高等数学方法

孙建泉 编

南京航空航天大学

前　言

高等数学是大学理工科学生必须掌握的重要基础知识，对于学习专业以及工作后进修与从事研究工作都有极大的影响。在教学传统上，高等数学课程是按一元函数微分学、积分学；多元函数微分学、积分学；级数；常微分方程等专题系统讲述的。有些学生学完该课程之后，往往不重视对高等数学方法的条理化，以致于只注意了局部而忽视了整体，缺乏对高等数学方法的系统性了解。他们常常孤立地对待个别概念与个别方法，忽视对诸概念、诸方法间内在联系的探讨；因而不善于利用微积分方法解决后续课程以及工作实践中的有关问题。

为了使学过高等数学的学生更深刻地理解与更系统地掌握高等数学中的方法，提高用微积分的思想方法分析问题和解决问题的能力，特别是解决高等数学问题的能力；以及适当扩大知识面提高数学修养水平，从而为进一步提高打下坚实的基础，根据兄弟院校的经验和我校的实际，我们开设了这门选修课—高等数学方法，作为高等数学的后续课程。

如果说高等数学课是以块块为"面"横向展开论述的话，那么可以说高等数学方法是以条条为"线"纵向归纳讲解的，并侧重于方法这个侧面。因此本课程的体系与一般高等数学课程有所不同，而且把一元函数与多元函数统在一起，旨在充分体现"以方法为主"、"以条条为线"的特点。

本教材包括五章，即高等数学的基础方法，微分学方法，积分学方法，无穷级数方法以及常微分方程的解法。每一章分若干节；每一节介绍相对独立的一套方法，如"一元函数微分法"，"定积分法"等等。每一节开始一般有一段前言，概括有关理论与方法。然后再分若干类型举例说明。例题的选择多以中等偏上程度为起点，逐步提高深入；注意体现工科特点；着重典型，兼顾多样；注意方法的归纳与综合运用；适当注意一题多解。

全书约有500个例题。其中包括近数年（1987－1994）研究生入学试题中较典型的题，以及本科生试题库中的部分较难题，还有少数数学竞赛题。此外还备有习题约150个，供学生练习用。

本书除供学过高等数学的二、三年级学生作选修课教材外，还可供报考硕士研究生的读者作为复习资料。

郝俊生副教授审阅了全部书稿，并提出了一些改进意见。理学院与教务处领导对本书的编写工作给予了热情的支持。编者向他们表示衷心感谢。

限于水平，书中可能有不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者　　一九九五年三月

目 录

第一章　高等数学的基础方法

高等数学包括微分学、积分学、级数、常微分方程以及空间解析几何五个部分。函数、极限与连续则是前四部分的共同基础；而空间解析几何又与向量代数密切相关。本章介绍与这些基础内容有关的主要方法及应用，并统称为高等数学的基础方法。

§1　函数定义域的求法与函数符号的运算法

函数是高等数学的研究对象。函数概念中包含定义域与函数关系（亦称对应规律）两个要素。这里仅就定义域的求法与函数关系的确定及函数符号的运用这两个主要问题，结合例题介绍一些典型的解题方法。

1．定义域的求法

函数定义域可分为实际定义域与自然定义域两种。实际定义域，即由实际问题所确定的函数的定义域。求这种定义域时，不仅要注意数学运算的要求（例如：分母不为零，负数不能开平方，正数才能取对数等），而且还要注意函数所表示的实际意义。例如将一个边长为10厘米的正方形纸片剪一个半径为 r 的圆，则此圆的面积S是半径 r 的函数：$S=\pi r^2$，其实际定义域为 $r\in(0, 5$ 厘米$)$。自然定义域，即无具体意义的函数的定义域，它只需由数学运算确定。例如，函数 $y=x!$ 的定义域为 $x\in N$；函数 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 等等。

自然定义域的求法主要是解关系式或关系式组。

例1　已知函数 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$ 的值域为 $(-\infty, 0]$ 和 $[4, +\infty)$，求此函数的定义域。

解　首先，由 $\dfrac{2x-5}{x-3}\leq 0$ 知

$$\begin{cases} x-3>0 \\ 2x-5\leq 0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x-3<0 \\ 2x-5\geq 0 \end{cases}$$

