

01 数学家思想文库
丛书主编 李文林



MATHEMATICAL PROBLEMS



数学问题

[德] 希尔伯特 著
李文林 袁向东 编译



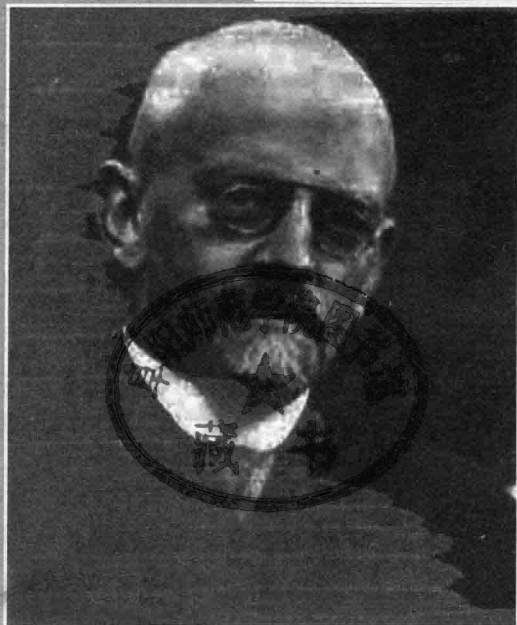
大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

『十二五』国家重点图书出版规划项目

01 数学基础文库

丛书主编 李文林

MATHEMATICS



数学问题

[德] 希尔伯特 著

李文林 袁向东 编译



大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

图书在版编目(CIP)数据

数学问题 / (德) 希尔伯特著; 李文林, 袁向东编译. — 大连: 大连理工大学出版社, 2014. 5

(数学家思想文库)

ISBN 978-7-5611-9101-9

I. ①数… II. ①希… ②李… ③袁… III. ①数学问题—研究 IV. ①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 082157 号

大连理工大学出版社出版

地址: 大连市软件园路 80 号 邮政编码: 116023

发行: 0411-84708842 邮购: 0411-84703636 传真: 0411-84707345

E-mail: dutp@dutp.cn URL: <http://www.dutp.cn>

大连美跃彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸: 147mm×210mm
2014 年 5 月第 1 版

印张: 3.75 字数: 62 千字
2014 年 5 月第 1 次印刷

责任编辑: 刘新彦 王 伟

责任校对: 李 慧

封面设计: 冀贵收

ISBN 978-7-5611-9101-9

定 价: 15.00 元

读读大师 走近数学

——《数学家思想文库》总序

数学思想是数学家的灵魂

数学思想是数学家的灵魂。试想：离开公理化思想，何谈欧几里得、希尔伯特？没有数形结合思想，笛卡儿焉在？没有数学结构思想，怎论布尔巴基学派？……

数学家的数学思想当然首先是体现在他们的创新性数学研究之中，包括他们提出的新概念、新理论、新方法。牛顿、莱布尼茨的微积分思想，高斯、波约、罗巴切夫斯基的非欧几何思想，伽罗瓦“群”的概念，哥德尔不完全性定理与图灵机，纳什均衡理论，等等，汇成了波澜壮阔的数学思想海洋，构成了人类思想史上不可磨灭的篇章。

数学家们的数学观也属于数学思想的范畴，这包括他们对数学的本质、特点、意义和价值的认识，对数学知识来源及其与人类其他知识领域的关系的看法，以及科学方法论方面的见解，等等。当然，

在这些问题上,古往今来数学家们的意见是很不相同有时甚至是对立的。但正是这些不同的声音,合成了理性思维的交响乐。

正如人们通过绘画或乐曲来认识和鉴赏画家或作曲家一样,数学家的数学思想无疑是人们了解数学家和评价数学家的主要依据,也是数学家贡献于人类和人们要向数学家求知的主要内容。在这个意义上我们可以说:

“数学家思,故数学家在。”

