Yan Yuan
燕园教育

2015 考研专家指导丛书

阅卷人点拨考研数学
历届真题考点与题型分类精解
102考点全突破
数学三

赠送MP3光盘

超值赠送

- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

◎ 清华大学　　王　欢
◎ 北京大学　　王德军　主编
◎ 首都师范大学　童　武

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

Yan Yuan

燕园教育

2015考研专家指导丛书

阅卷人点拨考研数学
历届真题考点与题型分类精解
102考点全突破

数学三

超值赠送

- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

清华大学 王欢
北京大学 王德军 主编
首都师范大学 童武

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教育出版中心

图书在版编目(CIP)数据

阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解102考点全突破. 数学三 / 王欢主编. —北京: 中国石化出版社, 2014. 1

ISBN 978-7-5114-2573-7

Ⅰ. ①阅… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第314996号

中国石化出版社出版发行

地址：北京市东城区安定门外大街58号

邮编：100011　电话：(010)84271850

读者服务部电话：(010)84289974

http://www.sinopec-press.com

E-mail:press@sinopec.com

北京柏力行彩印有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

787×1092毫米16开本15.75印张397千字

2014年3月第1版　2014年3月第1次印刷

定价：39.80元(赠送MP3光盘)

前　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高水平人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制定的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。

本套丛书包括：

《考研数学标准模拟试卷精解数学一》
《考研数学标准模拟试卷精解数学二》
《考研数学标准模拟试卷精解数学三》
《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　98考点全突破数学一》
《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　70考点全突破数学二》
《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　102考点全突破数学三》
《阅卷人精讲考研数学高等数学高分强化版》
《阅卷人精讲考研数学线性代数高分强化版》
《阅卷人精讲考研数学概率论与数理统计高分强化版》
《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学一》
《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学二》
《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学三》
《考研数学主观题23天突破500题　数学一》
《考研数学主观题13天突破500题　数学二》
《考研数学主观题22天突破500题　数学三》
《考研数学客观题26天突破1500题　数学一》

《考研数学客观题15天突破1500题　数学二》

《考研数学客观题27天突破1500题　数学三》

《考研数学最后冲刺超越135分　数学一》

《考研数学最后冲刺超越135分　数学二》

《考研数学最后冲刺超越135分　数学三》

本套书的编写特点如下：

1. **配合最新考试大纲，反映最新变化**

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上，力求反映最新考试要求，紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. **注重考试技巧，高效突破难关**

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套丛书进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. **教授亲自主笔，编写阵容强大**

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　　录

第一篇　1997 ~ 2014 年考研数学三试题分类解析

第二篇　2003 ~ 2014 年考研数学三试题

第一篇

1997 ~ 2014 年考研数学三试题分类解析

第一部分　微积分

第一章　函数、极限、连续

考点 1　函数的概念及其特征

(2004 年试题)函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界?(　　).

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

【考点】 函数的极限、有界性

【解析】 本题考查函数极限与有界性的关系:当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 时,则 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内无界. 由题设,

$$f(-1^+)=\lim_{x\to-1^+}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin3}{18},\tag{1}$$

$$f(0^-)=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin2}{4},\tag{2}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty,\tag{3}$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty\tag{4}$$

由(1)~(4)式可知,$(0,1)$,$(1,2)$,$(2,3)$ 内 $f(x)$ 都是无界的,所以选(A).

【评注】 一般地,如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

考点 2　极限概念与性质

1. (2014 年试题)设 $\lim a_n=a$,且 $a\neq0$,则当 n 充分在时有　　(　　)

(A) $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$　　(B) $|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$

(C) $a_n>a-\dfrac{1}{n}$　　(D) $a_n<a+\dfrac{1}{n}$

【考点】 极限的定义

【解析】 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$且$a\neq 0$,

所以$\forall:\varepsilon>0$,∃任意的整数M,使得$\forall n>M$均有$|a_n-a|<\varepsilon$成立.

即$|a|-|a_n|\leqslant|a_n-a|<\varepsilon$,令$\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}$,则可得$|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$,正确答案为 A.

2.（2014 年试题）

求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

【考点】 求函数的极限

【解析】 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x}\cdot\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\ln(1+\dfrac{1}{x})}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x})=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{2t}=\frac{1}{2}.$$

3.（2012 年试题）计算$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

【考点】 求极限

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}e^{x^2}\cdot\dfrac{1-e^{2-2\cos x-x^2}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-(e^{2-2\cos x-x^2}-1)}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-(2-2\cos x-x^2)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+2\cos x-2}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{6x^2}=\frac{1}{12}$$

4.（2007 年试题）极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$________.

【考点】 求极限

【解析】 因$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{2^x\ln2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{2^x(\ln2)^3}=0$,且$\sin x$和$\cos x$均为有界函数,故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=0$$

5.（2000 年试题）设对任意的x,总有$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　).

