



环球卓越
www.geedu.com

MBA/MPA/MPAcc等管理类硕士联考专用教材



2015 MBA/MPA/MPAcc
管理类专业学位联考

高分指南

数 学

全国管理类研究生入学考试专用教材编写组◎编写

**MBA
MPA
MPAcc**

**旅游管理硕士
工程管理硕士
图书情报硕士
审计硕士**



中国人民大学出版社

www.1kao.com.cn

注册享受增值服务

012531

刮开涂层 网站注册

中国人民大学出版社

**2015MBA/MPA/MPAcc
管理类专业学位联考高分指南 数学
第4版**

全国管理类研究生入学考试专用教材编写组 编写

中国人民大学出版社
• 北京 •

图书在版编目 (CIP) 数据

2015MBA/MPA/MPAcc 管理类专业学位联考高分指南·数学/全国管理类研究生入学考试专用教材编写组编写. —4 版. —北京: 中国人民大学出版社, 2014. 2

ISBN 978-7-300-18972-7

I. ①2… II. ①全… III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 033661 号

2015MBA/MPA/MPAcc 管理类专业学位联考高分指南 数学 第 4 版

全国管理类研究生入学考试专用教材编写组 编写

2015 MBA/MPA/MPAcc Guanlilei Zhuanye Xuewei Liankao Gaofen Zhinan Shuxue Di-si Ban

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)		010-62511770 (质管部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.lkao.com.cn (中国 1 考网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京七色印务有限公司	版 次	2011 年 3 月第 1 版
规 格	185 mm×260 mm 16 开本		2014 年 3 月第 4 版
印 张	16	印 次	2014 年 3 月第 1 次印刷
字 数	375 000	定 价	39.00 元

这是一套由全国著名在职攻读硕士学位全国联考培训机构——环球卓越策划并组织编写的管理类专业学位联考应试辅导书！

每年1月举行的MBA、MPA、MPAcc、工程管理、旅游管理、图书情报等管理类专业学位联考是一个选拔性考试，它不仅是为了适应国家对高层次应用型人才的迫切需求，同时也是为了和国际教育接轨，将专业学位联考发展壮大。2015年，专业学位联考招生规模将占据整个硕士研究生考试的50%，报考人数将占据整个百万考研大军的半壁江山！

环球卓越秉承“精致服务，卓越品质”的精神，将更加关注并服务于广大专业学位联考考生，并将多年在职攻硕辅导经验浓缩于一体，以“MBA/MPA/MPAcc/旅游管理/工程管理/图书情报等联考系列”图书（共10本）的形式隆重展现给大家。

本套书有如下特点：

一、名校、名师倾情联手，专业、权威、实用

本套书由全国知名培训机构——环球卓越策划并联手资深辅导名师执笔，将环球卓越多年教学精华浓缩于一体，充分展现在本套书中。本套书的众多作者为环球卓越北京总校、上海分校、杭州分校、天津分校、南京分校、沈阳分校、郑州分校等校的主讲老师，他们多年来的教学、研究成果为本套书的专业、权威、实用奠定了坚实的基础。

二、紧扣大纲，直击2015年考试真题

自2009年以来，管理类专业学位联考考试大纲一直在变革中，需要考生充分认识并把握考纲要点。本套书在研究历年真题及大纲的基础上，将考点、要点及考试趋势进行了充分详尽的展示，“考前点睛”则直击2015年考试真题，达到仿真实战的目的。

三、细致周到，满足各阶段和全方位需求

本套书由全方位的辅导教程“高分指南”（英语、数学、逻辑、写作及MPAcc会计学）+“专项突破”（英语词汇、阅读理解、翻译与写作）+“考前点睛”（英语、综合能力）组合而成，既满足考生全方位需求，同时又能满足每个时段不同的需求，细致而周到。

四、独一无二的周计划规划，独一无二的人性化服务

在职考生的特点是工作忙、时间紧、专业功底弱、缺乏应试经验。本套书充分从在职考生特点出发，为考生“量身定制”出独一无二的复习计划。

1. 独一无二的周计划规划。英语是个难以靠短期投机取巧去制胜的科目。本套书按照考试板块，将英语细分为三大专项：词汇、阅读理解、翻译与写作，并通过周计划的布局，将整个英