解得

$$\frac{5}{2}\leq x<3$$

其次，由 $\dfrac{2x-5}{x-3}\geq 4$ 知

$$\begin{cases} x-3>0 \\ 2x-5\geq 4(x-3) \end{cases} \text{或} \quad \begin{cases} x-3<0 \\ 2x-5\leq 4(x-3) \end{cases}$$

解得
$$3<x\leq\frac{7}{2}$$

所以，此函数的定义域为 $\left[\frac{5}{2}, 3\right) \cup \left(3, \frac{7}{2}\right]$。

例 2　已知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求复合函数 $f(f(f(x)))$ 的定义域。

解　由 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$f(f(x))=\dfrac{1}{1+f(x)}$，$f(f(f(x)))=\dfrac{1}{1+f(f(x))}$

知，
$$x\neq-1,\quad f(x)\neq-1,\quad f(f(x))\neq-1。$$

求关系式组

$$x\neq-1,\quad \frac{1}{1+x}\neq-1,\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}\neq-1$$

的解，得 $x\neq-1$，$x\neq-2$，$x\neq-\dfrac{3}{2}$。因此函数的定义域为

$$(-\infty,-2)\cup\left(-2,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2},-1\right)\cup(-1,+\infty)$$

例 3　求参数方程

$$x=t^2-2t-3,\quad y=\frac{1}{t}\quad(t\leq1)$$

所确定的函数 $y=f(x)$ 的定义域。

解　首先由所给参数方程知 $t\leq1$ 且 $t\neq0$。

其次，再由

$$x=t^2-2t-3=(t-1)^2-4\quad(t\leq1\text{且}t\neq0)$$

知　$x\geq-4$　且　$x\neq(0-1)^2-4=-3$

所以该函数的定义域为 $[-4,-3)\cup(-3,+\infty)$。

例 4　求 $Z=\ln[x\ln(y-x)]$ 的定义域。

解　按题意须 $x\ln(y-x)>0$，若 $x>0$，则须 $\ln(y-x)>0$，即

$$\begin{cases} x>0; \\ y>x+1; \end{cases}\qquad (1)$$

若 $x<0$，则须 $\ln(y-x)<0$，即
$$\begin{cases} x<0, \\ x<y<x+1 \end{cases}\qquad (2)$$

故函数的定义域为（1）与（2）所确定的区域。

2. 函数符号的运用与函数关系的确定

函数符号代表了函数关系中的因变量与自变量的对应规律。当函数用公式表达时，函数符号就表示对自变量施行的运算。但在不少情况下，函数关系并未明确地给出，而是给出某些条件，我们需从这些条件中确定函数关系。请看下面的例子。

例5　已知 $f\left(\frac{x+3}{x-1}\right)=x+6$，求 $f(x)$。

解　令 $\frac{x+3}{x-1}=t$，则 $x=\frac{t+3}{t-1}$。代入原式得

$$f(t)=\frac{t+3}{t-1}+6=\frac{7t-3}{t-1}$$

所以

$$f(x)=\frac{7x-3}{x-1}$$

例6　已知 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$。

解　令 $x+y=u$，$\frac{y}{x}=v$，则 $x=\frac{u}{1+v}$，$y=\frac{uv}{1+v}$

代入原式得

$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=u^2\cdot\frac{1-v}{1+v}$$

故

$$f(x,y)=x^2\frac{1-y}{1+y}$$

从以上二例可以看出，采用适当的变量代换是确定函数关系的一种有效途径。以下二例则应用了复合函数的概念。

✓例7　设 $\phi(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ 1, & x\geq 0,\end{cases}$　$\psi(x)=\begin{cases}\sin x, & x\geq 1\\ 0, & x<1,\end{cases}$　求 $\psi(\phi(x))$

解　显然　$\psi(\phi(x))=\begin{cases}\sin\phi(x), & \phi(x)\geq 1\\ 0, & \phi(x)<1\end{cases}$

由 $\phi(x)\geq 1$ 可推得 $x\geq 0$ 或 $x\leq -1$，由 $\phi(x)<1$ 可推得 $-1<x<0$。所以最后得

$$\psi(\phi(x))=\begin{cases}\sin x^2, & x\leq -1\\ 0, & -1<x<0\\ \sin 1, & x\geq 0\end{cases}$$

