普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学学习指导

农科类

吕雄　吴国荣◎主编

中国农业出版社

教育农业部“十二五”规划教材

全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学学习指导

农科类

吕　雄　吴国荣　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导 / 吕雄，吴国荣主编．—北京：中国农业出版社，2013.8

普通高等教育农业部“十二五”规划教材　全国高等农林院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-17998-1

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①吕…　②吴…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 156511 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100125）

策划编辑　朱　雷　魏明龙

文字编辑　魏明龙

北京市联华印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行

2013 年 8 月第 1 版　2013 年 8 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：14

字数：245 千字

定价：25.00 元

内容提要

本教材是普通高等教育农业部“十二五”规划教材暨全国高等农林院校“十二五”规划教材《高等数学》(农科类)的配套教材．内容为：函数、极限与连续性、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用等．本教材从高等数学的教学目的、知识结构、题型分析和典型例题等方面作了具体分析指导，有助于增强正确理解和掌握知识点的能力与水平；每章都配有自测题，所选题型全面、分类合理、题量适中，以巩固和提高所学内容，检测对知识的掌握情况；最后还对原教材中的习题作了详细解答，有助于学生的学习．

本教材内容具有相对独立性，可作为习题课教材，也可作为教师教学参考书和学生学习高等数学及考研的指导书．

编　写　人　员

主　编　吕　雄　吴国荣

副主编　杨彩琴　周兰锁

编　者　（按姓名笔画排序）

马文斌　吕　雄　刘媛媛

孙鹏哲　吴国荣　周兰锁

杨彩琴　曹学勤

前　言

本教材是普通高等教育农业部“十二五”规划教材暨全国高等农林院校“十二五”规划教材《高等数学》（农科类）的配套教材．内容包括函数、极限与连续性、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用等．

高等数学是高等院校各专业学生必修的重要基础理论课之一，理解并掌握好高等数学的基础知识、基本理论、基本运算及基本方法，对后继课程的学习及学生基本素质与数学素养的提高有着极其重要的作用，对其今后的发展与提高有着深远的影响．

本教材可作为高等学校农林类及相关各专业高等数学课程的习题课教材，也可作为教师教学参考书和学生学习高等数学及考研的指导书．

编写过程中，在内容的安排上我们主要基于下述几点：

一、教学目的与要求和知识概要

通过各章的教学目的与要求、知识概要，用很短的时间了解教学要求和主要内容，以便于理解、记忆、掌握、巩固所学知识及知识点间的联系．

二、题型分析和典型例题

通过题型分析和典型例题的精解，弄清分析问题和解决问题的过程，了解重点和难点，解决疑难问题，培养学生用线性代数的思想和方法分析问题、解决问题的能力．

三、自测题

每章都配有自测题，所选题型全面、分类合理、题量适中，以检测对课程内容的掌握情况，发现不足，进一步巩固和提高所学知识．

四、习题解答

对原配套教材中的习题及总习题作了详细解答，有助于学生的学习．

参加本教材编写工作的有吕雄、吴国荣、马文斌、杨彩琴、刘媛媛、周兰锁、曹学勤、孙鹏哲等，都是具有丰富教学经验的一线教师．本教材的编写大纲、编写细则与要求、统稿及编写的组织工作等均由吕雄完成．

