天文学家经常要面对很多特别复杂的计算。但是他的这种说法其实是可以适用于所有必须和数字打交道的人的。

现在，我们对于对数已经非常习惯了，而且对于它在计算过程中给我们带来的便利也非常习以为常。所以，对于我们来说，想象它刚刚出现时所引起的巨大轰动是一件很难的事情。

关于对数的发明动机，对数表的发明者耐普尔曾经这样讲过："我要尽我的力量让大家摆脱繁重的计算工作，很多人由于厌烦数学计算而对学习数学失去了兴趣，我要让计算变得简单、轻松，这是非常有必要的。"

后来因发明十进制对数而扬名的布利格跟耐普尔是同时代的人。他在见到耐普尔的著作时，曾经写下这样一段话："耐普尔新颖而令人叹为观止的对数，坚定了我的决心，我要用脑和手进行工作。我希望今年夏天能够见到他，他的这本书是我至今读过的令我最惊奇也是最喜爱的一本书。"最终，布利格实现了他的愿望，他去苏格兰拜访了耐普尔。两人见面时，布利格说道：

"我长途跋涉来到这里，唯一目的就是想见到你，并且想知道，你提出对数这种妙不可言的方法是靠了什么样的聪明才智？它对于天文学来讲作用真是太大了，简直可以说是意义非凡。直到现在，我都想不明白，对数看上去如此简单，但是在你之前，为什么竟然没有人发现它？"

对数是一项如此伟大的发明。它使计算变得很容易，很快捷。对于像任意指数的开方这类计算来说，对数甚至是必不可少的。

如果你知道中学课程中关于对数的那些基本理论，那么，求下面表达式

$a^{\log ab}$

的值，对你来说应该不会有什么困难。

很容易理解，如果底数 a 的乘方的次数是 b 的对数，那么得到的表达式的值必然还是数 b 本身。

9.2 对数的“敌人”

在对数发明以前，人们为了加快计算的速度而发明了一种表。靠着这种表，乘法运算被减法而不是加法所代替。这种表格是根据恒等式

$$ab=\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{(a-b^2)}{4}$$

制作成的。我们只要把这个等式中的括号去掉，就能证明出它的正确性。

有了这种由各个数字的平方的四分之一所组成的表，我们要求两个数的乘积就可以不用实际去做乘法，而只需用这两个数和的平方的四分之一减去它们差的平方的四分之一。这种表使求平方和求平方根变得简单了许多。而且比起对数表，它有一个非常重要的优点，那就是根据这种表所得的结果是准确值而不是近似值。如果把这种表和倒数表结合起来使用的话，除法运算也会变得简单许多。

虽然这种表有很多优点，但是我们不能因此就说它比对数表强。因为在实用方面，对数表发挥的作用比它要强得多。例如，计算复杂的利息时我们就必须使用对数表，因为用四分之一平方表计算不了这么复杂的问题。四分之一平方表只是在计算两数的乘积时比较方便，而对数表却能让我们一次就求出任意多个数的乘积。同时，利用对数表，我们还能很容易地求出一个数的任意次方或者任意指数的方根。

尽管四分之一平方表不像对数表那样功能强大，但是即便是对数表出现之后，还是有许多各式各样的四分之一平方表被出版。1856 年，在法国出现了这样一张表格，它的标题是：

“一张从 1 到 10 亿的数字平方表，利用它你可以用非常简单的方法，以极快的速度算出两个数乘积的准确值。编制者——亚历山大·科萨尔。”

直到现在为止，还有许多人非常努力地试图编写一张四分之一平方表。他们并不知道这种表早在三百年前就有了，听说这个之后甚至觉得非常吃惊。

除了四分之一平方表之外，对数还有许多更为年轻的对手。它们就是各种技术参考书中的计算用表。这些表通常是一些综合性的表，它们通常包括以下几个部分：从 2 到 1000 的各数的平方、立方、平方根、立方根、倒数、圆周长、圆面积。这些表使那些技术方面的计算变得很简单，但是它们的应用范围却远没有对数表那样广泛。

9.3 “进化”中的对数表

以前，中学里使用的对数表都是 5 位的，但是现在中学已经改用 4 位对数表了。因为对于技术方面的计算，4 位对数表已经足够了。其实在现实中，日常的量度难得有三位以上的有效数字。所以，大多数情况下三位尾数就足以满足计算的要求了。