例8 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，记 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}_{n个f}$，求 $f_n(x)$。

解 由题设知 $f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，

$$f_2(x)=f(f(x))=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

运用数学归纳法可知，对一切自然数n，有

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

最后再看一个例子。

例9 若函数 $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的图形关于直线 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$ 均对称，则 $f(x)$ 为周期函数。

证 由于 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $x=a$ 与 $x=b$ 对称，因此有

$$f(x)=f(2a-x) \qquad (3)$$

$$f(x)=f(2b-x) \qquad (4)$$

故知 $f(2a-x)=f(2b-x)$，而 $(2b-x)-(2a-x)=2(b-a)$

应用(3)、(4)，有

$$f(x+2(b-a))=f(2b-(2a-x))=f(2a-x)=f(x)$$

由此可知，$f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数。

§2 函数极限的求法

回顾高等数学的内容，可以发现极限自始至终贯穿于整个课程之中。连续性、导数、定积分、级数以及多元函数的偏导数、重积分、曲线积分与曲面积分等概念，都是借助于极限的概念得以抽象化、严密化的。因此，可以毫不夸张地说，极限概念是微积分的基础，是高等数学中的基本推理工具，没有极限概念就没有高等数学的严密结构。

仔细分析连续性、导数、定积分及级数等概念，可以领悟到，在从常量到变量，从有限到无限，即从初等数学到高等数学的过渡中，极限的概念与方法是怎样起着关键性的作用的。另一方面，研究这些概念的性质，发掘这些概念、方法之间的内在联系，又为求解某类极限问题提供简捷的方法，从而开拓了求极限的途径。

极限的定义给出了极限概念的实质，但并没有提供求极限的方法，只是给出了证明极限的依据。

极限的两个存在准则只是给出了极限存在的定性分析，而没有给出极限的定量估计。但它们仍有巨大意义，特别是由这两个准则导出的两个重要极限为人们提供了求一类极限问题的方法。

极限的四则运算法则与复合函数的极限法则在极限运算中起了很大的作用。

罗必塔法则是将求导运算引入极限运算，使得某类未定式的极限问题得以解决的有效方法。

在这一节，我们将求极限的常见方法概括并举例说明如下：

*1．利用初等变形求极限

某些极限，乍一看来是"未定式"或者无法直接运用极限计算的基本公式，但只要适当的变形，极限即可求出。

例1　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$。

解　这是"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式极限，而且用罗必塔法则无法求出其极限。但若分子、分母同除以x，问题即可解决。即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\sin x}{x}}=1$$

例2　求$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$。

解　由于　$\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-\pi n)$

$$=\sin^2\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}\pi$$

$$=\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}=\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$$

$$=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

例3　求$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$。

解　这是n个因子乘积的极限，而$n\to\infty$，故不能运用乘积的极限运算法则。但由三角函数公式知

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\frac{2\sin\frac{x}{2^n}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\frac{2\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^2\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\cdots\cdots=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

于是
$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{\sin x}{x}\lim\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$

$=\dfrac{\sin x}{x}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$

例4　求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\underbrace{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n个2}}$。

解　由
$$\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$$

推得
$$\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^2}}=2\cos\frac{\pi}{2^3}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^3}}=2\cos\frac{\pi}{2^4}$$

依此类推得
$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{(n-1)个2}=2\cos\frac{\pi}{2^n}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}=\lim\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}=0$$

例5　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln 3(e^{x}+e^{-x}))$。

解　这是“$\infty-\infty$”型未定式极限，但适当变形并利用对数性质可化为定式极限。

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}(\ln e^{x}-\ln 3(e^{x}+e^{-x}))$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^{x}}{3(e^{x}+e^{-x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1}{3(1+e^{-2x})}=\ln\frac{1}{3}$$

最后一步应用了复合函数求极限的法则。

例6　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}\cdots\cdots\frac{2^{2^{(n-1)}}+1}{2^{2^{(n-1)}}}\right)$。

