人邮考试
RENYOU KAOSHI

2015考研数学
命题人高分策略

历年真题详解与命题思路
数学二

全国考研数学命题研究中心 编著

命题阅卷专家 联袂倾力打造

■ **命题专家联袂打造**

一线专家教授倾力合作，作者阵容强大，内容权威

本书由来自北京大学，清华大学和中国人民大学的命题研究专家以及一线辅导名师共同编写而成

■ **详解真题总结规律**

再现历年真题，全面展现题型特点、难点

本书收录了历年考试真题，详解命题规律，诠释高频考点、热点、难点，帮助考生有针对性地复习，从而提升应试能力

■ **命题秘笈倾囊相授**

赠送原命题组组长20年命题秘笈，全面把握命题脉搏

本书赠送原命题组组长命题秘笈，20年命题精华，呕心力作，倾囊相授。让考生全面把握命题重点、难点，掌握命题趋势和出题动态，把握命题方向，从容应考

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

2015考研数学命题人高分策略

历年真题详解与命题思路

数学二

全国考研数学命题研究中心　编著

人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

2015考研数学命题人高分策略. 历年真题详解与命题思路. 数学二 / 全国考研数学命题研究中心编著. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2014.5
ISBN 978-7-115-34808-1

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①全… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第033112号

内 容 提 要

考研数学历年真题是具有代表性的经典复习题目，因此，研习历年考试真题是考生复习备考中必不可少的关键环节，也是考生掌握考试动态，赢得高分的最佳途径。本书收录了 1999~2014 年考研数学二科目历年真题，并进行了详细的解析。精辟阐明解题思路，全面剖析考点、重点、疑点和难点。

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的命题研究专家，以及一线辅导教师共同编写而成，考生不仅可以了解考研中数学考试的全貌，而且可以轻松地掌握有关试题和考试信息，从中发现规律，进一步把握考试的特点及命题的思路，从而从容应考，轻取高分。

本书适用于参加研究生入学考试数学二科目考试的广大考生。

◆ 编　　著　全国考研数学命题研究中心
　责任编辑　李士振
　责任印制　周昇亮

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
　邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：16　　　　　　2014 年 5 月第 1 版
　字数：468 千字　　　2014 年 5 月北京第 1 次印刷

定价：38.00 元

读者服务热线：(010) 81055296　印装质量热线：(010) 81055316
反盗版热线：(010) 81055315
广告经营许可证：京崇工商广字第 0021 号

考研辅导丛书专家委员会

前 言

德国大数学家高斯曾说过:“数学是科学的皇后。”毫无疑问,数学是对人类思维能力要求最高的学科,它不仅范围广,内容多,而且深刻体现出了人类的聪明才智所能达到的最高境界。全国硕士研究生入学考试数学一科是考查考生的数学功底、思维能力,并不是要求考生进行高深的数学基础理论研究,但却是对考生在一定层次上进行各种思维能力,复习过程中包括抽象思维能力、逻辑推理能力等的综合性检验。既然如此,要考好数学,思维能力必须有质的飞跃。无论如何,考生首先要全面细致地研究全国硕士研究生入学考试的数学大纲。自从考研招生实行全国统考以来,数学考试命题是严格按照国家考试中心制定的“数学考试大纲”所规定的考试内容和考试要求来进行的。大纲对考试性质、要求、方法、内容、试题类别、适用专业等进行了详细阐述,是广大考生备考的指导性文件和根本依据。考生必须从中全面领会考试精神,尤其是明确考试范围,以便有的放矢。大纲所要求的知识点或考点,考生一定要熟记在心,不要求的内容,应该跳过,不要浪费精力。同时要注意,不光应分析研究本年最新的大纲,还要研究去年乃至上一年的大纲,从比较中发现其变化。

