现代远程教育系列教材

高等数学

下

Advanced Mathematics

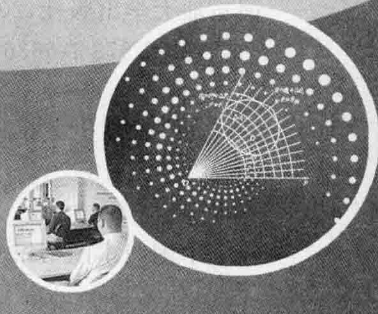
主编 亓 健

（第2版）

内附光盘

中国石油大学出版社

现代远程教育系列教材



高等数学

下

（第2版）

主编　亓　健
编者　朱东鸣　苏维钢　郑神州
　　　王　静　吴瑞华　冷英华

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下/亓健主编.—2版.—东营:中国石油大学出版社,2012.3
ISBN 978-7-5636-3663-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①亓… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第055687号

书　　名:高等数学(下)
主　　编:亓　健
编　　者:朱东鸣　苏维钢　郑神州　王　静　吴瑞华　冷英华

责任编辑:袁超红
封面设计:七星工作室

出 版 者:中国石油大学出版社(山东 东营　邮编 257061)
网　　址:http://www.uppbook.com.cn
电子信箱:shiyoujiaoyu@126.com
印 刷 者:沂南县汇丰印刷有限公司
发 行 者:中国石油大学出版社(电话 0532—86981532,0546—8392563)
开　　本:185 mm×260 mm　印张:15　字数:379千字
版　　次:2012年4月第2版第1次印刷
定　　价:32.00元(含光盘)

出版说明

现代远程教育试点工作开展以来，开发适合我国远程教育培养目标、体现远程教育学习者学习特点、采用现代化的培养手段且便于教育机构和学生共享的学习资源一直是试点院校关注的问题。为促进教育资源的共建共享，中国石油大学（华东）远程与继续教育学院、北京交通大学远程与继续教育学院、福建师范大学网络教育学院、西南科技大学网络学院及北京网梯科技发展有限公司共同组建了“网络教育教学资源研发中心”。“现代远程教育系列教材”就是由以上单位合作组织编写的。

“现代远程教育系列教材”力图体现以下特点：

❖ 文字教材和数字化教学资源统筹考虑；

❖ 适应远程教育学生的学习特点，方便学生的自主学习；

❖ 教学内容适合应用型人才的培养目标；

❖ 多所高校长期从事一线教学工作的教师及资深专家共同编写，确保教材的高质量、高水平；

❖ 实现远程教育教学资源的共建共享。

期望本系列教材将成为远程教育学生的好帮手！

现代远程教育系列教材编委会

2008 年 12 月

前言

● PREFACE ●

考虑到远程(网络)教育学习者多为在职人员及以自主学习为主的特点，本书编写过程中在尽量保持本学科的科学性和系统性的前提下，努力体现“以应用为目的，以够用为度”的原则。在结构设计上，本书以学习者为中心，将本课程中最基本的内容提炼整理出来，以“单元”的形式安排学习。每章的开篇总结了学习目的、学习要求、重点难点、知识要点等内容，便于学习者合理制订自己的学习计划；每章的结尾部分列出了内容提要、疑难解答和典型例题等内容，便于学习者系统回顾本章知识并加深理解和应用。对于难点问题，给出“注意”，引导学习者对抽象复杂的数学问题加深理解。书中在每个“学习单元”给出了适度的问题，以便学习者检查自己对基本问题的掌握情况。本书配有学习光盘，可进一步方便学习者学习课程内容。

本书共分为 11 章，分上、下两册。上册包括前 6 章，内容为一元函数微积分和常微分方程等，可供专科及对数学要求不高的专业选用；下册包括后 5 章，内容为多元函数微积分和级数等，可供高起本及对数学要求较高的专业选用。