由于编者水平有限，不足、疏漏、错谬之处在所难免，敬请专家、同行和读者批评指正．

编　者

2013年5月

目　　录

第一章

函　　数

第一节　教学目的与要求

1. 理解平面直角坐标系和极坐标系的概念，掌握二者之间相互转化，根据需要能够熟练建立恰当的坐标系．

2. 理解集合、区间、邻域的概念(包括去心邻域、左邻域和右邻域的概念)，掌握集合运算(交、并、补、差)．

3. 理解函数的概念(包括反函数、复合函数、初等函数、分段函数、显函数、隐函数的概念)，掌握函数的定义域以及表示法，能够作一些简单函数的草图．

4. 了解函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性，掌握基本初等函数的性质及其图形．

5. 根据常数和基本初等函数会分析复合函数结构．对分段函数需要掌握分段点附近函数表达式的特点．

6. 掌握函数的参数方程表示．对函数解析表达式根据需要能够进行恰当的整理．

7. 会在实际问题中建立简单的函数关系式，能把函数关系应用于农林生产中．

第二节　本章概要

本章内容主要是函数概念，这是微积分最基本的概念．这一章的主要内容和联系如图 1－1 所示：

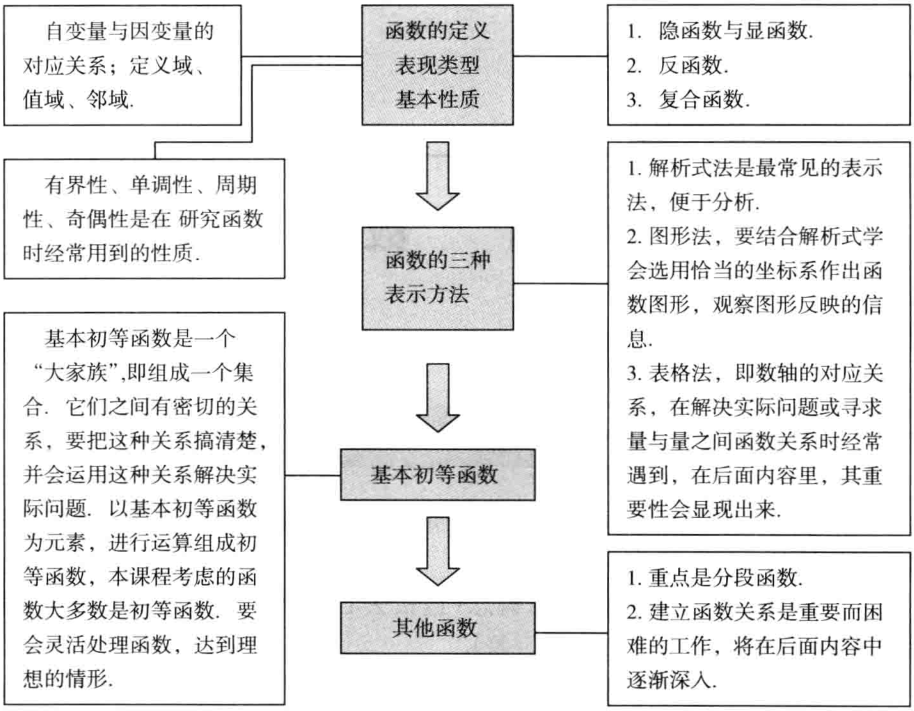

图 1-1

一、坐标系

1. 平面直角坐标系

在同一个平面上互相垂直且有公共原点的两条数轴构成**平面直角坐标系**，简称**直角坐标系**．通常，两条数轴分别置于水平位置与铅直位置，取向右与向上的方向分别为两条数轴的正方向．水平的数轴称为 x **轴或横轴**，竖直的数轴称为 y **轴或纵轴**，x 轴或 y 轴统称为**坐标轴**，它们的公共原点 O 称为直角坐标系的原点．x 轴和 y 轴把坐标平面分成**四个象限**，分别称为**第一象限**(还可以写成Ⅰ)、**第二象限**(还可以写成Ⅱ)、**第三象限**(还可以写成Ⅲ)、**第四象限**(还可以写成Ⅳ)．象限以数轴为界，横轴、纵轴上的点及原点不属于任何象限．一般情况下，x 轴和 y 轴取相同的单位长度．

2. 极坐标系

在平面内取一个定点 O，称为**极点**；自极点引一条射线 Ox，称为极轴；再选定一个长度单位、一个角度单位(通常取弧度)及其正方向(通常取逆时针方向)，这样就建立了一个**极坐标系**．对于平面内任何一点 M，用 r 表示线段

OM 的长度，θ 表示从 Ox 到 OM 的角度，r 称为点 M 的**极径**，θ 称为点 M 的**极角**，有序实数对(r, θ)就称为点 M 的**极坐标**，记作 $M(r, \theta)$.