以前，很多人一直以为尾数越长越好。不久前，人们才意识到，其实不需要那么长的尾数。记得以前学校里使用的是 7 位对数表。这种对数表有很多卷，拿起来非常重。后来，在经历了一些激烈的斗争之后，人们用 5 位对数表代替了这种 7 位对数表。

通用对数表从多位尾数演进到更短的尾数经历了很长时间。最初，伦敦数学家亨利·布利格（1624 年）编写的对数表是 14 位的；几年后，荷兰数学家安·符拉克用他的 10 位

对数表取代了原来的 14 位对数表；再到后来，又出现了七位对数表……直到现在，我们用的 4 位对数表。通用对数表的演化其实至今也没有完成。因为直到现在，很多人还没有意识到计算的精确程度永远无法超越度量的精确度这个简单的道理。

在对数表逐步演进的过程中，最初人们认为尾数越变越短是不符合常理的。但是后来，人们意识到了尾数缩短所起到的重要作用：

首先，尾数缩短以后，对数表的篇幅变小了，携带起来更方便了。7 位对数表大开本也有大约 200 页，发展到 5 为对数表时，篇幅就减小到对开本 30 页了，后来发展到 4 位对数表时，篇幅减小到 5 位对数表的十分之一，大开本只需要两页就够了。

其次，缩短以后，相关的计算都变得更加快捷了，完成同一种计算，用五位对数表所需的时间只有七位对数表的三分之一。

所以，对数表的尾数缩短以后，使用起来比以前方便了许多。

9.4 对数中的“巨人”

3 位和 4 位对数已经完全能够满足实际生活和技术上的需要。但是，这并不代表位数多的对数表没有意义。对于理论研究的人来说，3 位或者 4 位的对数表是远远不够的。他们经常面对的对数表的位数甚至比布利格的 14 位还多得多。由于大多数对数是无理数，这也就意味着，无论用多少位数字我们都不可能把它准确地表示出来。对于大多数对数来说，虽然无论取多少位都只能是个近似值，但是随着尾数位数的增多，对数会越来越接近准确值。从这个角度来说，在很多情况下，14 位的对数表的精密度对于科学研究工作来说是远远不够的①。

从对数发明至今，已经有 500 种对数表先后问世。在这么多的对数表中，科研工作者总能找到符合他要求的。例如，法国的卡莱（1795 年）编写了从 2 到 1200 之间的各数的 20 位对数。而除此之外，对于范围较窄的一组数，它的对数表的位数会更多，这是对数中的一种奇观。

下面我们就来列举一些对数中的“巨人”，它们都不是常用对数，而是自然对数：沃尔佛兰姆的 10000 以下各数的 48 位对数表、沙尔普的 61 位对数表、帕尔克赫斯特的 102 位对数表。除了这些，还有一个称得上壮观的对数表，那就是亚当斯的 260 位对数。

亚当斯的 260 位对数其实并不是表，而只是 2，3，5，7，10 这五个数的自然对数和可以把将它们换算成常用对数的一个 260 位的换算因数。但是，神奇的是，有了这五个数的对数以后，我们就可以利用一点简单的加法或乘法计算出许许多多合数的对数来。例如，对于 15 的对数我们就可以这样来计算，它等于 3 和 5 的对数和。依此类推，我们还能求出其他许多合数的对数。

我们有理由在对数奇观里加进计算尺这种灵巧的计算工具。它在我们的日常生活中太过常见，我们对它过于熟悉，所以忽略了这种以对数为原理的工具的奇妙之处。很多使用计算尺的人甚至不知道什么是对数，这也是我们无法看出它的巧妙之处的原因之一。

9.5 速算专家的秘密

速算专家经常在大庭广众之下表演关于数字的惊人游戏，他们最擅长的莫过于我们下面要说的这种。你在看他们表演之前，从宣传海报看到，这个速算专家能够用心算出多位数的高次方根。为了考一考这位速算专家，你费了很大力气提前算出了一个数的 31 次方。

