俄罗斯数学精品译丛

俄罗斯
立体几何问题集

□ [俄]波拉索洛夫 编著
□ 周春荔 译

◆ 数学奥林匹克
◆ 世界看中国
◆ 中国学俄罗斯

- 中国是数学奥林匹克大国
- 俄罗斯是数学奥林匹克强国
- 中国有世界上人数最多的数学奥林匹克选手
- 俄罗斯有世界上最优秀的数学奥林匹克选手
- 中国的数学奥林匹克训练题花样翻新
- 俄罗斯的数学奥林匹克训练题最具原创性
- 中国全民学奥数
- 俄罗斯精英学奥数

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

ELUOSI LITI JIHE WENTIJI

俄罗斯
立体几何问题集

□ [俄]波拉索洛夫 编著
□ 周春荔 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书提供了俄罗斯在中学，其中包括在专门化的学校学习的几乎所有立体几何的问题及各题的提示.

本书适用于大学、中学师生和数学奥林匹克选手及教练员参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

俄罗斯立体几何问题集/(俄罗斯)波拉索洛夫编著；周春荔译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.3

ISBN 978－7－5603－4544－4

Ⅰ.①俄…　Ⅱ.①波…　②周…　Ⅲ.①立体几何　Ⅳ.①O123.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 301878 号

书名：Задач и по СТЕРЕОметрии.

作者：Прасолов В. В

Прасолов В. В

Исключительное авторское право Произведения перевода на китайский язык приобретено издательством《Харбинский политехнический университет》при посредничестве Китайского агентства по авторским правам и Российского авторского общества.

本作品中文专有出版权由中华版权代理中心和俄罗斯著作权协会代理取得，由哈尔滨工业大学出版社独家出版.

版权登记号　黑版贸审字　08－2009－066 号

策划编辑　刘培杰　甄淼淼　张永芹
责任编辑　张永芹　王勇钢
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 22.75　字数 510 千字
版　　次　2014 年 3 月第 1 版　2014 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－4544－4
定　　价　58.00 元

序　言

本书同前面出版的书《平面几何问题集》和《代数、算术和分析问题集》一起，组成为了物理一数学班级学习的联合的数学问题集. 在这些书中实际上提供了在学校供专门的班级学习的全部数学内容. 本问题集的根据是由《量子》杂志的问题，在不同时期提供的数学奥林匹克问题，数学竞赛试题库和数学小组中的问题汇集编成.

本书和前两本书一样，也照例给出了详尽的栏目. 问题分为22章，每章中由若干节组成. 分类的根据是通常的解题方法，但在许多情况下不得不按外部特征来叙述. 这种详尽分类法的主要目的——在于帮助读者在这样大的问题集中检索目标. 书后提供了详细的名词索引，也是为此目的服务的.

在解立体几何问题时经常利用平面几何的某些事实. 在引用这样的事实时指出了对应的问题在《平面几何问题集》(M：МЦНМО，2007)一书中的编号.

本书和上面提到的两个问题集的电子文稿在因特网中可以找到，地址 http://www.mccme.ru/prasolov/. 在电子文稿中将改正过显著的错误和印错的字.

目　录

第 1 章　空间中的直线和平面

基础知识

在空间的两条直线，如果它们在同一平面内且不相交，称它们是平行的直线.

在空间的两个平面，如果它们不相交，称它们是平行的平面.

直线与平面，如果它们不相交，就称为直线与平面平行.

附注．同样认为重合的直线（平面）是平行的是方便的；属于平面的直线，也方便的认为它与该平面平行；今后，我们将遵循这些定义.

在空间的两条直线，如果它们不在同一个平面内，就称它们是异面直线.

§1　直线与平面相交

1.1　已知某些直线，同时它们中任两条都相交．证明：要么它们都位于同一平面上，要么它们全都通过同一点.

提示　我们假设，三条已知的直线 a，b 和 c 不在一个平面上．那么直线 c 能交直线 a 和 b 仅在它们的交点．如果直线 d 交直线 a，b 和 c 不同于它们的公共点，则直线 a，b 和 c 位于一个平面上.