本书由中国石油大学(华东)亓健统稿。其中，第 1、第 2、第 3 章由西南科技大学朱东鸣编写，第 4、第 5、第 6 章由北京交通大学郑神州编写，第 7、第 8 章由中国石油大学(华东)亓健编写，第 9、第 10、第 11 章由福建师范大学苏维钢编写。各章的内容提要、疑难解答和典型例题由王静、吴瑞华、冷英华编写。网络教育教学资源研发中心的各位领导、专家对本教材提出了很好的建议，在此深表感谢。

本书可作为远程(网络)教育理工类、经管类非数学专业高等数学课程的教材，也可作为工程技术人员和普通高等学校学生的参考用书。

本书的构思和编写是一种新的尝试。由于时间仓促，加之编者水平有限，书中难免有不妥之处，衷心欢迎读者批评指正。

作　者

2010 年 10 月

目录 CONTENTS

第 7 章 向量代数与空间解析几何

学习目的

了解向量的概念;掌握向量的线性运算、向量的数量积和向量积的概念及运算;了解曲面方程和空间曲线方程的概念;掌握平面方程,直线方程,平面与平面、平面与直线、直线与直线平行、垂直的条件和夹角,点到平面的距离.

学习要求

通过本章的学习,你能够:

- 了解空间直角坐标系,了解点的坐标,掌握空间中两点间的距离公式.
- 掌握向量的概念及其表示方法,掌握向量的线性运算,掌握单位向量、向量的坐标表示式以及用坐标表示式进行向量运算的方法.
- 会求向量的数量积、向量积,了解两个向量垂直、平行的条件,会求两个向量的夹角、方向角、方向余弦及向量的投影.
- 理解曲面方程的概念,了解球面、柱面及旋转曲面的曲面方程特征,会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面方程及母线平行于坐标轴的柱面方程.
- 了解空间曲线的一般方程及参数方程,能够进行两者间的转化.
- 掌握空间平面的三种表示形式,能够根据已知条件求平面方程及判断空间两平面的位置关系,会求空间一点到平面的距离.
- 掌握空间直线的三种表示形式及三者间的转换,能够判断空间中直线与直线、直线与平面之间的位置关系.
- 了解常用二次曲面方程的特点及其图形特征,理解用截痕法判断空间二次曲面的原理.

重点难点

- 向量的概念及单位向量、方向余弦、夹角公式、向量的坐标表达式及相关计算.
- 旋转曲面方程、柱面方程及其他二次曲面方程的特点和图形.
- 平面与直线方程相关内容.

知识要点

向量　直线　平面　二次曲面

与平面解析几何相同，空间解析几何是用代数的方法研究几何问题. 解析几何是把几何问题化为代数运算来研究，而把有关的代数问题用几何图形来解释，使“数”与“形”密切结合起来. 这种结合是建立在下列两个基本概念之上的：

(1) 坐标法(以数代表点)；

(2) 图形的方程(以代数方程代表图形).

空间解析几何的基本课题是“图形的方程，方程的图形”，也就是讨论各种空间图形几何关系的代数表达、判别和计算等.

本章首先建立空间直角坐标系，引入在工程技术上应用广泛的向量，再以向量代数为工具讨论空间的几何图形，主要是空间的平面、直线和常见的曲面及曲线等.

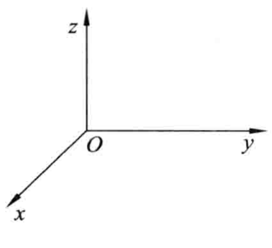
7.1 空间直角坐标系

7.1.1 空间直角坐标系

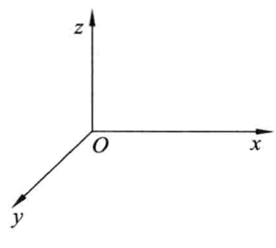
为了确定空间中一点的位置，需要建立空间中的点与数组之间的联系.