---

① 布利格的 14 位对数表只有 1～20000 和 90000～101000 各数的对数。

观看表演时，你找准时机向速算专家提问道：

“请你把下面这个 35 位数的 31 次方根求出来！我念，你写！“

你还没来得及开口念出第一个数字，速算专家已经拿起粉笔，写出了结果：13。

甚至还没有听你说完这是个什么数，他竟然已经给出了答案，用快如闪电的速度心算出 31 次方根，太不可思议了。你对速算专家的表现感到震惊，同时也觉得输得心服口服。

其实这里面是有一些玄机的。这个秘密其实非常简单：31 次乘方是有 35 位的数其实只有 13 这一个数。小于 13 的数的 31 次乘方不足 35 位；大于 13 的数的 31 次乘方又超过了 35 位。

这时，你一定很疑惑，速算专家是怎么知道这些的呢？他又是凭借什么求出 13 这个结果的呢？答案是对数。在他心中牢牢地记着前面 15 到 30 个数的 2 位对数。因为合数的对数等于它的素因数的对数的和这条法则的存在，所以要记住 15 到 30 个数的 2 位对数，并不像我们想象中的那么难。对于他们来说，只需要记住 2，3 和 7（$\log 5=\log \frac{10}{2}=1-\log 2$）的对数就能推断出前 10 个数的对数了。而要知道后 10 个数的对数，只需要再记住四个数的对数就可以了。

不管他用的方法是什么，这位速算专家首先做的就是在心里摆出下面的两位对数表：

真数	对数	真数	对数
2	0.30	11	1.04
3	0.48	12	1.08
4	0.60	13	1.11
5	0.70	14	1.15
6	0.78	15	1.18
7	0.85	16	1.20
8	0.90	17	1.23
9	0.95	18	1.26
		19	1.28

他前面所表演的让你非常震惊的数字游戏的关键之处就在于：

$$\log \sqrt[31]{(35\text{ 位数字})}=\frac{34.\cdots\cdots}{31}$$

因此，所求的对数的上下限就是 $\frac{34}{31}$ 和 $\frac{34.99}{31}$，也就是说，所求的对数在 1.09 和 1.13 之间，1.11 是这个范围内唯一一个整数的对数，它是 13 的对数。让你觉得非常吃惊的结果就这样被求了出来。当然，如果思维不够敏捷，或者技巧不够熟练，也不能以非常快的速度在心里算出这些。但是，从根本上来说，这件事非常简单。如果你不擅长心算，那么你可以在纸上试着玩一玩这个游戏。

例如，有人向你提出这样一个问题：求出一个 20 位数的 64 次方根。

没有必要问这个数是什么，你可以直接宣布开方的结果是 2。

其实没有什么玄妙的地方。因为 $\log \sqrt[64]{(20\text{ 位数字})}=\frac{19\cdots\cdots}{64}$，它的上限和下限分别为 $\frac{19}{64}$ 和 $\frac{19.99}{64}$，也就是 0.29 和 0.32。在这个范围内，整数的对数只有一个，那就是 2 的对数

0.30。

此时，你的同伴一定非常吃惊。这时，你还可以告诉他本来想要告诉你的那个数就是著名的“国际象棋”数字

$2^{64}=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616$，

这一定会让他更加吃惊。

9.6 公牛所需的热量

［题］饲料的“维持量”就是维持机体正常运转的所需的饲料的最低分量，它主要供应机体的热量消耗、内部器官活动、细胞新陈代谢等。饲料的“维持量”与动物身体的表面积是成正比的。明白了这一点以后，假设在同样的条件下，已知630千克重的公牛需要的热量是13500卡，那么我们就可以据此推断出420千克重的公牛的所需的最小热量。

［解］在这个问题中，我们除了用到代数以外，还要用到几何。设所求的最小热量为 x，420千克重的公牛身体的表面积为 S，630千克重的公牛身体的表面积是 S_1。由于消耗的热量与身体的表面积成正比，所以

$$\frac{x}{13500}=\frac{S}{S_1}$$

根据几何知识，我们知道，相似物体的表面积是和相应长度 l 的平方成正比而它们的体积是和相应长度的立方成正比的，同时又由于相似物体的质量和它们的体积成正比。所以我们可以列出下列等式：

$$\frac{S}{S_1}=\frac{L_1^2}{L_1^2}，\frac{420}{630}=\frac{L_1^3}{L_1^3}，即\frac{L_1}{L_1}=\frac{\sqrt[3]{420}}{\sqrt[3]{630}}$$

所以

$$\frac{x}{13500}=\frac{\sqrt[3]{420^2}}{\sqrt[3]{630^2}}=\sqrt[3]{(\frac{420}{630})^2}=\sqrt[3]{(\frac{2}{3})^2}$$

