

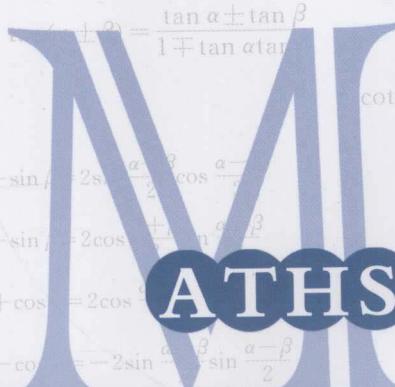
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

杨善兵 著



高等数学

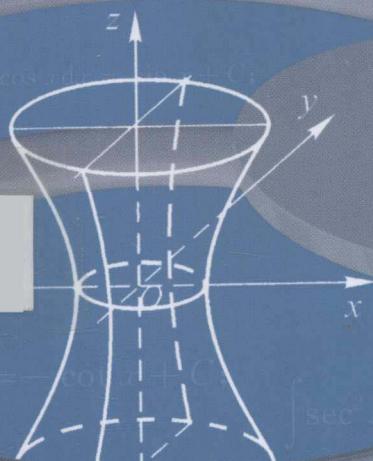
考研与竞赛教程

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS



$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$$

$$\begin{aligned} \int x^a dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad (a \neq -1) \\ \int \frac{1}{r} dr &= \ln |r| + C, \end{aligned}$$



杨善兵 著

高等数学
杨善兵 著
ISBN 978-7-5618-7351-1
I·1002

MATHS

高等数学

考研与竞赛教程

图书在版编目(CIP)数据

高等数学考研与竞赛教程 / 杨善兵著. —镇江：
江苏大学出版社, 2013. 10
ISBN 978-7-81130-574-6

I . ①高… II . ①杨… III . ①高等数学—研究生—人
学考试—教材 ②高等数学—竞赛—高等学校—教材 IV .
①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 240746 号

高等数学考研与竞赛教程

GAODENG SHUXUE KAOYAN YU JINGSAI JIAOCHENG

著 者/杨善兵

责任编辑/吴昌兴

出版发行/江苏大学出版社

地 址/江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编: 212003)

电 话/0511-84446464(传真)

网 址/<http://press.ujs.edu.cn>

排 版/镇江新民洲印刷有限公司

印 刷/句容市排印厂

经 销/江苏省新华书店

开 本/718 mm×1 000 mm 1/16

印 张/15.75

字 数/310 千字

版 次/2013 年 10 月第 1 版 2013 年 10 月第 1 次印刷

书 号/ISBN 978-7-81130-574-6

定 价/32.00 元

如有印装质量问题请与本社营销部联系(电话: 0511-84440882)

前　　言

本书第Ⅰ部分为高等数学研究生考试命题规律,第Ⅱ部分为高等数学研究生考试试题分析,附录为高等数学竞赛试题解析。其中,第Ⅰ部分给出了1997年至2012年研究生考试真题的知识点分布。第Ⅱ部分分章节介绍知识点,本部分第十二章的几个专题是对考研解题的一点心得体会,也是考研命题中出现高频率的或有难度的一些知识内容。书中的第Ⅰ和第Ⅱ部分是集合了著者十几年的教学经验和对考研命题的把握而写成的,书中大量引用研究生考试的真题,分知识块介绍,便于学生快速地理解数学基本概念、掌握解题方法,相信本书会成为广大考研学子的良师益友。附录给出了从1991年至2012年江苏省高等数学竞赛中部分试题的解析。使用本书的读者需要一定的数学基本功,本专著可以作为准备研究生考试或参加高等数学竞赛的学生第二轮复习用书,书中的一些题目具有一定的综合性和技巧性。