解　与例3类似，这是n个因子乘积的极限，必须设法化为有限个因子的乘积才能运用极限的运算法则。由于

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}\cdots\cdots\frac{2^{2^{(n-1)}}+1}{2^{2^{(n-1)}}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2}}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^{(n-1)}}}\right)$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2}}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^{(n-1)}}}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2^{2}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2}}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^{(n-1)}}}\right)$$

$$=\cdots\cdots=2\left(1-\frac{1}{2^{2^{n}}}\right)$$

于是

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{2^{2^{n}}}\right)=2$$

例7　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^{2}}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n}}\right)$。

解　同上不能直接运用极限运算法则。为此，记

$$x_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$$

则 $$\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

相减得 $$\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

于是 $$原式=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)=3$$

例 8 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$。

$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$
$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$
$\cos a+\cos b=2\cdot\cos\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$
$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$

解 利用三角函数和差化积公式，有

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=0$$

这最后一步运用了“有界函数与无穷小量之积仍为无穷小量”这一性质。

***2. 利用变量代换求极限**

有些极限，如果对某部分表达式作适当的变量代换，使极限形式变形，不仅书写简便，而且计算也变容易了。

✓例 9 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n(1-x^{\frac{1}{n}})\quad(x>0)$。

解 令 $1-x^{\frac{1}{n}}=t$，即 $x^{\frac{1}{n}}=1-t$，等式两端取对数得

$$\frac{1}{n}\ln x=\ln(1-t)，即\quad n=\frac{\ln x}{\ln(1-t)}$$

当 $n\to\infty$ 时，$t\to0$。代入原式得

$$\lim_{n\to\infty}n(1-x^{\frac{1}{n}})=\lim_{t\to0}\frac{t\ln x}{\ln(1-t)}$$

$$=-\ln x\lim_{t\to0}\frac{-t}{\ln(1-t)}=-\ln x$$

这里运用了$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1$这一结果。

✓例10 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$ 。

解 令$x=t+1$，则当$x\to 1$时，$t\to 0$，且

$$\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}=\frac{m}{1-(1+t)^m}-\frac{n}{1-(1+t)^n}$$

$$=\frac{n}{nt+\dfrac{n(n-1)}{2!}t^2+\cdots+t^n}-\frac{m}{mt+\dfrac{m(m-1)}{2!}t^2+\cdots+t^m}$$

$$=\frac{nt\left[m+\dfrac{m(m-1)}{2!}t+\cdots+t^{m-1}\right]-mt\left[n+\dfrac{n(n-1)}{2!}t+\cdots+t^{n-1}\right]}{t^2\left[n+\dfrac{n(n-1)}{2!}t+\cdots+t^{n-1}\right]\left[m+\dfrac{m(m-1)}{2!}t+\cdots+t^{m-1}\right]}$$

$$=\frac{\dfrac{mn(m-n)}{2}t^2+\cdots+(nt^m-nt^n)}{t^2\left[mn+\dfrac{n(n-1)+m(m-1)}{2}t+\cdots+t^{m+n-2}\right]}$$

于是 $$\lim\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{mn(m-n)}{2}t^2+\cdots+(nt^m-mt^n)}{t^2\left[mn+\dfrac{n(n-1)+m(m-1)}{2}t+\cdots+t^{m+n-2}\right]}$$

$$=\frac{m-n}{2}$$

***3. 利用两个重要极限求极限**

两个重要极限，即

(Ⅰ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ (或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$)

式中的x可推广为$u(x)$。

例 11　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos kx}{x^2}$（$k$ 为正整数）。

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{kx}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{k^2}{2}\left(\frac{\sin\frac{kx}{2}}{\frac{kx}{2}}\right)^2=\frac{k^2}{2}$$

例 12　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$。

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(1-\cos x+\cos x-\cos x\cos 2x+\cos x\cos 2x-\cos x\cos 2x\cos 3x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\cos x\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(1+4+9)=7$$

最后应用了上题的结果。

例 13　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}+\dfrac{x^2}{2n^2}\right)^{-n}$　$(x\neq 0)$。

解　这是“1^∞”型未定式极限，将其配成（Ⅱ）的形式，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}\right)^{-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{\frac{2n^2}{2nx+x^2}}\right]^{\frac{2nx+x^2}{2n^2}(-n)}$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{\frac{2n^2}{2nx+x^2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2nx+x^2}{-2n}\right)}=e^{-x}$$