解得

$$x=13500\sqrt[3]{\frac{4}{9}}。$$

利用对数表，可以求出 x 的值：

$x=10300$。

也就是说，这头公牛的维持饲料产生的热量是10300卡。

9.7 音乐中的数学知识

音乐家大都对数学敬而远之，他们之中很少有对数学感兴趣的。但是音乐家们，甚至像普希金笔下从来没有“用代数检验过和声”的萨利埃里这样的音乐家和数学接触的机会都远远超出了他们的想象。而且更为关键的是，他们接触的还不是很简单的数学内容，而是非常“古怪”的对数。

我有一位喜爱弹钢琴但是数学学得一塌糊涂的中学同学。他非常讨厌数学，甚至曾用轻蔑的语气说，音乐和数学之间没有任何相通的地方。还说，毕达哥拉斯虽然找到了音乐的频率的比，但是他的音阶对于我们的音乐来说并不很适用。

对于这样一个固执地不愿承认音乐和数学之间存在关系的人，你可以想象，当他听我说他每次弹钢琴的时候实际上是在弹对数，他有多么震惊和不悦。

但是这却是一个事实。在所谓的等音程半音音阶中，各“音程”既不是按照音的频率

设置的，也不是按照音的波长等距离排列的，却是按照这些数量以 2 为底的对数进行设置的。

我们把最低的八音度称为零八音度，假如零八音度的 do 这个音调每秒钟振动的次数为 n 次，那么，第一个八音度的 do 一秒钟振动的次数也就是 2n 次，第二个八音度的 do 一秒钟振动的次数就是 4n 次。依此类推，第 m 个八音度的 do 一秒钟振动的次数就是 $n\cdot 2^m$ 。用 0 来表示每个八音度的 do，用 P 来表示钢琴的半音音阶中的任意一个音调。那么，同一个音阶中，sol 就是第 7 个音，la 就是第 9 个音。由于在等音程半音音阶中，一个音的频率是它前面那个音的频率的 $\sqrt[12]{2}$ 倍，所以，我们可以用下面这个公式

$$N_{pm}=n\times 2^m(\sqrt[12]{2})^p$$

来表示任意一个音的频率。这个公式的含义是，第 m 个八音度里的第 p 个音的频率。

对公式进行一些处理，可得：

$$\log N_{pm}=\log n+(m+\frac{p}{12})\log 2$$

假设最低音 do 的频率为 1，也就是令 $n=1$ ，而且把所有对数都看作以 2 作底的对数也就是令 $\log 2=1$ ，那么公式可以转化为：

$$\log N_{pm}=m+\frac{p}{12}$$

从这个式子中我们可以看出，钢琴琴键的号码就是它所对应的音调的频率的对数。m 是表示音调位于第几个八音度的数字，它是对数的首数；而 p 是表示音调在这个八音度中所占位置的数字，它是对数的尾数。

让我们以第三个八音度中的 sol 音为例来解释一下。代入公式可得，sol 音的频率为 $3+\frac{7}{12}$（≈ 3.583），在这个表达式中，数字 3 表示的是这个音调的频率的用 2 做底的对数的首数，而数字 $\frac{7}{12}$（≈ 0.583）表达的是这个音调的频率用 2 做底的对数的尾数。所以说，这个 sol 音的频率应该是最低八音度中 do 音频率的 $2^{3.583}$ 倍，也就是 11.98 倍。

这是一位物理学家文章里的一段话。这段话很明确地告诉了我们音乐与数学之间密不可分的关系。以后，谁再说音乐跟数学没有丝毫相同的地方，你就可以把这些知识告诉他了。

9.8 恒星、噪声、对数

这个标题看起来有些奇怪，因为它把看起来完全不相干的东西放在了一起。在这里我们并不是要模仿谁或者是玩一个文字的游戏，而是要告诉大家，恒星和噪音都与对数有着十分密切的关系。无论是噪音的音量还是恒星的亮度，都是用对数这一标尺进行量度的。