语的复习规划做得井井有条，让考生在百忙中忙而不乱，有序攻克各个考试大关。

2. 独一无二的人性化服务。MPAcc 会计学列入管理类专业学位联考已达数年，但考生却很难在市面上找到一本适合自己的辅导书，因为 MPAcc 考生的有限让众多出版机构望而却步。本套书从考生需求出发，提供了《管理类专业学位联考高分指南 MPAcc 会计学》，相信会给 MPAcc 考生提供全方位的有针对性的指导！

环球卓越

2014 年 3 月

第4版 前言

-F oreword

随着近几年考试大纲的变化，数学这一部分一直处于争议和变动中，总体趋势是难度在逐步恢复和加强。而数学是众多考生、尤其是文科出身考生的软肋，如何攻克无从下笔、下笔难做对题的瓶颈，是众考生迫切需要解决的问题，于是本书便应运而生！

本书编者通过对历年真题的钻研、近年考试动向的剖析及最新真题的预测，编写了这本应试性极强的考前辅导图书。本书有如下特点：

一、专业团队联手打造，权威实用

本书的编委会成员多年工作在考前辅导第一线，丰富的教学经验和对命题规律的钻研确保了本书的专业性、权威性和实用性。

二、体例结构科学合理，清晰明了

全书共分为十个章节，每个章节均采取理论知识讲解、考点剖析及强化练习，层层递进，脉络清晰，真正达到“易懂易学易掌握”。

三、有讲有练，讲练结合，有的放矢

对于成人学习而言，光听不练很难有效果，数学尤其如此。所以本书每个章节后面均附有强化练习，针对性强，真正做到讲与练的结合，有的放矢。

四、附录数学必备公式，人性化服务尽现

本书将考生日常所需数学必备公式进行了提炼和整理，便于考生随时参阅使用。纸薄情深，只为人性化服务。

希望本书能够对广大考生提供一定的帮助。由于时间仓促以及编者的水平有限，书中难免会有不足之处，敬请广大读者批评指正！

编者

2014年3月

条件充分性判断题的解题说明	1
第一章 实数的性质及其运算	3
第一节 有理数	3
第二节 实数	11
第三节 绝对值和平均值	15
本章强化练习	25
本章强化练习参考答案与解析	28
第二章 整式与分式	32
第一节 整式	32
第二节 分式	39
本章强化练习	45
本章强化练习参考答案与解析	48
第三章 方程与不等式	53
第一节 方程与方程组	53
第二节 不等式与不等式组	61
本章强化练习	69
本章强化练习参考答案与解析	71
第四章 函 数	75
第一节 集合	75
第二节 函数	78
本章强化练习	86
本章强化练习参考答案与解析	89
第五章 数 列	93
第一节 基本概念	93
第二节 等差数列	95
第三节 等比数列	100
本章强化练习	106
本章强化练习参考答案与解析	109
第六章 应用题	114
第一节 比和比例应用题	114
第二节 浓度配比应用题	118
第三节 行程应用题	121
第四节 工程应用题	124

第五节 容斥原理应用题	128
第六节 公倍数应用题	131
本章强化练习	133
本章强化练习参考答案与解析	136
第七章 常见平面几何图形与常见立体几何图形	140
第一节 常见平面几何图形	140
第二节 常见立体几何图形	154
本章强化练习	160
本章强化练习参考答案与解析	163
第八章 解析几何初步	167
第一节 直线与直线方程	167
第二节 圆的方程	175
本章强化练习	183
本章强化练习参考答案与解析	185
第九章 排列组合与概率初步	189
第一节 排列组合	189
第二节 概率初步	195
第三节 条件概率及乘法公式	206
本章强化练习	210
本章强化练习参考答案与解析	213
第十章 数据描述	217
第一节 方差与标准差	217
第二节 数据的图标表示	219
本章强化练习	221
本章强化练习参考答案与解析	223
附录 1: 2014 年全国硕士研究生入学统一考试管理类专业学位	
联考综合能力试题及参考答案(数学部分)	225
附录 2: MBA 数学必备公式	235



条件充分性判断题的解题说明

一、充分条件

定义： 由条件 A 成立，就可以推出结论 B 成立（即 $A \Rightarrow B$ 是真命题），则说 A 是 B 的充分条件。

若 A 是 B 的充分条件，也可以说 A 具备了使 B 成立的充分性。若 $A \nRightarrow B$ ，则说 A 不是 B 的充分条件，也可以说 A 不具备使 B 成立的充分性。