本书著者为盐城工学院教师,由于著者学识和水平有限,恳请广大同行专家给出指导和建议。

著　者
2013年7月

目 录

第Ⅰ部分 高等数学研究生考试命题规律

第一章 1997—2012年高等数学(数学一)真题知识点分布 / 003

第二章 1997—2012年高等数学(数学二)真题知识点分布 / 007

第三章 1997—2012年高等数学(数学三)真题知识点分布 / 011

第Ⅱ部分 高等数学研究生考试试题分析

第一章 函数、极限和连续 / 017

第一节 函数极限 / 017

第二节 带参数的函数极限 / 021

第三节 无穷小的比较 / 023

第四节 数列极限 / 027

第五节 连续性和间断点 / 033

第六节 滚近线 / 035

第二章 函数的导数与微分 / 038

第三章 中值定理 / 045

第一节 证明恒等式 / 045

第二节 证明不等式 / 056

第三节 极值和最值 / 061

第四章 不定积分 / 064

第五章 定积分 / 069

第一节 定积分的计算 / 069

第二节 定积分的应用 / 075

第六章 常微分方程 / 081

第七章 向量代数和空间解析几何 / 095

- 第八章 多元函数微分学 / 103
 第九章 重积分 / 113
 第十章 曲线积分和曲面积分 / 122
 第十一章 无穷级数 / 136
 第十二章 专题介绍 / 155
 专题一 函数奇偶性和周期性等性质命题 / 155
 专题二 选择题 / 158
 专题三 导数 $\frac{dy}{dx}$ 杂例 / 164
 专题四 求函数表达式 / 167

附录 高等数学竞赛试题解析

- 第一届(1991) 高等数学本科竞赛试题 / 173
 第二届(1994) 高等数学(本科二级)竞赛试题 / 180
 第三届(1996) 高等数学(本科二级)竞赛试题 / 186
 第四届(1998) 高等数学(本科一、二级)竞赛试题 / 193
 第五届(2000) 高等数学(本科二级)竞赛试题 / 200
 第六届(2002) 高等数学(本科二级)竞赛试题 / 207
 第七届(2004) 高等数学(本科二级)竞赛试题 / 213
 第八届(2006) 高等数学(本科一、二级)竞赛试题 / 220
 第九届(2008) 高等数学(本科二级)竞赛试题 / 229
 第十届(2010) 高等数学(本科二级)竞赛试题 / 235
 第十一届(2012) 高等数学(本科二级)竞赛试题 / 240

第 I 部分 高等数学研究生考试命题规律

第 I 部分总结了《高等数学》每章近 15 年的具体考题知识点,可以使考生清晰地了解和把握各章出题的方式、命题的频率及其类别,在全面复习的过程中,也不失对重点知识的明确和强化。内容按数学一、数学二和数学三分别给出,使得有不同要求的学生和教师把握研究生考试的命题规律。

第一章 1997—2012 年高等数学(数学一) 真题知识点分布

一、函数、极限和连续

- 题型 1 求 1^∞ 型极限(一(1),2003^①;一(1),2010;三(14),2011).
- 题型 2 求 $0/0$ 型极限(一(1),1998;一(1),2006;三(15),2008).
- 题型 3 求 $\infty - \infty$ 型极限(一(1),1999).
- 题型 4 求分段函数的极限(二(2),1999;三,2000).
- 题型 5 函数性质(奇偶性,周期性,单调性,有界性)的判断(二(1),1999;二(8),2004).
- 题型 6 无穷小的比较或确定无穷小的阶(二(7),2004;一(1),2007;一(1),2009).
- 题型 7 数列极限存在性的判定或求解(二(2),2003;六(1),1997;四,2002;三(16),2006;一(5),2007;一(4),2008;一(1),2009).
- 题型 8 求 n 项和的数列极限(七,1998;一(4),2010;三(18),2011).
- 题型 9 函数(含分段函数)在某点连续性的判断(二(2),1999).
- 题型 10 求零点个数(一(1),2008).

二、一元函数微分学

- 题型 1 与函数导数或微分概念和性质相关的命题(二(7),2006;一(4),2007;一(2),2012).
- 题型 2 函数可导性及导函数的连续性的判定(五,1997;二(3),2001;二(7),2005;三(18),2008).
- 题型 3 求复合函数的导数(七(1),2002).
- 题型 4 求反函数的导数(七(1),2003).
- 题型 5 求隐函数或参数方程的导数(一(2),2002;二(9),2010;二(11),2012).
- 题型 6 函数极值、最值、拐点的判定或求解(二(7),2003;一(1),2011;一

① 一(1),2003 表示 2003 年硕士研究生考试第一大题第(1)小题出现该题型,其余类推.