注意：① 一般地，不作特殊说明时，我们认为 $r\geqslant 0$，θ 可取任意实数．

② 当 M 在极点时，它的极坐标为$(0, \theta)$，θ 可取任意值．

3. 曲线的极坐标方程

在平面直角坐标系中，平面曲线 C 可以用方程 $f(x, y)=0$ 表示．同样，在极坐标系中平面曲线 C 也可以用 $f(r, \theta)=0$ 表示．

一般地，在极坐标系中，如果平面曲线 C 上任意一点的极坐标中至少有一个满足方程 $f(r, \theta)=0$，并且坐标适合方程 $f(r, \theta)=0$ 的点都在曲线 C 上，那么方程 $f(r, \theta)=0$ 就称为**曲线 C 的极坐标方程**．

4. 直角坐标系与极坐标系之间的转换

把直角坐标系的原点与极坐标系的极点重合，直角坐标系的 x 轴的正半轴与极坐标系的极轴重合，并在两种坐标系取相同的单位长度．设 M 是平面内任意一点，它的直角坐标是(x, y)，极坐标是(r, θ). 从极坐标 r 和 θ 可以计算出直角坐标：

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta.$$

从直角坐标 x 和 y，也可以计算出极坐标：

$$r^2=x^2+y^2, \quad \tan\theta=\frac{y}{x}(x\neq 0).$$

二、集合的概念

1. 集合的定义

一般的，把具有某种特定性质的事物组成的总体称为**集合**(简称**集**)，组成集合的每一个对象称为该集合的**元素**(简称**元**). 集合中的元素具有确定性、互异性和无序性．

通常用大写字母 A，B，C，…表示集合，用小写字母 a，b，c，…表示集合的元素．集合与元素的关系是属于或不属于的关系．如果元素 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；如果元素 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$.

由数组成的集合称为**数集**．对于数集，有时我们在表示数集的字母的右上角标上“$*$”来表示该数集是排除 0 的集，标上“$+$”来表示该数集是排除 0 与负数的集．常用的数集及记号：

数集	自然数集	整数集	有理数集	实数集
记号	**N**	**Z**	**Q**	**R**

2. 集合通常的表示方法

列举法：将集合的全体元素一一列举出来，写在花括号内，每个元素仅写一次，不考虑顺序．

描述法(也称**表征法**)：将集合中元素所具有的共同属性(或特征)描述出来，写在花括号内．

图示法(也称**韦恩图**)：用封闭曲线(内部区域)表示集合及其关系的图形．

3. 集合的类型

由有限个元素构成的集合称为**有限集**；由无限个元素构成的集合称为**无限集**．

4. 子集、集合的相等

如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 称为集合 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称**集合 A 与集合 B 相等**，记作 $A=B$.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$.

规定：空集是任何集合 A 的子集，即$\varnothing\subseteq A$.

5. 集合的运算

集合与集合之间也有其特定的运算，并、交、差是集合的三种基本运算．

集合的并、交、补的运算满足下列运算法则：交换律，结合律，分配律和对偶律．

在两个集合之间还可以定义直积或笛卡儿(Descartes)乘积．设 A、B 是任意两个集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，组成一个有序对(x, y)，把这样的有序对作为新的元素，它们全体组成的集合称为**集合 A 与集合 B 的直积**，记作 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x, y)\mid x\in A, y\in B\}.$$

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x, y)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$即为 xOy 面上的全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

6. 区间与邻域

区间是常用的一类数集，根据区间的长度分为**有限区间**、**无限区间**．其中有限区间：① **开区间**：(a, b)；② **闭区间**：$[a, b]$；③ **半开区间**：$[a, b)$、$(a, b]$，这里的实数 a，b 称为区间的端点，数 $b-a$ 称为区间的**长度**．如果区间长度是无限长，就称为**无限区间**．其中无限区间：$(a, +\infty)$，$[a, +\infty)$，$(-\infty, b)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, +\infty)$．这里记号$-\infty$(读作**负无穷大**)，记号$+\infty$(读作**正无穷大**).