自 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学考试实行统考以来,已有 28 载。历年考试试题是考生了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料,也是命题组专家的智慧结晶。本书严格按照最新的《数学考试大纲》的要求和精神编写。本书对历年考研真题逐题给出了详细解答,并尽量做到一题多解。只要认真分析研究,了解消化和掌握历年试题,便能发现数学考试试题总是有稳定的、普遍的、反复出现的共性。考生也可以发现命题特点和趋势,找出知识之间的有机联系,总结每部分内容的考查重点、难点,归纳常考题型,凝练解题思路、方法和技巧,明确复习方向,从而真正做到有的放矢,事半功倍。

本书特点如下。

一、原命题组成员联袂,一线教授和专家亲自执笔,内容权威

本书是广大数学教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶,是一份宝贵的资料。本书囊括 1999 ~ 2014 年的完整的真题。旨在让考生对历年考研真题有一个完整的把握,从总体上了解考研数学命题的基本形式和题型规律。其中的每一道试题,既反映了考研数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求,又蕴含着命题的指导思想、基本原则和趋势。因此,对照考试大纲分析、研究这些试题,考生不仅可以了解考研中数学考试的全貌,而且可以轻松地掌握有关试题和考试信息,从中发现规律,归纳出各部分内容的重点、难点,以及常考的题型,进一步把握考试的特点及命题的思路和规律,从而从容应考,轻

取高分。

二、多角度、全方位综合分析历年真题的重点和难点,把握命题动态

本书对每道试题不仅给出了详解,还在逐题解析历年考研数学试题的基础上,给重要的、易丢分的题目做了评注。不仅分析了每题考查的知识点和难点,还对试题类型、各类型试题的解法进行了归纳和总结,使考生能举一反三,触类旁通。同时通过具体题目,分析考生常犯的错误,让考生引以为戒。各考点前都配有知识点和复习方法的归纳总结。

最后祝愿各位考生都能圆名校之梦!

编者　于北大燕园

目 录

第一篇

2014 年考研数学二试题及答案与解析

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题:1 ~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)当 $x\to 0^+$ 时,若 $\ln^\alpha(1+2x)$,$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小,则 α 的取值范围是　(　　)

(A)$(2,+\infty)$　　(B)$(1,2)$

(C)$(\frac{1}{2},1)$　　(D)$(0,\frac{1}{2})$

(2)下列曲线有渐近线的是　(　　)

(A)$y=x+\sin x$　　(B)$y=x^2+\sin x$

(C)$y=x+\sin\frac{1}{x}$　　(D)$y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

(3)设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数,$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$,则在区间 $[0,1]$ 上　(　　)

(A)当 $f'(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant g(x)$　　(B)当 $f'(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$

(C)当 $f''(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant g(x)$　　(D)当 $f''(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$

(4)曲线 $\begin{cases}x=t^2+7\\y=t^2+4t+1\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是　(　　)

(A)$\frac{\sqrt{10}}{50}$　　(B)$\frac{\sqrt{10}}{100}$　　(C)$10\sqrt{10}$　　(D)$5\sqrt{10}$

(5)设函数 $f(x)=\arctan x$,若 $f(x)=xf'(\xi)$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=$　(　　)

(A)1　　(B)$\frac{2}{3}$　　(C)$\frac{1}{2}$　　(D)$\frac{1}{3}$

(6)设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数,且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,则　(　　)

(A)$u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得

(B)$u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部上取得

(C)$u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得,最小值在 D 的边界上取得

(D)$u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得,最大值在 D 的边界上取得

(7)行列式 $\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=$

(A)$(ad-bc)^2$　　(B)$-(ad-bc)^2$

(C)$a^2d^2-b^2c^2$　　(D)$b^2c^2-a^2d^2$

(8)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量,则对任意常数 k,l,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的　(　　)

(A)必要非充分条件　　(B)充分非必要条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分也非必要条件

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}dx =$ ________.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数,且 $f'(x)=2(x-1), x\in[0,2]$,则 $f(7)=$ ________.

(11) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数,则 $dz\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=$ ________.