例如： A 为 $x > 3$ ； B 为 $x > 2$ 。

当 $x > 3$ 时，由 $3 > 2$ ，故必有 $x > 2$ 成立。

故 A 为 $x > 3$ 是 B 为 $x > 2$ 的充分条件，或说，对于 B 为 $x > 2$ 的成立， A 为 $x > 3$ 具有充分性。

显然，对于 A 为 $x > 3$ 的成立， B 为 $x > 2$ 不具有充分性。

又如： $x - 2 > 2$ 不是 $4 < x < 6$ 的充分条件，同样 $x + 2 < 8$ 也不是 $4 < x < 6$ 的充分条件。但 $x - 2 > 2$ 与 $4 < x < 6$ 联合起来，即 $x - 2 > 2$ 且 $x + 2 < 8$ ，对于 $4 < x < 6$ 的成立具有充分性。

二、充分性判断

解题说明： 本题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中陈述的结论。阅读每小题目中的条件（1）和（2）后选择。

- A. 条件（1）充分，但条件（2）不充分
- B. 条件（2）充分，但条件（1）不充分
- C. 条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和（2）联合起来充分
- D. 条件（1）充分，条件（2）也充分
- E. 条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和（2）联合起来也不充分

例 1. 方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 成立。

（1） $x = -1$

（2） $x = 5$

解: 由条件 (1), $x = -1$, $x + 1 = 0$, 所以 $(x + 4)(x + 1) = 0$, 即 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 成立 (或将 $x = -1$ 直接代入所给方程进行检验).

所以条件 (1) 充分.

由条件 (2), $x = 5$, 得 $x^2 - 3x - 4 = 5^2 - 3 \times 5 - 4 = 6 \neq 0$, 因此条件 (2) 不充分.

故此题应选 A.

例 2. 将一篇文章录入计算机, 录入人员甲比录入人员丙效率低.

(1) 录入人员甲与录入人员乙合作, 需 2 小时录完

(2) 录入人员乙与录入人员丙合作, 需 1 小时 30 分钟录完

解: 条件 (1) 与条件 (2) 单独显然不具备使录入人员甲比录入人员丙效率低的充分性.

下面考虑条件 (1) 和条件 (2) 联合:

由于甲、乙合作所需时间大于乙、丙合作所需时间, 所以甲比丙录入速度慢, 即甲的效率比丙低.

也可以用如下的计算方法:

设甲单独录入需 x 小时录完, 丙单独录入需 y 小时录完.

由条件 (1), 乙每小时录入量为 $\frac{1}{2} - \frac{1}{x}$, 再由条件 (2) 得

$$\frac{1}{y} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$$

$$\text{所以, } \frac{1}{y} = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{6} > \frac{1}{x}$$

即: 甲每小时完成的工作量小于丙每小时完成的工作量, 即甲的效率比丙低.

故此题应选 C.

由上述例题可以得出结论: 条件充分性判断的求解过程即为以下三个命题中某个命题真假的判定:

① 条件 (1) 成立, 则题干结论成立.

② 条件 (2) 成立, 则题干结论成立.

③ (1) 与 (2) 两个条件都成立, 则题干结论成立.

注意: 本版图书中, 所有充分性判断题中的 A、B、C、D、E 这 5 个选项所规定的含义, 均以本节为准, 即

A. 条件 (1) 充分, 但条件 (2) 不充分

B. 条件 (2) 充分, 但条件 (1) 不充分

C. 条件 (1) 和 (2) 单独都不充分, 但条件 (1) 和 (2) 联合起来充分

D. 条件 (1) 充分, 条件 (2) 也充分

E. 条件 (1) 和 (2) 单独都不充分, 条件 (1) 和 (2) 联合起来也不充分

以后不再重复说明.



第一章 实数的性质及其运算

第一节 有理数

一、有理数的分类及基本概念

整数和分数统称为有理数.

其中整数包括正整数、负整数和零; 分数包括正分数和负分数.

任何一个有理数都可以写成分数 $\frac{m}{n}$ 的形式(m, n 均为整数, $n \neq 0$). 因为分数与有限小数和无限小数可以互化, 所以又称有理数为有限小数和无限循环小数.