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间

的场合，我们就简单地称它为“区间”，且常用 I 表示 .

邻域也是常用的一类数集 . 以点 a 为中心的任何开区间称为**点 a 的邻域**，记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta，a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a，\delta)$，即

$$U(a，\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径** .

或者 $$U(a，\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a，\delta)$ 表示：与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体 .

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a，\delta)$，即

$$\mathring{U}(a，\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示从邻域 $U(a，\delta)$ 中去掉数 a.

为了方便，把开区间 $(a-\delta，a)$ 称为 **a 的左 δ 邻域**，把开区间 $(a，a+\delta)$ 称为 **a 的右 δ 邻域** . 当不需要指出邻域的半径时，我们用 $U(a)$、$\mathring{U}(a)$ 分别表示 a 的某邻域和 a 的某去心邻域 .

三、函数的概念及性质

1. 映射概念

定义 1　设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为**从 X 到 Y 的映射**，记作

$$f：X\to Y，$$

其中 y 称为元素 x 在映射 f 下的**像**，并记作 $f(x)$，即

$$y=f(x)，$$

而元素 x 称为 y 在映射 f 下的一个**原像**；集合 X 称为映射 f 的**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{y \mid y=f(x)，x\in X\}.$$

注意：① 映射的两个基本要素是：定义域和对应法则 . 定义域表示映射存在的范围，对应法则是映射的具体表现 .

② 定义中 x 的像是唯一的；但 y 的原像不一定唯一；映射 f 的值域 $f(X)$

是 Y 的一个子集，即 $f(X)\subseteq Y$，不一定 $f(X)=Y$.

三种特殊映射：

(1) 设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f **为 X 到 Y 上的映射或满射**；

(2) 若对 X 中任意两个不同元素，它们的像也不同，即若 x_1，$x_2\in X$ 且 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f **为 X 到 Y 的单射**；

(3) 若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f **为一一映射**或**双射**.

2. 函数的概念

定义 2 设数集 $D\subseteq\mathbf{R}$，则称映射 f：$D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的**函数**，通常简记作

$$y=f(x),\ x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=D$.

函数的两个要素是：定义域和对应法则．函数解析表达方式通常有：显函数和隐函数．

函数 $y=f(x)$ 表示两个变量 y 与 x 之间的关系，这种函数表达方式的特点是：等号左端是因变量的符号，而右端是含有自变量的式子．用这种方式表达的函数称为**显函数**.

如果变量 x 和 y 满足方程 $F(x,\ y)=0$，在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，通过方程 $F(x,\ y)=0$ 总能唯一确定满足条件的 y 与之对应，那么就说方程 $F(x,\ y)=0$ 在该区间内确定了一个满足该条件的**隐函数**．这种函数表达方式的特点是：自变量和因变量会出现在等号的一端．

把一个隐函数化为显函数，称为**隐函数的显化**．显然任何显函数 $y=f(x)$ 均可表示为隐函数的形式：

$$F(x,\ y)=y-f(x)=0,$$

但反之不一定成立．

3. 函数的主要表示方法：表格法、图形法、解析法(公式法)

表格法是将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法．

图形法是在平面直角坐标系中，用点集 $\{(x,\ y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 来表示函数关系的方法．

解析法是用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法．

4. 函数的几种特性

(1) **有界性**：如果存在正数 M，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**；如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

（2）**单调性**：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subseteq D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有① $f(x_1) < f(x_2)$ 成立时，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的；② $f(x_1) > f(x_2)$ 成立时，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的．单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**．