(12) 曲线 L 的极坐标方程是 $r=\theta$,则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程是________.

(13) 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1]$ 上,若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$,则该细棒的质心坐标 $\bar{x}=$ ________.

(14) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1,则 a 的取值范围是________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分,请将解答写在答题纸指定位置上,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$,且 $y(2)=0$,求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$,计算 $\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$.

(18)(本题满分 10 分)设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数,$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$. 若 $f(0)=0, f'(0)=0$,求 $f(u)$ 的表达式.

(19)(本题满分 10 分)设函数 $f(x), g(x)$ 的区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)$ 单调增加,$0\leqslant g(x)\leqslant 1$. 证明:

(Ⅰ) $0\leqslant\int_a^x g(t)dt\leqslant x-a, x\in[a,b]$,

(Ⅱ) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)dx$.

(20)(本题满分 11 分)设函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}, x\in[0,1]$. 定义数列:

$f_1(x)=f(x), f_2(x)=f(f_1(x)),\cdots, f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\cdots$,记 S_n 是由曲线 $y=f_n(x)$,直线 $x=1$ 及 x 轴所围成平面图形的面积,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nS_n$.

(21)(本题满分 11 分)已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$,且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$,求曲线 $f(x,y)=0$ 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积.

(22)(本题满分 11 分)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(23)(本题满分 11 分)证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.

2014 年考研数学二试题答案速查

一、选择题

(1)B　(2)C　(3)D　(4)C　(5)D　(6)A　(7)B　(8)A

二、填空题

(9)$\frac{3\pi}{8}$　(10)1　(11)$-\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\mathrm{d}y$　(12)$y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$　(13)$\frac{11}{20}$　(14)$[-2,2]$

三、解答题

(15)$\frac{1}{2}$　(16)当 $x=1$ 时,$y''=-1<0$,故 $x=1$ 为极大值点,极大值为 $y=1$;

当 $x=-1$ 时,$y''=2>0$,故 $x=1$ 为极小值点,极大值为 $y=0$。

(17)$-\frac{3}{4}$　(18)$f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u$。

(19)(Ⅰ)因为 $0\leqslant g(x)\leqslant 1,x\in[a,b]$

所以有 $\int_a^x 0\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x 1\mathrm{d}t$,即 $0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a,x\in[a,b]$

(Ⅱ)则 $\varphi'(x)\geqslant f(x)g(x)-f(x)g(x)=0,x\in[a,b]$

又 $\varphi(a)=0$,从而可知 $\varphi(b)\geqslant\varphi(a)=0$,即$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$,得证。

(20)1　(21)$(2\ln 2-\frac{5}{4})\pi$

(22)(Ⅰ)$\boldsymbol{\xi}=(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$

(Ⅱ)综上可得,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-k_1+2 & -k_2+6 & -k_3-1\\ 2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1\\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}$(其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数)。

(23)由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=n,\lambda_2=\cdots\lambda_n=0$;

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$ 得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\mu_1=n,\mu_2=\cdots\mu_n=0$;

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化;

又 $r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B})=1$,对应有 $n-1$ 个特征向量,故 $\boldsymbol{B}$ 也可对角化。

综上,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 特征值相同且均可对角化,故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似,得证。

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、选择题

1.【答案】　B

【考点提示】　等价无穷小

【解析】　当 $x\to0^+$ 时，$\ln^\alpha(1+2x)\sim(2x)^\alpha$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}\sim(\frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{\alpha}}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{\alpha}}x^{\frac{2}{\alpha}}$

因为 $\ln^\alpha(1+2x)$ 和 $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，

所以有 $\alpha>1$ 且 $\frac{2}{\alpha}>1$，解得 $1<\alpha<2$，即 $\alpha\in(1,2)$。正确答案为 B。