(A) 存在且等于零　　　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　　　(D) 不一定存在

【考点】 函数的极限

【解析】 本题可采取举反例的方法一一排除干扰项.

令 $\varphi(x)=x-\dfrac{1}{x^2+1}$, $f(x)=x$, $g(x)=x+\dfrac{1}{x^2+1}$,则 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,

$$\lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2+1}=0,$$

但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在,从而可排除(A),(B);

又令

$$\varphi(x)=\arctan(|x|-1),\quad f(x)=\arctan|x|,\quad g(x)=\arctan(|x|+1),$$

则 $$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x),\quad \lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{\pi}{2},$$

因此(C)也可排除. 综上,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$可能存在也可能不存在,所以选(D).

【评注】 本题考查了极限的夹逼定理,但注意,$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,不能推出$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$,$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$存在且相等.

考点3　函数极限的计算

求未定式$\left(\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,1^\infty,0^0,\infty^0\right)$的极限

1. (2012年试题) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$ ________.

【考点】 求极限【解析】 由于$(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\exp\left[\dfrac{1}{\cos x-\sin x}\ln(\tan x)\right]$,而$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\tan x)}{\cos x-\sin x}$

$$\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}\text{型}}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2x}{-\sin x-\cos x}$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\sin x+\cos x)\tan x\cos^2x}=-\sqrt{2}.$$ 因此,原极限值 $=e^{-\sqrt{2}}$.

2. (2011年试题) 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

【考点】 极限的计算无穷小量替换

【解析】 $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-(x+1)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+2\sin x-x^2-2x-1}{x^2[\sqrt{1+2\sin x}+(x+1)]}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-2x-x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

3.（2011 年试题）设 $f(x) = \lim\limits_{t\to 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x) =$ ________.

【考点】　求一元函数的导数

【解析】　先求出 $f(x)$ 的表达式

$f(x) = \lim\limits_{t\to 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}} = x\lim\limits_{t\to 0}[(1+3t)^{\frac{1}{3t}}]^{3x} = xe^{3x}$，

则 $f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = (1+3x)e^{3x}$

4.（2010 年试题）求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【考点】　函数的极限

【解析一】　原式 $= \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{x}}-1}\cdot x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1-\ln x}{x(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1-\ln x}{x\cdot\left(\frac{\ln x}{x}\right)}}$（利用 $x\to 0$ 时，$e^x - 1 \sim x$）

$= e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}} = e^{-1}$

【解析二】　设 $f(x) = (x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$，则 $\ln f(x) = \dfrac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}$.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{(x^{\frac{1}{x}})'}{\frac{1}{x}(x^{\frac{1}{x}}-1)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x(e^{\frac{\ln x}{x}})'}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{xe^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}\right)}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1-\ln x}{x(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1-\ln x}{x}}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)'}{(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)'}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{\ln x - 2}{x^2}}{e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} e^{-\frac{\ln x}{x}}\cdot\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x - 2}{1-\ln x} = -1$$

$\therefore\quad \lim\limits_{x\to +\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$

【评注】　解法二比解法一要复杂些，可见在求极限的过程中，能用无穷小代换的项，尽量先代换了再求解.

5.（2010 年试题）设 $f(x) = \ln^{10}x, g(x) = x, h(x) = e^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有（　　）.

(A) $g(x) < h(x) < f(x)$　　(B) $h(x) < g(x) < f(x)$

(C) $f(x) < g(x) < h(x)$　　(D) $g(x) < f(x) < h(x)$

【考点】　无穷大的比较

【解析】　因为 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln^{10}x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{10\cdot\ln^9 x\cdot\frac{1}{x}}{1} = 10\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln^9 x}{x}$

$$=10\cdot 9\cdot \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^8 x}{x}=\cdots=10!\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

所以,当 x 充分大时,$f(x)<g(x)$.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{x}{10}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{10}e^{\frac{x}{10}}}{1}=\dfrac{1}{10}\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{x}{10}}\to+\infty$,

故当 x 充分大时,$h(x)>g(x)$.

综上可得,当 x 充分大时,$f(x)<g(x)<h(x)$,故正确答案为(C).

【评注】　也可以这么做:$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{10}x}{x}=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[10]{x}}\right)^{10}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{10}x^{-\frac{9}{10}}}\right)^{10}$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[10]{x}}\right)^{10}=0.$$

6.(2009 年试题)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$________.