依据视觉辨别出来的亮度，天文学家把恒星分成了一等星、二等星、三等星等不同的等级。按照等级的大小连续排列的恒星对于我们的肉眼来说，就像算术中的各项级数。但是它们的客观亮度，也就是物理亮度却不是按照算术级数来变化的。它们的客观亮度构成了一个几何级数，这个几何级数的公比为 $\frac{1}{2.5}$ 。也就是说，恒星的“等级”其实就是它客观亮度的对数。天文学家在确定恒星亮度的时候，依据的是一种底数为 2.5 的对数表。据此，我们可以推断出，一等星会比三等星亮 $2.5^{(3-1)}$ 倍，也就是 6.25 倍。对于存在于天体之间的这些有趣关系，我曾在我的《趣味天文学》一书中做了比较详尽的讲解。

日常生活中，我们总是在面对各种各样的噪声：工厂中机器运转的声音；马路上汽车

的鸣笛声；飞机飞过头顶时的隆隆声……响度太高的噪声会对人们的日常生活和工作产生非常不好的影响。这也是人们想尽办法要表示出声音响度的原因。在声学中，“贝尔”是用来表示声音响度的单位，但是在平时的日常工作中，我们经常使用的却是“分贝”，1 贝尔相当于 10 分贝。将不同音量的噪音按顺序依次排列起来：1 贝尔，2 贝尔，3 贝尔……对我们的耳朵来说就像一个算术级数。但是，这些噪音的“强度”所构成的却并不是一个真正的算术级数。它实际上构成的是一个公比为 10 的几何级数。也就是说，当两种噪音的响度差是 1 贝尔的时候，响度较大的那个噪音的强度实际上是另一个噪音强度的 10 倍。噪音的音量用贝尔来表示时，它的值其实刚好等于它强度的常用对数。

为了更容易地理解这其中的关系，下面我们就来举几个例子。

树叶的沙沙声是 1 贝尔，大声说话的声音是 6.5 贝尔，狮子的吼叫声是 8.7 贝尔。根据题意我们可以知道，大声说话时所发出的声音的强度是树叶沙沙声的

$10^{(6.5-1)}=10^{5.5}=316000$ 倍；

而狮子吼叫时所发出的声音的强度是大声说话时所发出的声音的强度的

$10^{(8.7-6.5)}=10^{2.2}=158$ 倍。

通常，我们认为超过 8 贝尔的噪音会对人的机体造成伤害。锤子击打钢板时产生的噪音高达 11 贝尔，所以很多工厂的噪音其实都超过了 8 贝尔。这些噪音通常要比我们可以忍受的标准强 100 倍，甚至 1000 倍，这种强度甚至比尼亚加拉大瀑布最喧闹的地方（9 贝尔）还要强 10 倍或者 100 倍。

通过判断恒星的亮度和确定噪音的强度，我们发现了存在于感觉的数量和产生这些感觉所需的刺激的数量之间的一些关系。这些关系的存在显然并非偶然。它们都符合费赫纳尔心理物理学的一条定律，也就是，感觉的数量与刺激的数量的对数成正比例关系。

由此，我们也可以看出，对数甚至已经进入到了心理学的领域。

9.9 灯泡中的对数

[题] 在灯丝所用的金属材料相同的情况下，充气灯泡发出的光要比真空灯泡发出的光亮得多。产生这种现象的原因就是在这两种灯泡中，炽热灯丝的温度是不一样的。依照物理学定律，白炽物体放射的光线总量与在绝对温度（从-273℃起算的温度标准）下物体温度的 12 次方成正比例关系。让我们按照这个定律来算一下下面这道题：在绝对温度下，求一个灯丝温度是 2500 度的充气灯泡所放射出来的光线要比另外一个灯丝温度为 2200 度的真空灯泡放射出来的光线强多少倍？

[解] 用 x 来表示所求的比例，根据题意可以列出下面等式：

$x=(\frac{2500}{2200})^{12}=(\frac{25}{22})^{12}$，

经过转化，得：

$\log x=12(\log 25-\log 22)$

解得：

$x=4.6$

也就是说，在绝对温度下，灯丝温度为 2500 度的充气灯泡放射出的光线要比灯丝温度为 2200 度的真空灯泡放射出来的光线强 4.6 倍。如果这只真空灯泡发出 50 支蜡烛发出的光线，那么这只充气灯泡发出的光线就相当于 230 支蜡烛发出的光线。