两个有理数的和、差、积、商(分母不等于0)仍然是一个有理数.

二、整数

两个整数的和、差、积仍然是整数, 但是用一个不等于零的整数去除另一个整数所得的商不一定是整数, 因此, 我们有以下整除的概念:

定义: 设 a, b 是任意两个整数, 其中 $b \neq 0$, 如果存在一个整数 q , 使得等式 $a = bq$ 成立, 则称 b 整除 a 或 a 能被 b 整除, 记作: $b \mid a$, 此时我们把 b 叫做 a 的因数, 把 a 叫做 b 的倍数. 如果这样的整数 q 不存在, 则称 b 不整除 a , 记作: $b \nmid a$.

整除具有如下的性质:

- (1) 如果 $c \mid b, b \mid a$, 则 $c \mid a$;
- (2) 如果 $c \mid b, c \mid a$, 则对任意的整数 m, n , 有 $c \mid ma + nb$.

定理: 设 a, b 是两个整数, 其中 $b > 0$, 则存在整数 q, r , 使得 $a = bq + r, 0 \leq r < b$ 成立, 而且 q, r 都是唯一的, q 叫做 a 被 b 除所得的不完全商, r 叫做 a 被 b 除所得的余数.

由整除的定义及带余除法可知, 若 $b > 0$, 则 $b \mid a$ 的充要条件是带余除法中余数 $r = 0$.

用带余除法, 我们可将整数分类:

能被 2 整除的数称为偶数, 记作: $2n (n \in \mathbf{Z})$;

不能被 2 整除的数称为奇数, 记作: $2n \pm 1 (n \in \mathbf{Z})$.

注: (1) 两个相邻整数必为一个奇数一个偶数.

(2) 能被 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 整除的整数所具备的性质有:

① 能被 2 整除的整数: 个位数字为 0, 2, 4, 6, 8.

② 能被 3 整除的整数: 各位数字之和能被 3 整除.

③ 能被 4 整除的整数: 末两位数字必能被 4 整除.

④ 能被 5 整除的整数: 个位数字为 0 或 5.

⑤ 能被 6 整除的整数: 同时能被 2 和 3 整除.

⑥ 能被 8 整除的整数: 末三位数字必能被 8 整除.

⑦ 能被 9 整除的整数: 各位数字之和能被 9 整除.

⑧ 能被 10 整除的整数: 个位数字必为 0.

例 1.1: 当整数 n 被 6 除时, 其余数为 3, 则下列哪一项不是 6 的倍数().

A. $n-3$ B. $n+3$ C. $2n$ D. $3n$ E. $4n$

【难度系数: 0.68】

解: 由已知 $n=6k+3$, 这里 k 是整数, 从而 $n-3=6k+3-3=6k$, $n+3=6k+3+3=6(k+1)$, $2n=2(6k+3)=6(2k+1)$, $4n=4(6k+3)=6(4k+2)$

即 $n-3$, $n+3$, $2n$, $4n$ 都是 6 的倍数.

而 $3n=3(6k+3)=6(3k+1)+3$, 其余数为 3, 即 $3n$ 不是 6 的倍数.

故本题的正确选项是 D.

例 1.2: 有偶数位来宾.

(1) 聚会时所有来宾都被安排在一张圆桌周围, 且每位来宾与其邻座性别不同

(2) 聚会时, 男宾人数是女宾的人数的 2 倍

【2010 年真题, 难度系数: 0.7】

解: 设男嘉宾的人数为 x 人, 女嘉宾的人数为 y 人.

条件 (1), 必有 $x=y$, 因此 $x+y=2x$ 为偶数, 所以条件 (1) 是充分的.

条件 (2), 取 $y=1$, $x=2$, 因此 $x+y=1+2=3$ 不是偶数, 所以条件 (2) 不充分.

故本题的正确选项是 A.

例 1.3: m 是一个整数.

(1) 若 $m=\frac{p}{q}$, 其中 p 与 q 为非零整数, 且 m^2 是一个整数

(2) 若 $m=\frac{p}{q}$, 其中 p 与 q 为非零整数, 且 $\frac{2m+4}{3}$ 是一个整数

【难度系数: 0.48】

解: 条件 (1), 若 m^2 是一个整数, 则 $m=\frac{p}{q}$ 一定是整数, 因此条件 (1) 是充分的.