1.2　通过已知点 A 总能够引直线与给定的两条异面直线 l_1 和 l_2 相交吗？

提示　我们考察包含点 A 和直线 l_1 的平面 Π_1，以及包含点 A 和直线 l_2 的平面 Π_2．这两个平面不重合（因为直线 l_1 和 l_2 异面）且有公共点 A，所以它们相交于某条直线 l．如果直线 l 不与直线 l_1 和 l_2 中任一条平行，则直线 l 即为所求．在相反的情况下所求的直线不存在．实际上，所求的直线应当既在平面 Π_1 上，又在平面 Π_2 上，所以它应当与直线 l 重合．但直线 l 平行于直线 l_1 和 l_2 之一，所以直线 l 同它不相交.

1.3 三角形 ABC 和 $A_1B_1C_1$ 不在同一张平面上. 已知,直线 AB 和 A_1B_1,BC 和 B_1C_1,AC 和 A_1C_1 两两相交.

a) 证明:这些直线的交点在同一条直线上.

b) 证明:直线 AA_1,BB_1,CC_1 共点或平行.

提示 a) 指出的直线的交点属于三角形 ABC 和 $A_1B_1C_1$ 所在平面的交线.

b) 直线 AB 和 A_1B_1 相交,所以点 A,B,A_1,B_1 在同一平面上. 类似可得点 A,C,A_1,C_1 在同一平面上以及点 B,C,B_1,C_1 也在同一平面上. 这三张平面的交线为 AA_1,BB_1 和 CC_1. 所考察的三张平面要么具有公共点(当指出的直线相交于这个点时),要么不具有公共点(当指出的直线平行时).

1.4 证明:存在无穷多条直线同时与三条给定的两两异面的直线 a,b 和 c 都相交.

提示 通过直线 a 作一个平行于直线 b 的平面,和作一个平行于直线 c 的平面. 通过直线 a 作不同于这两个平面(或一个平面,如果直线 a,b 和 c 平行于同一个平面时)的任一个平面. 它们交直线 b 和 c 于点 B_1 和 C_1. 如果直线 B_1C_1 不平行于直线 a,那么这条直线为所求. 但可能出现平行于直线 a 的直线 B_1C_1 不多于所作平面中的一个. 事实上,如果还有一条这样的直线 B_2C_2,则 B_1C_1 和 B_2C_2 都平行于直线 a,所以它们位于同一平面上. 但此时直线 b 和 c 共面. 得出矛盾.

附注 以直线 a,b 和 c 平行于同一个平面或者不存在同时与它们相交的直线为转移,发觉要么是单叶双曲面,要么是双曲抛物面(参见问题 21.14 和 21.15).

§2 异面直线之间的角

1.5 求立方体两个相邻界面的异面的对角线之间的角.

提示 求立方体 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 的对角线 AB_1 和 DB 之间的角. 因为 $B_1D_1 /\!/ BD$,这个角等于直线 AB_1 与 B_1D_1 之间的角. 三角形 AB_1D_1 是等边三角形,所以 $\angle AB_1D_1=60°$.

1.6 已知立方体 $ABCDA_1B_1C_1D_1$. 求直线 A_1B 和 AC_1 之间的角.

提示　三角形 A_1BD 是等边三角形，并且它的各顶点与点 A 等距离，由它的各顶点与点 C_1 也等距离. 所以直线 AC_1 垂直于这个三角形所在的平面. 特别地，它垂直于直线 A_1B.

§3　直线与平面之间的角

直线 l 不与平面 Π 垂直也不与平面 Π 平行，这条直线与平面之间的角，是指这条直线与它在平面 Π 的垂直投影之间的角. 如果 $l\perp\Pi$，则直线与平面之间的角是直角，而如果 $l\parallel\Pi$，则直线与平面之间的角是零度的角.

1.7　设直线 l 交平面 Π 于点 O. 证明：直线 l 与平面 Π 之间的角，就是直线 l 与位于平面 Π 上的直线之间的角中的最小的角.

提示　考察在平面 Π 上且通过点 O 的直线 m（不同于直线 l 在平面 Π 上的射影）的情况就够了. 设 A 是直线 l 上不同于点 O 的点，A' 是点 A 在平面 Π 上的射影. 在直线 m 上选取点 B，使得 $OA'=OB$. 显然 $AB>AA'$，因为斜线长长于垂线长. 在三角形 AOB 和 AOA' 中边 AO 是公共边，$OB=OA'$ 和 $AB>AA'$，所以 $\angle AOB>\angle AOA'$.