2.【答案】　C

【考点提示】　曲线的斜渐近线

【解析】　曲线的斜渐近线为 $y=ax+b$，其中 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$。垂直和水平渐进线分别为 $x=c$ 和 $y=d$，其中 $c=\lim\limits_{y\to\infty}f(x)$，$d=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$. 四个选项中，

(A) $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在，c 和 d 也不存在；

(B) 和 (D) $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ 不存在，c 和 d 也不存在；

(C) $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\right)=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$，$c$ 和 d 也不存在。

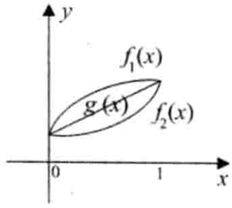
综上，只有选项 C 有斜渐近且为 $y=x$。

3.【答案】　D

【考点提示】　导数几何意义的应用

【解析】　$f'(x)$ 和 $f''(x)$ 分别对应函数 $f(x)$ 所表示曲线的斜率和凸凹性；

$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x=[f(1)-f(0)]x+f(0)$，表示 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间内两个端点的连线。据此考虑作如下图：



根据曲线形状可知，$f_1'(x)\geqslant0$，$f_2'(x)\geqslant0$，$f_1''(x)\leqslant0$，$f_2''(x)\geqslant0$，$f_2(x)\leqslant g(x)\leqslant f_1(x)$ 由此可判断，当 $f''(x)\leqslant0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$，正确答案为 D。

4.【答案】　C

【考点提示】 曲线的曲率与曲率半径

【解析】 由曲线参数方程可得 $x_t'=2t,y_t'=2t+4$,

则 $y_x'=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{t+2}{t},(y_x')_t'=-\dfrac{2}{t^2},y_x''=\dfrac{(y_x')_t'}{x_t'}=-\dfrac{1}{t^3}$

根据曲率公式 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$得 $K_{t=1}=\dfrac{\left|-\dfrac{1}{1^3}\right|}{(1+3^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{10\sqrt{10}}$。

所以曲率半径为 $10\sqrt{10}$,选 C。

5.【答案】 D

【考点提示】 函数的极限

【解析】 由 $f(x)=\arctan x,f(x)=xf'(\xi)$得,

$\arctan x=x\cdot\dfrac{1}{1+\xi^2}$,即 $\xi^2=\dfrac{x-\arctan x}{\arctan x}$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\xi^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{3(1+x^2)}=\dfrac{1}{3}$,正确答案为 D。

6.【答案】 A

【考点提示】 二元函数的极值与最值

【解析】 令 $A=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2},B=\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y},C=\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$

则依题意可知,$B\neq0,A+C=0$,

故而 $AC-B^2=-A^2-B^2<0$,即区域 D 内无极值,正确答案为 A。

7.【答案】 B

【考点提示】 行列式求值

$$\text{原行列式}=\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}\xlongequal{r_4\Leftrightarrow r_1}-\begin{vmatrix}c&0&0&d\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\0&a&b&0\end{vmatrix}\xlongequal{c_3\Leftrightarrow c_1}\begin{vmatrix}0&0&c&d\\0&0&a&b\\d&c&0&0\\b&a&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-)^{2\cdot2}\begin{vmatrix}d&c\\b&a\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}c&d\\a&b\end{vmatrix}=(ad-bc)(bc-ad)=-(ad-bc)^2\text{,即正确答案为 B。}$$

8.【答案】 A

【考点提示】 向量组的线性相关性

【解析】 由$(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$可知,因为$(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)$是二维向量组,而$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$是三维向量组,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,无法推出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,条件不充分;

而当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关时,因为 $\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\neq0$,所以 $r(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=2$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,条件充分。