在空间内作三条相互垂直且相交的数轴 Ox,Oy,Oz，这三条数轴的长度单位相同，这样就建立了一个空间直角坐标系 $Oxyz$. 其中，Ox,Oy 和 Oz 分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)和 z 轴(竖轴)，统称为坐标轴，它们的公共交点 O 称为坐标原点.

空间直角坐标系分为两类. 若用右手握住 z 轴，四指由 x 轴正向转到 y 轴正向(转过的角度小于 π)后大拇指恰好指向 z 轴正向，则称该坐标系为右手系(图 7-1a)；如果用左手做同样的动作，大拇指恰好指向 z 轴正向，则称该坐标系为左手系(图 7-1b).



(a)



(b)

图 7-1

由两个坐标轴所确定的平面称为坐标平面，简称坐标面. x 轴、y 轴、z 轴可以确定 xOy，yOz，xOz 三个坐标面. 这三个坐标面可以把空间分成八个部分，每个部分称为一个卦限. 其

中，xOy 坐标面之上、yOz 坐标面之前、xOz 坐标面之右的卦限称为第一卦限. 按逆时针方向依次标记 xOy 坐标面上的其他三个卦限为第二、第三、第四卦限. 在 xOy 坐标面下面的四个卦限中，位于第一卦限下面的卦限称为第五卦限，按逆时针方向依次确定其他三个卦限为第六、第七、第八卦限(图 7-2).

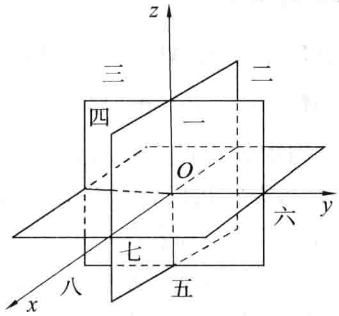


图 7-2

7.1.2 空间中点的坐标

已知 M 为空间一点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点分别为 P,Q,R(图 7-3)，这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x,y,z. 于是，空间一点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x,y,z)，该数组就叫做点 M 的坐标，并依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 坐标为 (x,y,z) 的点 M 记为 $M(x,y,z)$.

反过来，给定一个有序数组 (x,y,z)，在 x 轴上取坐标为 x 的点 P、在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q、在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，然后通过 P,Q,R 分别作与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面，这三个垂直平面的交点 M 即为以有序数组 (x,y,z) 为坐标的点(图 7-3).

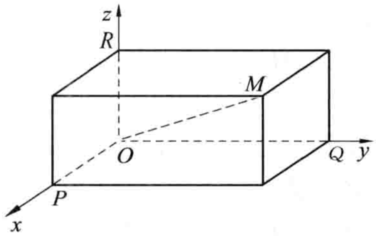


图 7-3

这样，空间中的所有点就与全体有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应的关系. 利用这个关系可以使空间点的轨迹曲线、曲面与 (x,y,z) 的方程联系起来，从而将研究空间曲线、曲面的问题(几何问题)转化为研究方程的问题(代数问题). 空间的点与三元有序数组的这种一一对应关系是非常重要的，它使几何问题与代数问题之间建立了联系.

值得指出的是，坐标面和坐标轴上的点的坐标各有一定特征. 例如，如果点 M 在 yOz 面上，则 $x=0$；同样，zOx 面上的点，$y=0$；xOy 面上的点，$z=0$. 如果点 M 在 x 轴上，则 $y=z=0$；同样，y 轴上的点，$x=z=0$；z 轴上的点，$x=y=0$. 如果点 M 为原点，则 $x=y=z=0$.