数学思想的社会意义

数学思想是不是只有数学家才需要具备呢?当然不是。数学是自然科学、技术科学与人文社会科学的基础,这一点已越来越成为当今社会的共识。数学的这种基础地位,首先是由于它作为科学的语言和工具而在人类几乎一切知识领域获得日益广泛的应用,但更重要的恐怕还在于数学对于人类社会的文化功能,即培养发展人的思维能力特别是精密思维能力。一个人不管将来从事何种职业,思维能力都可以说是无形的资本,而数学恰恰是锻炼这种思维能力的体操。这正是为什么数学会成为每个受教育的人一生中需要学习时间最长的学科之一。这并不是说我们在学校中学习过的每一个具体的数学知识点都会在日后的生活与工作中

派上用处,数学对一个人终身发展的影响主要在于思维方式。以欧几里得几何为例,我们在学校里学过的大多数几何定理日后大概很少直接有用甚或基本不用,但欧氏几何严格的演绎思想和推理方法却在造就各行各业的精英人才方面有着毋庸置疑的意义。事实上,从牛顿的《自然哲学的数学原理》到爱因斯坦的相对论著作,从法国大革命的《人权宣言》到马克思的《资本论》,乃至现代诺贝尔经济学奖得主们的论著中,我们都不难看到欧几里得的身影。另一方面,数学的量化思想更是以空前的广度与深度向人类几乎所有的知识领域渗透。数学,从严密的论证到精确的计算,为人类提供了精密思维的典范。

一个戏剧性的例子是在现代计算机设计中扮演关键角色的所谓“程序内存”概念或“程序自动化”思想。我们知道,第一台电子计算机(ENIAC)在制成之初,由于计算速度的提高与人工编制程序的迟缓之间的尖锐矛盾而濒于夭折,在这一关键时刻,恰恰是数学家冯·诺依曼提出的“程序内存”概念拯救了人类这一伟大的技术发明。直到今天,计算机设计的基本原理仍然遵循着冯·诺依曼的主要思想,冯·诺依曼因此被尊为“计算机之父”(虽然现在知道他并不是历史上提出此种想法的唯一数学家)。像“程序内存”这样似乎并非“数学”的概

念,却要等待数学家并且是冯·诺依曼这样的大数学家的头脑来创造,这难道不耐人寻味吗?因此,我们可以说,数学家的数学思想是全社会的财富。

数学的传播与普及,除了具体数学知识的传播与普及,更实质性的是数学思想的传播与普及。在科学技术日益数学化的今天,这已越来越成为一种社会需要了。试设想:如果有越来越多的公民能够或多或少地运用数学的思维方式来思考和处理问题,那将会是怎样一幅社会进步的前景啊!

读读大师 走近数学

数学是数与形的艺术,数学家们的创造性思维是鲜活的,既不会墨守陈规,也不可能作为被生搬硬套的教条。学习了解数学家的数学思想当然可以通过不同的途径,而阅读数学家特别是数学大师们的原始著述大概是最直接可靠和富有成效的做法。

数学家们的著述大体有两类。大量的当然是他们论述自己的数学理论与方法的专著。对于致力于真正原创性研究的数学工作者来说,那些数学大师们的原创性著作无疑是最生动的教材。拉普拉斯就常常对年轻人说:“读读欧拉,读读欧拉,他是我们所有人的老师。”拉普拉斯这里所说的“所有人”,恐怕主要还是指专业的数学家和力学家,一

般人很难问津。

数学家们另一类著述则面向更为广泛的读者，有的就是直接面向公众。这些著述包括数学家们数学观的论说与阐释（用 G·哈代的话说就是“关于数学”的论述），也包括对数学知识和他们自己的数学创造的通俗介绍。这类著述与板起面孔讲数学的专著不同，具有较大的可读性，易于为公众接受，其中不乏脍炙人口的名篇佳作。有意思的是，一些数学大师往往也是语言大师，如果把写作看作语言的艺术，他们的这些作品正体现了数学与艺术的统一。阅读这些名篇佳作，不啻是一种艺术享受，人们在享受之际认识数学，了解数学，接受数学思想的熏陶，感受数学文化的魅力。这正是我们编译出版这套《数学家思想文库》的目的所在。