- (3), 2011; 三(19), 2012).
- 题型 7 函数及其导函数的图形间关系或其他性质的判定(二(1), 2001; 二(3), 2002; 一(3), 2009).
- 题型 8 函数在某点可导的判断(含分段函数在分段点的可导性的判断)(二(2), 1999).
- 题型 9 求一元函数在一点的切线方程或法线方程(四, 2002; 一(1), 2004; 二(10), 2008).
- 题型 10 函数单调性的判断或讨论单调区间(八(1), 2003; 二(8), 2004; 三(16), 2010).
- 题型 11 不等式的证明或判定是否成立(九, 1998; 六, 1999; 二(1), 2000; 八(2), 2003; 三(15), 2004; 三(15), 2012).
- 题型 12 在某一区间至少存在一个点或两个不同的点使某个式子成立的证明(九, 2000; 七(1), 2001; 三(18), 2005; 三(19), 2007; 三(18), 2009; 三(18), 2012).
- 题型 13 方程根的存在性判定或唯一性证明(三(18), 2004; 一(1), 2008; 三(17), 2011).
- 题型 14 曲线的渐近线的求解或判定渐近线个数(一(1), 2005; 一(2), 2007; 一(1), 2012).

三、一元函数积分学

- 题型 1 求不定积分或原函数(三, 2001; 一(2), 2004).
- 题型 2 函数与其原函数性质的比较(二(8), 2005).
- 题型 3 求函数的定积分(一(1), 2000; 三(17), 2005; 一(3), 2006; 二(11), 2007; 二(10), 2010; 二(10), 2012).
- 题型 4 求变上限积分的导数(一(2), 1999; 二(10), 2004; 三(18), 2008).
- 题型 5 求广义积分或判断广义积分的收敛性(一(1), 2002; 一(3), 2010; 一(4), 2012; 二(12), 2012).
- 题型 6 定积分的应用(求曲线的弧长, 面积, 旋转体的体积, 变力做功, 形心等)(七, 1999; 三, 2003; 六, 2003; 三(17), 2009; 二(9), 2011; 三(18), 2012).
- 题型 7 定积分大小的比较(一(2), 2009; 三(17), 2010; 一(4), 2011; 一(4), 2012).

四、向量代数和空间解析几何

- 题型 1 求点到平面的距离(一(4), 2006).

- 题型 2 求直线在平面上的投影直线方程(三,1998).
题型 3 求直线绕坐标轴的旋转曲面方程(三,1998;三(19),2012).

五、多元函数微分学

- 题型 1 多元函数或多元复合函数偏导存在的判定或求解(一(2),1998;
四,2000;四,2001;二(9),2005;三(18(I)),2006;二(2),2007;
二(9),2009;二(11),2011;三(15),2011;一(5),2012).
- 题型 2 多元隐函数的导数或偏导的求解或判定(三,1999;三(19),2004;
二(10),2005;一(2),2010).
- 题型 3 多元函数连续、可导与可微的关系(二(2),2001;二(1),2002;
一(3),2012).
- 题型 4 求曲面的切平面或法线方程(一(2),2000;一(2),2003;一(2),
2012).
- 题型 5 多元函数极值的判定或求解(八(2),2002;二(3),2003;三(19),
2004;二(10),2006;三(15),2009;三(16),2012).
- 题型 6 多元函数的最值计算(三(17),2007;三(17),2008).
- 题型 7 求函数的方向导数或梯度及相关问题(八(1),2002;一(3),2005;
一(2),2008).
- 题型 8 已知一个二元函数的梯度,求二元函数表达式(四,1998).

六、多元函数积分学

- 题型 1 求二重积分(五,2002;三(15),2005;三(15),2006;三(19),
2011).
- 题型 2 交换二重积分的积分次序(一(3),2001;二(10),2004;二(8),
2006).
- 题型 3 求对弧长的曲线积分(一(3),1998;二(11),2009).
- 题型 4 求对坐标的曲线积分(六,1998;四,1999;五,2000;六,2001;六
(2),2002;一(3),2004;三(19),2006;三(16),2008;二(11),
2010;二(12),2011;三(19),2012).
- 题型 5 求对面积的曲面积分(八,1999;二(14),2007;三(19),2010;二
(12),2012).
- 题型 6 求对坐标的曲面积分(三(17),2004;一(4),2005;一(3),2006;三
(18),2007;二(12),2008;三(19),2009).
- 题型 7 曲面积分的比较大小(二(2),2000).
- 题型 8 与曲线积分相关的判定或证明(六(1),2002;五,2003;三(19)

(I)), 2005;—(5), 2007).