各个卦限内(不含坐标面)点的坐标符号如下：

第一卦限(+,+,+)	第二卦限(−,+,+)	第三卦限(−,−,+)	第四卦限(+,−,+)
第五卦限(+,+,−)	第六卦限(−,+,−)	第七卦限(−,−,−)	第八卦限(+,−,−)

7.1.3 空间中两点之间的距离公式

我们知道，数轴上任意两点 $M_1(x_1)$ 和 $M_2(x_2)$ 之间的距离 $|M_1M_2|=|x_2-x_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2}$，平面上任意两点 $M_1(x_1,y_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2)$ 之间的距离 $|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. 若给定空间中的两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，那么这两点之间的距离 $|M_1M_2|$ 的表达式应是什么呢？我们自然会猜测为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

事实上，过 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 分别作平行于三个坐标面的六个平面，这六个平面构成一个长方体，$|M_1M_2|$ 恰好是该长方体对角线的长度，如图 7-4 所示.

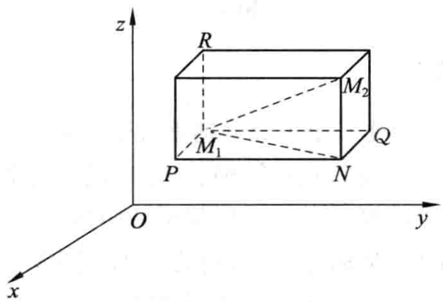


图 7-4

由勾股定理可得

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2=|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2.$$

根据数轴上两点间距离公式可知

$$|M_1P|=|x_2-x_1|,\quad |M_1Q|=|y_2-y_1|,\quad |M_1R|=|z_2-z_1|.$$

所以

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{7-1}$$

这就是空间中两点之间的距离公式.

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离 $|OM|$ 为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{7-2}$$

例 1 求证以 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解 因为

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$
$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$
$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$$

所以

$$|M_2M_3|=|M_3M_1|,$$

故原结论成立.

例 2 设点 P 在 x 轴上,它到点 $P_1(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 的距离的 2 倍,求点 P 的坐标.

解 因为点 P 在 x 轴上,故设点 P 的坐标为 $(x,0,0)$. 由题意可知

$$|PP_1|=\sqrt{x^2+(\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{x^2+11},$$
$$|PP_2|=\sqrt{x^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{x^2+2},$$

因为

$$|PP_1|=2|PP_2|,$$

所以

$$\sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2},$$

解得

$$x=\pm 1,$$

故所求点为 $(1,0,0)$ 或 $(-1,0,0)$.

例 3 请给出点 $M(6,5,3)$ 在 xOy 平面上的投影点和在 z 轴上的垂足的坐标,以及该点关于 x 轴的对称点的坐标.

解 $M(6,5,3)$ 在 xOy 平面上的投影点的坐标为 $(6,5,0)$;$M(6,5,3)$ 在 z 轴上的垂足的坐标为 $(0,0,3)$;$M(6,5,3)$ 关于 x 轴的对称点的坐标为 $(6,-5,-3)$.

练一练

1. 求点 $M(x,y,z)$ 关于 x 轴、xOy 平面及原点的对称点的坐标.
2. 求点 $M_1(5,10,15)$ 到点 $M_2(25,35,45)$ 的距离.

参考答案

1. $M(x,y,z)$ 关于 x 轴的对称点为 $M_1(x,-y,-z)$、关于 xOy 平面的对称点为 $M_2(x,y,-z)$、关于原点的对称点为 $M_3(-x,-y,-z)$.
2. $|M_1M_2|=\sqrt{(25-5)^2+(35-10)^2+(45-15)^2}=5\sqrt{77}$.

7.2 向量及其线性运算

7.2.1 向量的概念

向量代数的计算对象为向量,由于它能使物理学及数学领域内许多问题的解法简捷而直

观，故已成为数学中的一个独立分支. 它与解析几何的关系最为密切. 一方面，它需要用解析几何的坐标法来表示向量的大小与方向；另一方面，它使解析几何中的有关问题更加简化.

量可分为两类. 一类完全由数值的大小决定，如温度、长度、质量等，称为标量；另一类则不同，除知道其数值的大小外，还必须指明它的方向，如力、力矩、位移、速度、加速度等，我们把这种既有大小又有方向的量叫做向量.