1.8　在空间给定两个相交的平面 α 和 β. 在它们的交线上已知点 A. 证明：在平面 α 上所有通过点 A，且与平面 β 形成最大角的直线，与平面 α 和 β 的交线垂直.

提示　设 l 是在平面 α 上且通过点 O 的直线. 在直线 l 上标出长为 1 的线段 AB. 设 B' 是点 B 在平面 β 上的射影，O 是点 B 在平面 α 和 β 的交线上的射影. 则 $\sin\angle BAB'=BB'=OB\sin\angle BOB'$. 这里 $\sin\angle BOB'$ 是平面 α 和 β 之间的角（这个角是固定的）的正弦并且 $OB\leqslant AB$，同时只当点 O 与点 A 重合时达到相等. 所以，当直线 l 垂直于平面 α 和 β 的交线时 $\sin\angle BOB'$ 最大.

§4　同直线和平面形成等角的直线

1.9　直线 l 同平面 Π 上的两条相交直线 l_1 和 l_2 成等角，并且直线 l 不与平面 Π 垂直. 证明：直线 l 在平面 Π 上的射影也同直线 l_1 和 l_2 成等角.

提示　只需考察直线 l 通过直线 l_1 和 l_2 的交点 O 的情况. 在直线 l 上选取

异于点 O 的一点 A，考察它在直线 l_1 和 l_2 及在平面 Π 上的射影 A_1，A_2 和 A'. 由 $\angle AOA_1$ 和 $\angle AOA_2$ 相等，得出 $OA_1 = OA_2$. 根据三垂线定理 $A'A_1 \perp OA_1$ 和 $A'A_2 \perp OA_2$. 直角三角形 $OA'A_1$ 和 $OA'A_2$ 具有公共的斜边且直角边 OA_1 和 OA_2 相等. 因此 $A_1A' = A_2A'$，这意味着 $\angle A'OA_1 = \angle A'OA_2$.

附注 由解法也看到，逆论断是对的：如果直线 l 在平面 Π 上的射影同直线 l_1 和 l_2 成等角，则直线 l 本身也同直线 l_1 和 l_2 成等角.

1.10 证明：直线 l 同两条相交直线成等角，当且仅当它垂直于这两条直线间的角的两条平分线中的一条.

提示 设 Π 是包含已知相交直线的平面. 当直线 l 垂直于这个平面的情况，显然. 所以我们将认为直线 l 不垂直于这个平面. 根据问题 1.9 直线 l 在平面 Π 上的射影 l' 是已知直线之间的两个角平分线之一. 直线 l' 垂直于另一条角平分线，所以 根据三垂线定理直线 l 也垂直于另一条角平分线.

1.11 平面 Π_1 和 Π_2 相交于直线 l. 在这两个平面上选择点 A_1 和 A_2. 证明：直线 A_1A_2 同平面 Π_1 和 Π_2 成等角，当且仅当点 A_1 和 A_2 与直线 l 距离相等.

提示 直线 A_1A_2 同平面 Π_1 和 Π_2 成等角，当且仅当它同垂直于这两个平面的直线成等角. 根据问题 1.10 后一个条件等价于，直线 A_1A_2 垂直于这两条直线之间两个角平分线中的一个，即它平行于平分平面 Π_1 和 Π_2 间的二面角的两个角平分面中的一个. 但平行于角平分面的平面，与平面 Π_1 和 Π_2 相交于与直线 l 等距离的两条直线.

1.12 证明：同位于平面 Π 上的三条两两相交的直线两两成等角的直线 l，垂直于这个平面.

提示 可以认为，三条已知直线 l_1，l_2 和 l_3 相交于一点. 根据问题 1.10 直线 l 垂直于这些直线之间任三个角的平分线. 但直线 l_1 和 l_2 之间的角的平分线不能与直线 l_2 和 l_3 之间角的平分线重合. 因此，直线 l 垂直于平面 Π 的两条相交的直线，所以它垂直于平面 Π.