题型 9 已知曲线积分值, 求被积函数中的未知函数的表达式(六, 2000; 三(19(I)), 2005).

题型 10 求函数的梯度、散度或旋度(一(2), 2001; 一(2), 2008; 二(11), 2012).

题型 11 重积分的物理应用(求转动惯量、重心、形心等)(八, 2000; 二(12), 2010; 三(19), 2012).

题型 12 计算三重积分(二(12), 2009).

题型 13 对坐标的曲线积分比较大小(一(4), 2012).

七、无穷级数

题型 1 无穷级数敛散性的判定(八, 1998; 九(2), 1999; 二(3), 2000; 二(2), 2002; 二(9), 2004; 三(18), 2004; 二(9), 2006; 一(4), 2008; 一(4), 2009).

题型 2 求无穷级数或幂级数的和(九(1), 1999; 五, 2001; 七(2), 2002; 四, 2003; 三(16), 2005; 三(16), 2009; 三(16), 2012).

题型 3 求函数的幂级数展开, 求和函数与收敛域, 判断其在端点的敛散性(七, 2000; 五, 2001; 四, 2003; 三(16), 2005; 三(17), 2006; 二(11), 2008; 三(17), 2010; 一(2), 2011; 三(17), 2012).

题型 4 求函数的傅里叶系数或函数在某点展开的傅里叶级数的值(二(3), 1999; 一(3), 2003; 三(19), 2008; 一(3), 2012).

八、常微分方程

题型 1 求一阶线性微分方程的通解或特解(六, 2000; 一(2), 2005; 一(2), 2006; 三(18(I)), 2006; 二(9), 2008; 二(10), 2009; 二(10), 2011; 二(9), 2012).

题型 2 二阶可降阶微分方程的求解(一(3), 2000; 一(3), 2002).

题型 3 求二阶齐次或非齐次线性微分方程的通解或特解(一(3), 1999; 二(13), 2007; 三(15), 2010; 二(10), 2012).

题型 4 已知二阶线性齐次或非齐次微分方程的通解或特解, 反求微分方程(一(1), 2001; 一(3), 2008).

题型 5 求欧拉方程的通解或特解(一(4), 2004).

题型 6 常微分方程的物理应用(五, 1998; 八, 2001; 三(16), 2004).

题型 7 通过求导建立微分方程, 求函数表达式或曲线方程(五, 1999).

题型 8 微分方程的级数解法(三(20), 2007).

第二章 1997—2012 年高等数学(数学二) 真题知识点分布

一、函数、极限和连续

题型 1 求复合函数的表达式(二(1),2001).

题型 2 求 1° 型极限(四,2001;五,2002;二(9),2011;二(9),2012).

题型 3 求 $0/0$ 型极限(一(1),1998;三,1999;一(1),2000;六(1),2000;
一(1),2001;二(3),2002;三(15),2005;二(11),2007;三(15),
2008;三(15),2009).

题型 4 求 $0 \cdot \infty$ 型极限(三(15),2004).

题型 5 函数性质(奇偶性,周期性,单调性,有界性)的判断或证明(三(17
(I)),2004).

题型 6 无穷小的比较、确定无穷小的阶、根据无穷小的阶反求参数(二
(2),1999;二(2),2001;十,2002;一(1),2003;二(7),2004;
一(5),2005;三(15),2006;一(1),2007;一(2),2009;一(1),2011;
一(1),2012;三(15),2012).

题型 7 数列极限存在性的判定、求解或证明(二(1),1998;二(4),1999;
十,1999;八,2002;二(1),2003;二(2),2003;三(18),2006;
一(6),2007;一(5),2008;二(11),2009;三(19),2011;一(3),2012;
三(21),2012).

题型 8 求 n 项和的数列的极限(一(4),2001;二(9),2004;一(6),2010;
二(10),2012).

题型 9 函数间断点的类型判定(三,1998;四,2001;一(1),2004;二(12),
2005;一(2),2007;一(4),2008;一(1),2009;一(1),2010;一(3),
2012).

题型 10 已知函数的连续性,反求函数中的参数(一(1),2002;一(2),
2006).

题型 11 已知极限存在,反求参数或函数值(四,1998;二(1),2000;二(9),
2008;三(15),2011).

题型 12 讨论函数的连续性(二(1),1999;三,2003;二(8),2006).

题型 13 已知一极限,求另一极限(二(4),2000).