条件 (2), 取 $m=\frac{11}{2}$, 则 $\frac{2m+4}{3}=5$ 是整数, 但 m 不是整数, 因此条件 (2) 不充分.

故本题的正确选项是 A.

例 1.4: 三个 2 002 位数的运算 $99\cdots9 \times 88\cdots8 \div 66\cdots6$ 的结果中有().

- A. 相邻的 2 001 个 3 B. 相邻的 2 002 个 3 C. 相邻的 2 001 个 2
D. 相邻的 2 002 个 2 E. 以上答案均不正确

【难度系数: 0.27】

$$\text{解: } 99\cdots9 \times 88\cdots8 \div 66\cdots6 = \frac{99\cdots9 \times 88\cdots8}{66\cdots6} = \frac{99\cdots9 \times 8}{6} = 33\cdots3 \times 4 = \underbrace{133\cdots32}_{2\ 001}$$

故本题的正确选项是 A.

例 1.5: m 为偶数.

(1) 设 n 为整数, $m = n(n+1)$

(2) 在 1, 2, 3, ..., 1 988 这 1 988 个自然数中的相邻两个数之间添加一个加号或减号, 这样组成运算式的结果是 m

【难度系数: 0.56】

解: 条件 (1), $m = n(n+1)$, 连续两个整数中, 正好是一个奇数一个偶数, 从而 m 是偶数, 条件 (1) 是充分的.

条件 (2), 在 1, 2, 3, ..., 1 988 中有 994 个偶数, 994 个奇数, 其运算结果一定是偶数, 从而条件 (2) 也是充分的.

故本题的正确选项是 D.

三、质数与合数

1. 定义

在正整数中, 1 的正因数只有它本身, 因此在整数中 1 的地位是很特殊的. 任何一个大于 1 的整数, 都至少有两个正因数, 即 1 和这个整数本身. 将大于 1 的整数, 按照它们含有正因数的个数分类, 可以将正整数分为质数和合数.

定义: 一个大于 1 的整数, 如果它的正因数只有 1 和它本身, 则称这个整数是质数 (素数); 一个大于 1 的整数, 如果除了 1 和它本身, 还有其他的正因数, 则称这个整数是合数.

由定义可知, 除了最小质数 2 是偶数外, 其余质数都是奇数.

2. 质数的性质

(1) 若 M 是一质数, a 是任一整数, 则 a 不能被 M 整除或 M 与 a 互质 (M 与 a 的最大公因数是 1).

(2) 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 n 个整数, M 是质数, 若 $M \mid a_1 a_2 \cdots a_n$, 则 M 一定能整除其中一个 a_k .

例 1.6: 设 a, b, c 是小于 12 的三个不同的质数 (素数), 且 $|a-b| + |b-c| + |c-a| = 8$, 则 $a+b+c = ()$.

- A. 10 B. 12 C. 1 D. 15 E. 19

【2011 年真题，难度系数：0.73】

解：根据题意，得： $a=7, b=5, c=3$ 。

所以 $a+b+c=7+5+3=15$ 。

故本题的正确选项为 D。

例 1.7：若几个质数（系数）的乘积为 770，则它们的和为（ ）。

A. 85 B. 84 C. 28 D. 260 E. 25

【2014 年真题，难度系数：0.59】

解：由题意可知 770 是几个质数（系数）的乘积，那么将 770 进行化解直到全部是质数为止。

$$770 = 2 \times 385 = 2 \times 5 \times 77 = 2 \times 5 \times 7 \times 11$$

则有： $2+5+7+11=25$

故本题的正确选项为 E。

例 1.8：三个质数之积恰好等于它们和的 5 倍，则这三个质数之和为（ ）。

A. 11 B. 12 C. 13 D. 14 E. 15

【难度系数：0.30】

解法一：设三个质数分别为 a, b, c ，根据题意有： $abc=5(a+b+c)$ ，可推知 a, b, c 中有一个为 5，不妨设 $c=5$ ，则 $ab=a+b+5 \Rightarrow b=\frac{a+5}{a-1}=1+\frac{6}{a-1}$ 。