1.13 证明：对不位于同一平面的任意三条直线，引的直线同它们成等角. 通过已知点能够引多少条这样的直线？

提示　答:4 条直线. 可以认为已知直线相交于一点. 设 a_1 和 a_2 是第一和第二条直线间的角的平分线,b_1 和 b_2 是第二和第三条直线间的角的平分线. 根据问题 1.10 直线同三条已知直线成等角,当且仅当它垂直于某一直线对 a_i 和 b_j,也就是垂直于包含这些直线的平面. 全部有 4 个不同的直线对 a_i 和 b_j. 这些直线对给出的所有平面都是不同的,因为直线 a_i 不能在包含直线 b_1 和 b_2 的平面上.

参见问题 1.16.

§5　异面直线

1.14　证明:对任意两条异面直线存在唯一的一条端点在这两条直线上且与这两条直线垂直的线段.

提示　设直线 l 垂直于直线 l_1 和 l_2. 通过直线 l_1 作平行于直线 l 的平面. 这个平面同直线 l_2 的交点是需要的线段的一个端点;这个线段本身平行于直线 l.

问题 1.14 的线段(它所在的直线)叫作这两条异面直线的公垂线.

1.15　已知三条两两异面的直线 a,b 和 c,它们不平行于同一张平面. 证明:存在唯一的平行于直线 c 的线段,端点位于直线 a 和 b 上.

提示　通过直线 a 引平行于直线 c 的平面 Π. 这个平面交直线 b 于某个点 B. 通过点 B 作平行于直线 c 的直线,在平面 Π 上,所以它交直线 a 于某个点 A. 线段 AB 即为所求.

1.16　在异面直线 l_1 和 l_2 上选取点 O_1,A_1 和 O_2,A_2,使得 O_1O_2 是这两条异面直线的公垂线. 证明:直线 A_1A_2 同直线 l_1 和 l_2 成等角,当且仅当 $O_1A_1=O_2A_2$.

提示　通过点 O_2 引直线 l'_1 平行于 l_1. 作包含直线 l_2 和 l'_1 的平面 Π,我们考察点 A_1 在这个平面上的射影 A'_1. 根据问题 1.9 直线 A_1A_2 同直线 l_2 和 l'_1 成等角,当且仅当直线 A'_1A_2 同直线 l_2 和 l'_1 成等角. 最后的条件等价于 $O_2A_2=O_2A'_1=O_1A_1$.

1.17　已知三条两两异面的直线. 证明:存在唯一的平行六面体,它的

三条棱在这些直线上.

提示 通过已知直线的每一条作两个平面：平行于一条剩下的直线的平面，和平行于另一条剩下的直线的平面. 这些平面给出了所求的平行六面体.

1.18 已知三条异面直线. 证明：它们是对自己的公垂线的公垂线.

提示 设 $a' \perp b$ 和 $a' \perp c$，$b' \perp c$ 和 $b' \perp a$，$c' \perp a$ 和 $c' \perp b$. 则 $a \perp b'$ 和 $a \perp c'$，$b \perp c'$ 和 $b \perp a'$，$c \perp a'$ 和 $c \perp b'$.

1.19 在异面直线 l_1 和 l_2 的公垂线 O_1O_2 上取点 A. 点 X_1 沿直线 l_1 运动，而点 X_2 是点 X_1 在直线 l_2 上的射影. 证明：所有的平面 AX_1X_2 具有公共直线.

提示 通过点 O_1 引直线 l'_2 平行于直线 l_2，又通过点 O_2 引直线 l'_1 平行于直线 l_1. 由点 X_1 垂直放下在直线 l'_1 和 l'_2 上为 X'_1 和 X'_2. 显然，$X_1X'_2X_2X'_1$ 是矩形. 设通过点 A 引平行于直线 l_1 和 l_2 的平面，交对角线 X_1X_2 于点 X，而交边 $X_1X'_1$ 和 $X_2X'_2$ 于点 Y_1 和 Y_2. 则 $Y_1X : XY_2 = Y_1X_1 : X_2Y_2 = AO_1 : O_2A$，所以，对所有的点 X_1 直线 AX 都是一个.