题型 14 求函数的表达式(三(16(I)),2004;三(19),2008;三(20),2009;
三(17),2010;三(18),2011).

题型 15 求函数的值域(三(17(II)),2004).

题型 16 求函数零点的个数(一(1),2008).

二、一元函数微分学

题型 1 与函数导数或微分的概念和性质相关的命题(二(7),2006;一
(2),2011;一(2),2012).

题型 2 函数(含分段函数)在一点可导的判定或求解(二(1),1999;二
(1),2002;三(16(II)),2004;二(7),2005;一(4),2007).

题型 3 求复合函数的导数或微分(一(1),2005;二(9),2006).

题型 4 求隐函数的导数或微分(一(2),1999;一(2),2000;一(5),2006;
二(12),2009;二(9),2012).

题型 5 求参数方程的导数(五,2001;四,2003;一(2),2004;二(12),
2007).

题型 6 求反函数(二(10),2012).

题型 7 求函数在一点的高阶导数、泰勒展开式、麦克劳林展开式(五,
2000;十(1),2001;一(3),2003;二(13),2007;二(11),2010).

题型 8 函数极值、最值、拐点及凹凸区间的判定、求解(七(1,2),1999;二
(2),2000;十,2000;二(3),2001;八(2),2001;二(4),2003;二
(8),2004;三(21(I)),2006;二(11),2008;一(5),2009;二(13),
2009;一(6),2011;三(16),2011).

题型 9 函数与其导函数间的关系或图形的判定(二(5),2001;二(4),
2002;二(8),2005).

题型 10 函数不可导点的个数的确定(二(3),1998).

题型 11 不等式的证明或判定(二(4),1998;十一,1998;二(3),2000;二
(4),2001;九,2002;十(1),2003;三(19),2004;三(19),2006;三
(20),2012).

题型 12 在某一区间至少存在一点或两点使某个式子成立的证明(八,
1999;八,2000;十(2),2001;十(2,3),2003;三(19),2005;三
(21),2007;三(21),2008;三(21),2009;三(18),2012).

题型 13 函数单调性的判断或增减区间的求解(七(1),1999;二(10),
2004;三(15),2010).

题型 14 方程根的存在性判定或唯一性证明(七,2003;三(21),2012).

- 题型 15 求一元函数在一点的切线方程、法线方程(一(1),1999;九,2000;
一(2),2001;三,2002;一(2),2003;三(21(Ⅱ)),2006;二(10),
2008;二(9),2009;一(3),2010;三(21),2010;二(12),2012).
- 题型 16 求曲线的渐近线方程(一(5),1998;七(3),1999;一(4),2000;
一(2),2005;一(1),2006;一(5),2007;二(11),2010;一(1),2012).
- 题型 17 导数的应用(二(13),2010).
- 题型 18 求驻点的个数(一(3),2011).

三、一元函数积分学

- 题型 1 求不定积分或原函数(三(3),1997;一(3),1998;一(3),1999;三,
2000;三,2001;五,2003;三(16),2006;三(16),2009).
- 题型 2 函数的原函数性质的判定(二(2),2002).
- 题型 3 求一元函数(含分段函数)的定积分(六,1998;四,2000;一(3),
2001;四,2002;一(3),2005;三(17),2005;一(3),2007;三(17),
2008).
- 题型 4 定积分的比较大小(二(5),2003;三(16),2010;一(4),2012).
- 题型 5 求变上限积分的导数,定积分中含参数的导数(一(4),1998;十一
(1),2000).
- 题型 6 求解含有积分的方程(十一(1),2000;六,2001;三(16),2005;三
(17),2007).
- 题型 7 求解含抽象函数的积分(七,2001).
- 题型 8 求广义积分(四,1999;一(3),2000;一(3),2004;一(3),2006;二
(10),2009;一(4),2010;二(12),2011).
- 题型 9 求曲线的弧长、与曲率或曲率半径相关的问题(五,2001;八(2),
2003;二(12),2010;二(11),2011;二(13),2012).
- 题型 10 求平面图形的面积(一(2),1998;八(2),2001;一(2),2002;一
(4),2003;三(21(Ⅲ)),2006;一(2),2008).
- 题型 11 求旋转体的体积、表面积或立体的体积(九,1998;十,2000;六,
2002;三(18(Ⅰ)),2004;三(18),2007;三(18),2009;二(7),
2012).
- 题型 12 求函数的平均值(一(4),1999).
- 题型 13 求变力做功或压力等(定积分在几何或物理上的应用)(六,1999;
七,2002;九,2003;三(18),2010;三(20),2011;三(16),2012;三
(21),2012).
- 题型 14 定积分不等式的证明(六(1),2000;十(2),2000).