（3）**奇偶性**：设函数 $f(x)$ 的定义域是 D. 如果对于任一 $x \in D$，恒有① $f(-x) = f(x)$ 成立时，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**．如果对于任一 $x \in D$，恒有② $f(-x) = -f(x)$ 成立时，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**．

（4）**周期性**：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得对于任一 $x \in D$，有 $(x \pm T) \in D$，且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的**周期**．通常周期函数的周期是指最小正周期．

5. 函数的参数方程表示

一般地，若参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (t \text{ 是参数})$$

确定 y 与 x 间的函数关系，则称此关系所表达的函数为**由参数方程所确定的函数（即函数的参数方程表示）**.

显函数 $y = f(x)\ (x \in I)$，很容易写成参数方程

$$\begin{cases} x = x, \\ x = f(x) \end{cases} \quad (x \in I).$$

四、初等函数、分段函数

1. 反函数

设函数 $f(x)$ 是定义在 D 上的一一对应的函数，值域为 $f(D)$，若对应关系 g 使得对任意的 $y \in f(D)$，都有唯一的 $x \in D$ 与之对应，且满足 $f(x) = y$，则称 g 是 f 的**反函数**，反函数也记作 $x = g(y) = f^{-1}(y)$.

习惯上，常用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此 $y = f(x)$ 的反函数常记作
$$y = f^{-1}(x),\quad x \in f(D).$$

相对于反函数 $y = f^{-1}(x)$ 来说，原来的函数 $y = f(x)$ 称为**直接函数**．

把直接函数 $y = f(x)$ 和它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上，这两个图形关于直线 $y = x$ 是对称的．

2. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D) \subseteq D_1$，则由下式确定的函数

$$y = f[g(x)],\quad x \in D$$

称为**由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数**，它的定义域为 D，变量 u 称为**中间变量**．

函数 g 与函数 f 构成的复合函数通常记作 $f\circ g$，即

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)].$$

注意：① 这里的 D 是构成的复合函数的定义域，它可以是函数 $u=g(x)$ 的定义域的一个非空子集．② 不是任何两个函数都可以构成一个复合函数．

复合函数单调性的判断：复合函数的单调性由两个函数共同决定．为了记忆方便，我们把它们总结成一个图表：

$y=f(u)$	增 ↗		减 ↘	
$u=g(x)$	增 ↗	减 ↘	增 ↗	减 ↘
$y=f[g(x)]$	增 ↗	减 ↘	减 ↘	增 ↗

以上规律还可总结为："同向得增，异向得减"或"同增异减"．

3. 基本初等函数与初等函数

以下这五类函数统称为基本初等函数：

（1）幂函数：$y=x^{\alpha}$（α 为任意常数）．

（2）指数函数：$y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$），用得较多的是 $y=\mathrm{e}^x$．

（3）对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$），用得较多的是 $y=\ln x$．

（4）三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$．

（5）反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$．

下面是指数函数的一些基本运算法则（a，$b>0$，a，$b\neq1$）：

$$a^x a^y=a^{x+y}；\ (a^x)^y=a^{xy}；\ a^x b^x=(ab)^x；\ a^0=1；\ a^{-x}=\frac{1}{a^x}.$$

下面是对数函数的一些运算法则（a，$b>0$，a，$b\neq1$，x，y 都是正数，$\mu\in\mathbf{R}$）：$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$；$\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$；$\log_a x^{\mu}=\mu\log_a x$；$\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$；$\log_a a=1$；$\log_a 1=0$.

下面是常用的一些三角函数之间的基本关系：

（1）**平方和公式**：

$\cos^2x+\sin^2x=1$；$1+\tan^2x=\sec^2x$；$1+\cot^2x=\csc^2x$.

（2）**倍角公式**：

$\sin2x=2\sin x\cos x$；$\cos2x=\cos^2x-\sin^2x$；$\cos2x=2\cos^2x-1$；