《数学家思想文库》选择国外近现代数学史上一些著名数学家论述数学的代表性作品，专人专集，陆续编译，分辑出版，以飨读者。第一辑编译的是希尔伯特(D. Hilbert, 1862—1943)、G·哈代(G. Hardy, 1877—1947)、冯·诺依曼(J. von Neumann, 1903—1957)、布尔巴基(N. Bourbaki, 1935—)、阿蒂亚(M. F. Atiyah, 1929—)等 20 世纪数学大师的文集（其中哈代、布尔巴基与阿蒂亚的文集属再版），这些文集集中的作品大都短小精悍，魅力四射，充满科学的真知灼见，在国外流传颇广。

相对而言,这些作品可以说是数学思想海洋中的珍奇贝壳,数学百花园中的美丽花束。

我们并不奢望这样一些“贝壳”和“花束”能够扭转功利的时潮,但我们相信爱因斯坦在纪念牛顿时所说的话:

“理解力的产品要比喧嚣纷扰的世代经久,它能经历好多个世纪而继续发出光和热。”

在这套丛书付梓之际,我们要感谢大连理工大学出版社特别是刘新彦同志,他们对传播科学文化的热情与远见使本套丛书很快能以崭新的面貌出版。我们衷心希望本套丛书所选译的数学大师们“理解力的产品”能够在传播数学思想,弘扬科学文化的现代化事业中放射光和热。

读读大师,走近数学,所有的人都会开卷受益。

李文林

2014年4月于北京中关村

目 录

导 言 / 1

数学问题——在 1900 年巴黎国际数学家代表会上的讲演 / 39

译后小记 / 97

附 录 / 99

导 言

20 世纪数学的揭幕人——希尔伯特

希尔伯特出生于东普鲁士的一个中产家庭。祖父大卫·菲尔赫哥特·勒贝雷希特·希尔伯特(David Fürchtegott Leberecht Hilbert)和父亲奥托·希尔伯特(Otto Hilbert)都是法官,祖父还获有“枢密顾问”头衔。母亲玛丽亚·特尔思·埃尔特曼(Maria Therse Erdtmann)是商人的女儿,颇具哲学、数学和天文学素养。希尔伯特幼年受到母亲的教育、启蒙,八岁正式上学,入皇家腓特烈预科学校。这是一所有名的私立学校,E·康德(Kant)曾就读于此。不过该校教育偏重文科,希尔伯特从小喜爱数学,因此在最后一学期转到了更适合他的威廉预科学校。在那里,希尔伯特的成绩一跃而上,各门皆优,数学则获最高分“超”。老师在毕业评语中写道:“该生对数学表现出强烈兴趣,而且理解深刻,他用非常好的方法掌握了老师讲授的内容,并能有把握地、灵活地应用它们。”

1880 年秋,希尔伯特进柯尼斯堡大学攻读数

学。大学第二学期,他按当时的规定可以到另一所大学去听课,希尔伯特选择了海德堡大学,那里 L·富克斯(Fuchs)教授的课给他印象至深。在柯尼斯堡,希尔伯特则主要跟从 H·韦伯(Weber)学习数论、函数论和不变量理论。他的博士论文指导老师是证明 π 超越性的赫赫有名的 F·林德曼(Lindemann)教授,后者建议他做代数形式的不变性质问题。希尔伯特出色地完成了学位论文,并于 1885 年获得了哲学博士学位。

在大学期间,希尔伯特与年长他三岁的副教授 A·胡尔维茨(Hurwitz)和比他高一级的 H·闵可夫斯基(Minkowski)结下了深厚友谊。这种友谊对各自的科学工作产生了终生的影响。希尔伯特后来曾这样追忆他们的友谊:“在日复一日无数的散步时刻,我们漫游了数学科学的每个角落……我们的科学,我们爱它超过一切,它把我们联系在一起。在我们看来,它好像鲜花盛开的花园。在花园中,有许多踏平的路径可以使我们从容地左右环顾,毫不费力地尽情享受,特别是有趣味相投的游伴在身边。但是我们也喜欢寻求隐秘的小径,发现许多美丽的新景。当我们向对方指出来,我们就更加快乐。”(见研究文献[8])大学毕业后,希尔伯特曾赴莱比锡、巴黎等地作短期游学。在莱比锡,他参加了 F·克莱因(Klein)的讨论班,受到后者的器重。