【考点】　求函数的极限

【解析】　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{\cos x-1}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$

$$=e\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2}$$

$$=e\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}$$

$$=\frac{3}{2}e$$

7.(2008 年试题)求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

【考点】　求函数的极限

【解析一】　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

【解析二】　由洛必达法则得

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{x^2}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}$$

8.(2005 年试题)求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

【考点】　洛必达法则求极限

【解析一】　由洛必达法则有

$$\lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}}{1}=1,$$

从而

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{1-e^{-x}}=1,$$

所以

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x(1+x)-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x(1-e^{-x})}+\lim_{x\to0}\frac{x-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{1-e^{-x}}+\lim_{x\to0}\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\lim_{x\to0}\frac{x}{1-e^{-x}}=1+\lim_{x\to0}\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}$$

$$=1+\lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x}}{2x}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

【解析二】　$原式=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{e^x(1+x)}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x^2+x-1)e^x+1}{x(e^x-1)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x^2+x-1)e^x+1}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2+x-1+2x+1}{x}e^x$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}(x+3)=\frac{3}{2}$$

【评注】　本题应用了等价无穷小代换 $e^x-1\sim x$.

9.(2005 年试题)极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{2x}{x^2+1}=$ ________.

【考点】　求极限

【解析】　令 $y=\frac{2x}{x^2+1}$,因为 $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$,

$$所以原式=\lim_{x\to\infty}x\sin y=\lim_{x\to\infty}xy\lim_{x\to\infty}\frac{\sin y}{y}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=2\cdot1=2$$

10.(2004 年试题)求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)$.

【考点】　洛必达法则、等价无穷小

【解析一】　由题设,

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x^2-(\sin x\cos x)^2}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\frac{1}{4}(\sin2x)^2}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin2x\cos2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x-\frac{1}{2}\sin4x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2-\frac{4}{2}\cos4x}{12x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2(\sin2x)^2}{6x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{4x^2}{x^2}=\frac{4}{3}$$

【解析二】　$原式=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x(1-\sin^2x)}{x^4}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}+1$$

$$=1+2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=1+\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{4}{3}$$

【评注】　此类求极限的题目一般先尽可能用无穷小等价代换进行简化，此题用到了 $\sin x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$. 但是在用无穷小等价代换时应注意：必须是“整体”代换，即乘除项可以直接代换，加减项化成乘除项才能代换.

考点 4　函数极限的逆问题

1. （2014 年试题）设 $P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，当 $x\to 0$ 时，若 $P(x)=\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列试题中错误的是　　（　　）

(A) $a=0$　　(B) $b=1$　　(C) $c=0$　　(D) $d=\frac{1}{6}$

【考点】　无穷小与函数的极限

【解析】　由题设知，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{P(x)-\tan x}{x^3}=0$

由 $\lim\limits_{x\to 0}[P(x)-\tan x]=\lim\limits_{x\to 0}x^3\cdot\frac{P(x)-\tan x}{x^3}=0$，可知 $a=0$；

又 $0=\lim\limits_{x\to 0}\frac{P(x)-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{bx+cx^2+dx^3-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(b-\sec^2 x)+2cx+3dx^2}{3x^2}$，

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sec^2 x=1$，从而 $b=1$.

$$\text{则 } 0=\lim_{x\to 0}\frac{P(x)-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+2cx+3dx^2}{3x^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2\cos^2 x}+\lim_{x\to 0}\frac{2cx+3dx^2}{3x^2}=-\frac{1}{3}+\lim_{x\to 0}\frac{2c+3dx}{3x}$$

从而 $c=0$，且 $0=-\frac{1}{3}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{3dx}{3x}=-\frac{1}{3}+d$，即 $d=-\frac{1}{3}$.

综上知，正确答案为 D.

2. （2010 年试题）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$，则 a 等于（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【考点】　函数的极限

【解析】　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1-e^x}{x}+ae^x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}(ae^x)$

$$\lim_{x\to 0}(-e^x)+a=a-1=1$$

所以 $a=2$，即正确答案为(C).

3. （2004 年试题）若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

【考点】 函数的极限

【解析】 由题设，知 $\lim\limits_{x\to0}(e^x-a)=0$，则 $a=1$，

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=1-b=5,$$

则 $b=-4$.

考点5 数列的极限

1.（2006年试题）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$ ________.

【考点】 数列的极限

【解析一】 令 $u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$，$n=1,2,3,\cdots$

当 $n=2k\ (k\in\mathbf{N})$ 时，

$$u_n=\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^1=1+\frac{1}{2k}=1+\frac{1}{n};$$

当 $n=2k-1\ (k\in\mathbf{N})$ 时，

$$u_n=\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{-1}=\frac{2k-1}{2k}=1-\frac{1}{2k}=1-\frac{1}{n+1}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$.

【解析二】 原式 $=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^0=1$

2.（2002年试题）设常数 $a\neq\frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$ ________.

【考点】 数列的极限

【解析】 由题设，

$$原式=\lim_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}$$

考点6 无穷小量的比较

1.（2013年试题）当 $x\to0$ 时，用 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是（ ）.

(A) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$

(B) $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

(C) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$

(D) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

【考点】 无穷小