题型 15 变上限积分曲线(一(6),2009).

四、多元函数微积分学

题型 1 讨论二元函数连续性、可导性、可微性等基本概念(一(7),2007;二(12),2008).

题型 2 求多元复合函数或隐函数的偏导数(一(4),2004;三(21),2004;二(11),2005;三(20(I)),2006;二(15),2007;三(20),2007;一(6),2008;三(17),2009;一(5),2010;三(17),2011;二(11),2012).

题型 3 多元函数极值的判定或求解(三(20),2005;二(12),2006;三(18),2008;一(3),2009;一(5),2012;三(16),2012).

题型 4 求二重积分(二(10),2005;三(21),2005;三(17),2006;三(22),2007;三(20),2008;三(19),2009;三(20),2010;二(13),2011;三(21),2011;一(6),2012;三(18),2012).

题型 5 二重积分的累次积分表示或交换积分次序(二(12),2004;二(11),2006;一(8),2007;一(4),2009).

题型 6 重积分比较大小(一(6),2012).

五、常微分方程

题型 1 求一阶线性微分方程的通解或特解(五,1999;一(4),2001;六,2002;一(5),2004;一(4),2005;一(4),2006;三(20(II)),2006;二(10),2011;二(12),2012;三(19),2012).

题型 2 求二阶齐次或非齐次线性微分方程的通解或特解(一(5),1999;二(11),2004;二(14),2007;一(2),2010;二(9),2010;一(4),2011;二(13),2012).

题型 3 求可降阶的微分方程的通解或特解(一(3),2002;三(19),2007).

题型 4 已知二阶齐次线性微分方程的解,反求微分方程(二(5),2000;二(10),2006;一(3),2008;三(19),2010).

题型 5 利用代换化简微分方程并求通解(五,1998;六,2003;三(18),2005).

题型 6 通过解微分方程求函数表达式(二(3),2003;八(1),2003).

题型 7 微分方程的几何或物理应用(七,1998;十,1998;九,1999;七,2000;八(1),2001;九,2001;三(20),2004).

第三章 1997—2012年高等数学(数学三) 真题知识点分布

一、函数、极限和连续

- 题型 1 求 1^∞ 型极限(一(1),2002;二(9),2012).
- 题型 2 求 $0/0$ 型极限(三,2002;三(15),2008;二(9),2009;三(15),2011;三(15),2012).
- 题型 3 求 $\infty - \infty$ 型极限(三(15),2004;三(15),2005;一(1),2010).
- 题型 4 求 $\infty \cdot 0$ 或 0^∞ 型极限(一(1),2005;三(15),2010).
- 题型 5 函数性质(奇偶性,周期性,单调性,有界性)的判定或应用(二(2),1997;二(1),1999;二(2),2001;二(7),2004;二(11),2005).
- 题型 6 无穷小或无穷大比较(一(1),2007;一(2),2009;一(4),2010;一(1),2011;一(1),2012;三(15),2012).
- 题型 7 数列极限存在的判定、证明、求解(一(1),1998;一(1),2006).
- 题型 8 函数极限存在的判定、证明、求解(二(1),2000;三(15),2006).
- 题型 9 函数的连续性讨论、证明、逆问题(一(1),2003;三,2003;二(8),2004;二(9),2008).
- 题型 10 函数间断点类型的判定(二(2),1998;二(1),2003;一(1),2008).
- 题型 11 已知函数的极限存在,反求参数或其他问题(四,2001;一(1),2004;二(8),2006).
- 题型 12 与极限的定理或性质(介值定理、保号性、单调有界等)相关的命题(二(11),2004).
- 题型 13 求函数间断点的个数(一(1),2009).
- 题型 14 求函数表达式(三(19),2011).

二、一元函数微分学

- 题型 1 与导数或微分的概念和性质相关的命题(二(7),2006;一(2),2007;一(2),2011;一(2),2012;二(9),2012).
- 题型 2 求复合函数或隐函数的导数或微分(一(2),2006;二(9),2010;二(9),2011).