[题] 让我们再来做另外一个计算：要把电灯的亮度提高一倍，那么用百分比表示的话，应该把灯丝的绝对温度提高多少？

[解] 根据题意，我们可以列出如下：

$(1+\frac{x}{100})^{12}=2$

经过变换，得：

$\log(1+\frac{x}{100})=\frac{\log 2}{2}$

解得：

$x=6\%$

也就是说，为了使电灯的亮度增加一倍，我们应该把灯丝的温度提高 6 %。

［题］第三个问题：在绝对温度下，我们如果把灯丝的温度提高 1%，那么它的亮度将会增加多少？

［解］设它的亮度增加的量为 x，那么

$x=1.01^{12}$

借助对数表，得出

$x=1.13$，

也就是亮度增加的量为 13%。

利用相似的方法，我们还可以计算出：当温度提高 2%时，亮度会增加 27%；当温度提高 3%时，亮度会增加 43%。

看了以上这些题目我们就会明白电灯泡制造工业为什么把提高炽热灯丝的温度看得那么重要了，因为灯丝的温度提高哪怕一二度，都会对灯泡的亮度产生非常大的影响。

9.10 富兰克林的遗嘱

很多人都听说过国际象棋发明者索要奖赏的故事。在这个故事中，他索要的麦粒的数目是由 1 用 2 累乘之后得出的：棋盘第 1 格要 1 粒麦子，第 2 格要 2 粒麦子，就这样，后面每一格中的麦子的数量都是前一格中的 2 倍，直到第 64 格也就只最后一格为止。这个数字庞大得惊人。

实际上，不要说用 2 累乘，即使用的是小得多的数，数目增长得也快得出乎意料。例如对于利息为 5%的一笔存款，每年它的总数都会增加到原来的 1.05 倍。这似乎并不是什么很快的增长速度，但是，经过足够长的时间之后，这笔钱就能达到让我们吃惊的数目。美国著名政治家本杰明·富兰克林的遗嘱就是这样一个非常有趣的例子。它的基本内容如下：

“现在，我把一千英镑赠给波士顿的居民。他们如果接受这项捐赠的话，就把这笔钱托付给一些大家都信得过的人，让他们负责将这钱借给一些年轻的手工业者们去生息（这时美国还没有信托机构），利率按照每年百分之五来计算。100 年之后这笔钱的数目就会增加到 131000 英镑。这个时候，我希望用 100000 英镑在波士顿建造一座公共建筑物，然后把剩下的 31000 英镑作为本金，继续生息 100 年。到了第二个 100 年结束的时候，这笔钱的总数目将达到 4 061000 英镑。这时候，我希望把 1061000 英镑留给波士顿居民使用，而把剩下的 3 000000 英镑交给马萨诸赛州的公众来管理。这次分配完之后，这些钱再怎么处理我就不再管了。”

只留下了一千英镑的遗产，富兰克林却把处置几百万英镑的计划都列出来了。这不是痴人说梦，他的想法完全是现实的。通过计算我们就能证实出来。

我们可以计算一下，设富兰克林留下的 1000 英镑 100 年之后变成了 x 英镑，那么

$x=1000\times1.05^{100}$。

利用对数可以计算出：

$\log x = \log 1000 + 100\log 1.05 = 5.11893$,

解得：

$x = 131000$

与富兰克林自己计算的结果。然后，设 31000 英镑经过 100 年之后变成了 y 英镑，那么

$y = 31000 \times 1.05^{100}$

利用对数，求得：

$y = 4076500$,

与遗嘱中所写的数字也相差不大。这就说明富兰克林遗嘱中所表达的想法是完全可以实现的。

作为练习，你还可以做一下下面这道萨尔蒂科夫·谢德林所写的《戈洛夫廖夫老爷们》中的题目：

“坐在自己办公室里的波尔菲里·符拉基米洛维奇埋头在一张张纸上计算着。他被一个问题所困扰，那就是如果妈妈把自己出生时爷爷给的那一百卢布以他的名义存入当铺的话，他现在应该有多少钱？他计算出的结果并不算多：总共 800 卢布。”

现在，我们假设波尔菲里算这笔账时有 50 岁，并且认为他的计算没有错误。那么，动手计算一下，当时当铺的利率是多少吧。

9.11　存款的利息问题

我们存款的利息每年会被银行归并到本金中去。经过这样的归并，可以生息的本金的数额就增大了，这也是为什么随着归并次数的增多，钱数增加的速度也变得越来越快的原因。现在，让我们来举一个简单的例子：假如有一笔 100 卢布的存款，银行的年利率为 100%。如果到年终银行才会把利息并入本金，那么到年终的时候，去取这笔钱的话，就能取出 200 卢布。而如果每过半年，银行就会将利息并入本金，那么，半年后，100 卢布就会变成