所以 $a-1$ 是 6 的约数，且 a, b 是质数 $\Rightarrow a=2, b=7$ ，从而 $a+b+c=14$ 。

故本题的正确选项为 D。

解法二：根据题意有： $abc=5(a+b+c)$ 。

右边是 5 的倍数，所以左边也是 5 的倍数，故有一个是 5。

设 $c=5$ ，有 $ab=a+b+5$ ，即 $ab-a-b=5 \Rightarrow ab-a-b+1=6 \Rightarrow (a-1)(b-1)=6$ 。

所以 $(a-1)(b-1)=2 \times 3=1 \times 6$ 。

即有 $\begin{cases} a-1=2 \\ b-1=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a-1=1 \\ b-1=6 \end{cases}$ ，所以 $\begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}$ （舍）， $\begin{cases} a=2 \\ b=7 \end{cases}$

所以这三个质数为 2, 5, 7。从而 $a+b+c=2+7+5=14$ 。

故本题的正确选项为 D。

例 1.9：已知 p, q 为质数，且 $5p^2+3q=59$ ，则以 $p+3, 1-p+q, 2p+q-4$ 为边长的三角形是（ ）。

A. 等边三角形 B. 等腰但非等边三角形 C. 直角三角形
D. 钝角三角形 E. 以上答案均不正确

【难度系数：0.29】

解：由已知， $5p^2, 3q$ 为一奇一偶，从而 p, q 为一奇一偶质数。

若 $q=2$ ，则 $5p^2=53$ 无解。因此得 $\begin{cases} p=2 \\ q=13 \end{cases}$ 。

即 $p+3=5, 1-p+q=12, 2p+q-4=13$ 。

又 $5^2+12^2=13^2$ ，所以以 5, 12, 13 为边长的三角形是直角三角形。

故本题的正确选项为 C.

例 1.10: $p=mq+1$ 为质数.

(1) m 为正整数, q 为质数.

(2) m, q 均为质数.

【2013 年真题, 难度系数: 0.63】

解: 本题用数字代入法检验即可.

条件 (1) 中, 当 $m=1, q=3$ 时, $p=1 \times 3 + 1 = 4$, 4 不是质数, 条件 (1) 不满足题干;

条件 (2) 中, 当 $m=5, q=7$ 时, $p=5 \times 7 + 1 = 36$, 36 不是质数, 条件 (2) 不满足题干.

很显然, 将条件 (1) 和条件 (2) 联合起来, 也不能满足题干要求.

因此, 条件 (1) 和条件 (2) 单独都不充分, 联合起来也不充分.

故本题的正确选项为 E.

四、最大公因数和最小公倍数

定义: 设 a, b 是两个整数, 若整数 d 满足 $d | a$ 且 $d | b$, 则称 d 是 a, b 的一个公因数. 整数 a, b 的公因数中最大的一个叫做 a, b 的最大公因数, 记为 (a, b) .

若 $(a, b) = 1$, 则称 a, b 互质.

定义: 设 a, b 是两个整数, 若整数 d 满足 $a | d$ 且 $b | d$, 则称 d 是 a, b 的一个公倍数. a, b 的所有公倍数中最小的正整数叫做 a, b 的最小公倍数, 记为 $[a, b]$.

定理: 设 a, b 是任意两个正整数, 则有

(1) a, b 的所有公倍数就是 $[a, b]$ 的所有倍数, 即若 $a | d$ 且 $b | d$, 则 $[a, b] | d$;

(2) $[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$, 特别当 $(a, b) = 1$, 则 $[a, b] = ab$.

例 1.11: 从 1 到 120 的自然数中, 能被 3 整除或能被 5 整除的数的个数为().

A. 64 B. 48 C. 56 D. 46 E. 72

【难度系数: 0.85】

解: 在 1 到 120 中, 能被 3 整除的数可表示为 $3k, k=1, 2, \dots, 40$; 能被 5 整除的数可表示为 $5k, k=1, 2, \dots, 24$. 又因为 3 和 5 的最小公倍数是 15, 所以既能被 3 整除又能被 5 整除的数一定是 15 的倍数, 可表示为: $15k, k=1, 2, \dots, 8$. 从而能被 3 或 5 整除的数的个数为: $40 + 24 - 8 = 56$ 个.

故本题的正确选项为 C.