综上,正确答案为 A。

二、填空题

9.**【答案】** $\frac{3\pi}{8}$

【考点提示】 广义积分

【解析】 $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\lim\limits_{b\to-\infty}\int_{b}^{1}\frac{1}{(x+1)^2+4}dx=\lim\limits_{b\to-\infty}\frac{1}{4}\int_{b}^{1}\frac{1}{1+(\frac{x+1}{2})^2}dx$

$$=\lim_{b\to-\infty}\frac{1}{2}\int_{b}^{1}\frac{1}{1+(\frac{x+1}{2})^2}d\frac{x+1}{2}=\lim_{b\to-\infty}\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\bigg|_{b}^{1}=\lim_{b\to-\infty}\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{b+1}{2})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})=\frac{3\pi}{8}。$$

10.**【答案】** 1

【考点提示】 函数的周期性、奇偶性

【解析】 因为$f(x)$是周期为 4 的可导奇函数,

所以$f(7)=f(2\cdot4-1)=f(-1)=-f(1)$,且$f(0)=0$。

由$f'(x)=2(x-1)$可得$f'(x)=x^2-2x+c$,

又$f(0)=0$,则$c=0$,即$f(x)=x^2-2x$且$f(1)=-1$,

则$f(7)=-f(1)=1$。

11.**【答案】** $-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy$

【考点提示】 隐函数求导

【解析】 方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$两边对 x 求导可得,

$2ye^{2yz}\frac{\partial z}{\partial x}+1+\frac{\partial z}{\partial x}=0$,解得$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2ye^{2yz}+1}$,

两边再对 y 求导可得,$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y+2ze^{2yz}}{2ye^{2yz}+1}$

当$(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$时,$z=0$,则$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}$,$\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}$

$dz=-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy$。

12.**【答案】** $y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$

【考点提示】 函数的坐标转换、曲线的切线方程

【解析】 极坐标方程 $r=\theta$ 用直角坐标系表示为 $\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$,

两边对 x 求导可得,$\frac{x+y\cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x\cdot y'-y}{x^2+y^2}$

又点$(r,\theta)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,即为$(x,y)=(0,\frac{\pi}{2})$,代入上式可得 $y'\bigg|_{(0,\frac{\pi}{2})}=-\frac{2}{\pi}$

从而切线方程为 $y-\frac{\pi}{2}=-\frac{2}{\pi}(x-0)$,即 $y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$。

13.【答案】 $\frac{11}{20}$

【考点提示】 定积分的应用

【解析】 因为 $\int_0^1(-x^2+2x+1)\mathrm{d}x=(-\frac{1}{3}x^3+x^2+x)\Big|_0^1=\frac{5}{3}$,

$\int_0^1 x(-x^2+2x+1)\mathrm{d}x=(-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1=\frac{11}{12}$

所以质心的坐标为 $\bar{x}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}}=\frac{11}{20}$。

14.【答案】 $[-2,2]$

【考点提示】 二次型的矩阵、惯性指数

【解析】 题设二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$,设其三个特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,则 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=a^2-4$

因为题设二次型的负惯性指数为1,所以有且只有一个特征值为负值,不妨设 $\lambda_1<0$,则 $\lambda_2\geqslant 0,\lambda_3\geqslant 0$,从而有 $|A|=a^2-4\leqslant 0$,即 $-2\leqslant a\leqslant 2$。

当 $|A|=a^2-4=0$,即 $a=\pm 2$ 时,

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-a\\0&\lambda+1&-2\\-a&-2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)-a^2(\lambda+1)$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)-4(\lambda+1)=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$$

则 $\lambda_1=-3,\lambda_2=3,\lambda_3=0$,满足题意。故综上有,$-2\leqslant a\leqslant 2$。

三、解答题

15.【考点提示】 求函数的极限

【解析】 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}[x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x})=\lim_{t\to0+}\frac{\mathrm{e}^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0+}\frac{\mathrm{e}^t-1}{2t}=\frac{1}{2}。$$

16.【考点提示】 函数的极值

【解析】 由 $x^2+y^2y'=1-y'$ 得 $(1+y^2)\mathrm{d}y=(1-x^2)\mathrm{d}x$,

两边积分得,$y+\frac{1}{3}y^3=x-\frac{1}{3}x^3+C$