一般用有向线段来表示向量(图 7-5). 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的向量记为$\overrightarrow{AB}$或 $\boldsymbol{a}$(手写体可表示为$\vec{a}$).

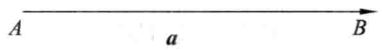


图 7-5

向量的大小称为向量的模，记为$|\overrightarrow{AB}|$. 模等于 1 的向量称为单位向量. 模等于零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$. 我们规定零向量的方向是任意的.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，又互相平行(即在同一直线上或在平行直线上)，且指向相同，我们就称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 也就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

两个方向相同或相反的向量称为平行向量，或称这两个向量共线. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行记为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

如果两个向量大小相等、方向相反，则称其中一个向量是另一个向量的负向量. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量记为$-\boldsymbol{a}$.

在直角坐标系中，如以坐标原点 O 为起点向已知点 M 引向量$\overrightarrow{OM}$，则这个向量称为点 M 对于点 O 的向径. 空间中的每一点 M 都对应着一个向径$\overrightarrow{OM}$；反过来，每个向径$\overrightarrow{OM}$也与它的终点 M 相对应.

7.2.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}$，以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$为邻边作一平行四边形 $ABCD$，连接对角线 AC，记对角线$\overrightarrow{AC}$为 $\boldsymbol{c}$，即 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$(图 7-6). 我们称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这种用平行四边形的对角线向量来表示两个向量的和的方法叫做向量加法的平行四边形法则.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$与 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$在同一直线上，那么规定它们的和是这样一个向量：当$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的指向相同时，和向量的方向与原来两个向量的方向相同，其模等于两个向量的模的和；当$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的指向相反时，和向量的方向与较长的向量的方向相同，其模等于两个向量的模的差.

由于平行四边形的对边平行且相等，所以从图 7-6 可以看出，我们还可以这样来作出两个向量的和：作向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，以$\overrightarrow{AB}$的终点 B 为起点作 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$，连接 AC 就得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$. 这一方

法叫做向量加法的三角形法则.

由两个向量的加法很容易推广到 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的加法. 令 $\boldsymbol{a}_2$ 的起点与 $\boldsymbol{a}_1$ 的终点重合、$\boldsymbol{a}_3$ 的起点与 $\boldsymbol{a}_2$ 的终点重合,这样依次进行下去,则以 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点为起点、$\boldsymbol{a}_n$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 便是 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和,记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$. 这种加法又称为多边形加法或折线法,如图 7-7 所示.

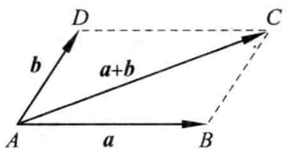


图 7-6

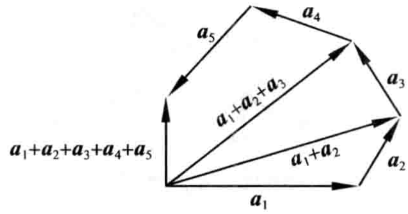


图 7-7

向量的加法满足下列运算规律:

(1) 交换律:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

(2) 结合律:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

由向量加法运算的规定,可知加法符合交换律. 由向量加法的三角形法则可知,先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 再与 $\boldsymbol{c}$ 相加,即得它们的和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$;如果用 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加,可得同一结果,因而符合结合律.

2. 向量的减法

向量的减法定义为加法的逆运算,即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平移到共同的起点,则以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点、$\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 便是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 由图 7-8 可看出,因为 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$,所以 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 或在 $\boldsymbol{a}$ 的终点作 $-\boldsymbol{b}$,则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点、$-\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 便是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

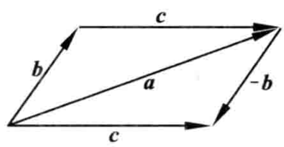


图 7-8

3. 向量的数乘运算

设 λ 是一实数,$\boldsymbol{a}$ 是一向量,数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积仍为一个向量,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 它的模是 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

数乘运算满足下列运算规律:

(1) 分配律:

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$