例 1.12: 两个正整数的最大公约数是 6, 最小公倍数是 90, 满足条件的两个正整数组成的大数在前的数对共有()对.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

【难度系数: 0.38】

解法一: 根据两个正整数的最大公约数是 6, 可设两个整数 $m_1 = 6k_1, m_2 = 6k_2$ ($k_1,$

k_2 互质), 则 m_1 与 m_2 的最小公倍数为 $6k_1k_2=90 \Rightarrow k_1k_2=15$.

得 $k_1=5, k_2=3$ 或 $k_1=15, k_2=1$, 故有两对.

故本题的正确选项为 B.

解法二: 设所求两个数为 a, b , 由已知 $(a, b)=6, [a, b]=90$, 从而 $ab=a, b=90 \times 6=540=2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$.

即 $a=2 \times 3 \times 3 \times 5=90, b=2 \times 3=6$ 或 $a=2 \times 3 \times 5=30, b=2 \times 3 \times 3=18$.

故本题的正确选项为 B.

例 1.13: $(a, b)=30, [a, b]=18\ 900$.

(1) $a=2\ 100, b=270$

(2) $a=140, b=810$

【难度系数: 0.39】

解: 由条件 (1), $a=2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7, b=2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$, 从而知 $(a, b)=2 \times 3 \times 5=30, [a, b]=2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7=18\ 900$, 所以条件 (1) 是充分的.

由条件 (2), $a=2 \times 2 \times 5 \times 7, b=2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$, 从而知, $(a, b)=2 \times 5=10, [a, b]=2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7=11\ 340$, 所以条件 (2) 不充分.

故本题的正确选项为 A.

五、分数

1. 定义

将单位“1”平均分成若干份, 表示这样的一份或几份的数叫做分数. 表示其中一份的数是这个分数的单位. 分数有真分数、假分数、带分数等. 把“1”平均分成多少份的数, 称为分数的分母; 表示取了多少份的数, 称为分数的分子.

2. 分数的性质

(1) 若 m 与 n 的最大公约数为 1, 则称 $\frac{m}{n}$ 为既约分数.

(2) 分数的分子和分母同时乘以或除以一个非零的数, 分数值不变, 即

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} \quad (b \neq 0, m \neq 0)$$

3. 分数的运算

(1) 同分母的分数相加减, 分子相加减, 分母不变.

(2) 异分母分数相加减, 先通分, 然后按照同分母分数的加减法法则进行运算.

(3) 分数乘以整数, 用分子和整数相乘作积的分子, 分母不变.

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b}$$

(4) 分数乘以分数, 用分子相乘的积作为分子, 分母相乘的积作分母.

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

(5) 一个数除以另一个数 (零除外), 等于一个数乘以另一个数的倒数.

例 1.14: $\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{1}{9}\right)}{0.1+0.2+0.3+\cdots+0.9} = (\quad).$

A. $\frac{2}{81}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{81}{2}$ E. $\frac{13}{9}$

【难度系数: 0.79】

解: 细心观察本题, 有规律: 分子中第一个括号中运算之后的分母是第二个括号中运算之后的分子, 同样第二个括号中运算之后的分母是第三个括号中运算之后的分子, 依次下去, 得:

$$\text{原式} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{8}{9}}{(0.1+0.9) + (0.2+0.8) + (0.3+0.7) + (0.4+0.6) + 0.5} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{81}.$$

故本题的正确选项是 A.

例 1.15: $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+100} = (\quad).$

A. $\frac{99}{100}$ B. $\frac{99}{101}$ C. $\frac{100}{101}$ D. $\frac{200}{101}$ E. 1

【难度系数: 0.34】

解: 形如 $\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ 的形式, 一般变形为: $\frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} =$

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

所以, 原式 $= 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{101} \right) = \frac{200}{101}.$

故本题的正确选项是 D.

例 1.16: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1-\frac{1}{99^2}\right) = (\quad).$

A. $\frac{50}{97}$ B. $\frac{52}{97}$ C. $\frac{47}{98}$ D. $\frac{47}{99}$ E. $\frac{50}{99}$

【难度系数: 0.57】

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1+\frac{1}{99}\right)\left(1-\frac{1}{99}\right) \\ &= \left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1+\frac{1}{99}\right)\right] \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1-\frac{1}{99}\right)\right] \\ &= \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{100}{99}\right) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{98}{99}\right) = \frac{100}{2} \times \frac{1}{99} = \frac{50}{99}. \end{aligned}$$

故本题的正确选项是 E.