100 卢布×1.5=150 卢布。

到一年结束时，这笔钱就变成了：

150 卢布×1.5=225 卢布。

我们把归并的期限定为 4 个月，那么到年底时，100 卢布的存款会变为：

100 卢布 $\times (1\frac{1}{3})^3 \approx 237.03$ 卢布。

把归并利息的期限分别设为 0.1 年，0.01 年，0.001 年……，那么一年后这笔存款分别变为：

100 卢布 $\times 1.1^{10} \approx 259$ 卢布 37 戈比。

100 卢布 $\times 1.01^{100} \approx 270$ 卢布 48 戈比。

100 卢布 $\times 1.001^{1000} \approx 271$ 卢布 69 戈比。

从上面计算出的结果我们可以看出，随着归并期限的缩短，总金额一直在增加。那么，如果我们把归并的期限无限缩短，得到的总金额是不是也会无限地增加呢？答案是否定的。用高等数学的方法我们可以证明，随着归并期限的缩短，得到的总金额会达到一个极限，这个极限的值大约等于 271 卢布 83 戈比。无论把归并期限缩短到什么程度，总金额也不会超过最初本金的 2.7183 倍。

9.12　神奇的数“e”

前面我们说，无论把归并利息的期限缩短到什么程度，最终所得的总金额也不会超过

本金的 2.7183 倍，2.718……是一个神奇的数字，它在高等数学中所起的作用非常大，甚至不亚于那些著名的数字。它是一个代号为“e”的无理数，不能用有限位的数字准确地表示出来，要表示出它，只能利用下面的式子：

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\cdots$$

这个式子表示的是它的近似值，可以精确到任意程度。

根据前面我们所讲的存款按复利方式增长的例子，我们很容易就能发现，数 e 其实是式子

$$(1+\frac{1}{n})^n$$

当 n 无限增大时的极限。

由于很多我们无法一一详述的理由，把数字 e 作为对数的底非常合适。这种以 e 为底数的对数表，也就是自然对数表已经存在，并且在科学和技术中被广泛应用。我们之前所讲的那些 48 位、61 位、102 位和 260 位的对数巨人就是用数字 e 作为底数的。

数字 e 经常会出现在让人意想不到的地方。例如下面这道题目：

把数字 a 分成若干部分，怎样分，各部分的乘积最大？

我们前面证明过，如果几个数的和不变，那么要使它们的乘积最大，只需要使各个数相等就可以了。据此，我们可以分析出，要想使各部分的乘积最大，数 a 应该分成相等的几份。但是，究竟应该分成几份呢？两份，三份，还是十份？

利用高等数学的方法我们可以证明，分成多少份是由数 a 的大小决定的。当所分的每份和数 e 最接近时，乘积能达到最大。

例如，当我们求 10 应该分成多少份时，就应该这样计算：

$$\frac{10}{2.718\cdots\cdots}=3.678\cdots\cdots$$

结果是 3.678……，但是把一个数分成 3.678……等份显然是无法做到的。因此我们应该取最为接近的 3.678……的整数——4 作为答案。也就是说，当我们把 10 分成 4 份时，所得的各部分的乘积最大。这是，各部分都等于 2.5，乘积就是 $(2.5)^4=39.0625$ 。

我们可以来验证一下，当把 10 等分成 3 份或 5 份，所得的乘积分别为：

$(\frac{10}{3})^3=37$ ，$(\frac{10}{5})^5=32$ 。均小于分成 4 份时所得的乘积。

用同样的方法我们还可以求出，当把数 20 分成 7 等份时，各部分的乘积达到最大；把数字 50 分成 18 等份时，各部分的乘积达到最大；把 100 分成 37 等份时，各部分的乘积达到最大。因为

$20\div 2.718\cdots\cdots=7.36\approx 7$

$50\div 2.718\cdots\cdots=18.4$

$100\div 2.718\cdots\cdots=36.8$ 。

除了这些之外，数字 e 在数学、物理学、天文学和其他很多研究领域都发挥着非常重要的作用。当我们用数学的方法对下面所列举的这些问题进行分析时，就必须要用到数字 e：

物体冷却的规律，

气压公式（气压随高度变化而变化），

放射性衰变和地球的年龄，

欧拉公式，

空气中摆针的摆动，