异面直线 l_1 和 l_2 之间的距离，是指点 A_1 和 A_2 之间的最小的距离，其中点 A_1 在直线 l_1 上，而点 A_2 在直线 l_2 上.

1.20 证明：异面直线 l_1 和 l_2 之间的距离等于它们的公垂线段 A_1A_2 的长.

提示 设 A'_1 和 A'_2 是直线 l_1 和 l_2 上的点，并且线段 $A'_1A'_2$ 不与线段 A_1A_2 重合. 通过直线 l_1 引平行于直线 l_2 的平面，而通过直线 l_2 引平行于直线 l_1 的平面. 这两张平面平行，且它们之间的距离等于线段 A_1A_2 的长. 线段 $A'_1A'_2$ 的端点在这两张平行的平面上，并且 $A'_1A'_2$ 不能是它们的垂线，因为换言之它将是直线 l_1 和 l_2 的第二条公垂线. 因此，线段 $A'_1A'_2$ 的长大于我们考察的平行平面之间的距离，也就是 $A'_1A'_2 > A_1A_2$.

1.21 证明：异面直线 l_1 和 l_2 之间的距离，等于由直线 l_1 同垂直于它的平面 Π 的交点 A 到直线 l_2 在平面 Π 上射影的距离.

提示 通过直线 l_1 引平行于直线 l_2 的平面 Π_1，而通过直线 l_2 引平行于直

线 l_1 的平面 Π_2. 这两个平面平行，且它们之间的距离等于直线 l_1 和 l_2 之间的距离. 平面 Π_2 和 Π 相交的直线 l——是直线 l_2 在平面 Π 上的射影. 由点 A 到直线 l 的距离等于平面 Π_1 和 Π_2 之间的距离，所以它等于直线 l_1 和 l_2 之间的距离.

1.22 四面体 $ABCD$ 的棱 CD 垂直于平面 ABC. 设 M 是棱 BD 的中点，N 是棱 AB 的中点，而点 K 分棱 CD 为 $CK:KD=1:2$. 证明：由直线 CN 到直线 AM 和 BK 距离相等.

提示 我们考察在垂直于直线 CN 的平面上的射影；点 X 的射影将记为 X_1. 三角形 $A_1D_1B_1$ 是等腰三角形，并且 K_1 是它的中线的交点，C_1 和 M_1 是边 A_1B_1 和 B_1D_1 的中点. 所以直线 A_1M_1 和 B_1K_1 是等腰三角形中线的延长线，这意味着，点 C_1 与它们距离等远. 因此，根据问题1.21直线 CN 与直线 AM 和 BK 等距离.

§6 空间的毕达哥拉斯定理

1.23 直线 l 同三条两两垂直的直线成角为 α，β 和 γ. 证明：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

提示 引入坐标系，它的轴平行于三条已知的直线. 在直线 l 上我们取单位长的向量 $\boldsymbol{v}$. 向量 $\boldsymbol{v}$ 的坐标为 (x,y,z)，其中 $x=\pm\cos\alpha$，$y=\pm\cos\beta$ 和 $z=\pm\cos\gamma$. 所以 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=x^2+y^2+z^2=|\boldsymbol{v}|^2=1$.

1.24 半径为 R 的球内取与球心距离为 a 的一点 A. 通过点 A 引三条两两垂直的弦.

a) 求这些弦长的平方和.

b) 求这些弦被点 A 分成的线段长的平方和.

提示 我们考察长方体，它的棱平行于已知的弦，而点 A 和球心 O 是它的相对的顶点. 设 a_1，a_2 和 a_3 是它的棱长；显然 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=a^2$.

a) 如果弦离球心的距离是 x，则它的长的平方等于 $4R^2-4x^2$. 因为由已知弦到点 O 的距离等于长方体界面的对角线，那么所求的平方和等于 $12R^2-4(a_2^2+a_3^2)-4(a_1^2+a_3^2)-4(a_1^2+a_2^2)=12R^2-8a^2$.

b) 如果弦长等于 d，而点 A 与它的中点距离为 a，则被点 A 分得的弦的线段长的平方和等于 $2a^2+\dfrac{d^2}{2}$. 因为由点 A 到已知弦的中点的距离等于 a_1，a_2 和 a_3，