正是克莱因推荐希尔伯特去巴黎访问,使他结识了H·庞加莱(Poincaré)、C·若尔当(Jordan)、E·皮卡(Picard)与C·埃尔米特(Hermite)等法国著名数学家。在从巴黎返回柯尼斯堡途中,希尔伯特又顺访了柏林的L·克罗内克(Kronecker)。希尔伯特在自己早期工作中曾追随过克罗内克,但后来在与直觉主义的论战中却激烈地批判“克罗内克的阴魂”。

1886年6月,希尔伯特获柯尼斯堡大学讲师资格。除教课外,他继续探索不变量理论并于1888年秋取得突破性进展——解决了著名的“哥尔丹问题”,这使他声名初建。1892年,希尔伯特被指定为柯尼斯堡大学副教授以接替胡尔维茨的位置。同年10月,希尔伯特与克特·耶罗施(Käthe Jerosch)结婚。1893年,希尔伯特升为正教授。1895年3月,由于克莱因的举荐,希尔伯特转任格丁根大学教授,此后他始终在格丁根执教,直到1930年退休。

在格丁根,希尔伯特又相继发表了一系列震惊数学界的成果:1896年他向德国数学会递交了代数数论的经典报告《代数数域理论》(*Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*);1899年发表了著名的《几何基础》(*Grundlagen der Geometrie*)并创立了现代公理化方法;同年希尔伯特出人意料地

挽救了狄利克雷原理而使变分法研究出现转机；1909年他巧妙地证明了华林猜想；1901—1912年通过积分方程方面系统深刻的工作，他开拓了无限多个变量的理论。这些工作确立了希尔伯特在现代数学史上的突出地位。1912年以后，希尔伯特的兴趣转移到物理学和数学基础方面。

希尔伯特典型的研究方式是直攻重大的具体问题，从中寻找带普遍意义的理论与方法，开辟新的研究方向。他以这样的方式从一个问题转向另一个问题，从而跨越和影响了现代数学的广阔领域。

代数不变量问题(1885—1893)。代数不变量理论是19世纪后期数学的热门课题。粗略地说，不变量理论研究各种变换群下代数形式的不变量。古典不变量理论的创始人是英国数学家G·布尔(Boole)、A·凯莱(Cayley)和B·西尔维斯特(Sylvester)。n个变元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的m次齐次多项式 $J(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 被称为n元m次代数形式。设线性变换T将变元 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 变为 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，此时多项式 $J(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 变为 $J^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，J的系数 $a_0, a_1, \dots, a_q$ 变为 J^* 的系数 $A_0, A_1, \dots, A_q$ 。若对全体线性变换T有 $J = J^*$ ，则称J为不变式，称在线性变换下保持不变的J的系数的任何函数I为J的一个不变量。凯莱和西尔

维斯特等人计算、构造了大量特殊的不变量,这也是 1840—1870 年古典不变量理论研究的主要方向。进一步的发展提出了更一般的问题——寻找不变量的完备系,即对任意给定元数与次数的代数形式,求出最小可能个数的有理整不变量,使任何其他有理整不变量可以表成这个完备集合的具有数值系数的有理整函数。这样的完备系亦叫代数形式的基。在希尔伯特之前,数学家们只是对某些特殊的代数形式给出了上述一般问题的解答,这方面贡献最大的是 P·哥尔丹(Gordan)。哥尔丹几乎毕生从事不变量理论的研究,号称“不变量之王”。他最重要的结果是所谓的“哥尔丹定理”,即对二元形式证明了有限基的存在性。哥尔丹的证明冗长、繁复,但其后二十余年,却无人能够超越。

希尔伯特的工作从根本上改变了不变量理论研究的现状。他的目标是将哥尔丹定理推广到一般情形,他采取的是崭新的非算法的途径。希尔伯特首先改变了问题的提法:给定了无限多个包含有限个变元的代数形式系,在什么条件下存在一组有限的代数形式系,使所有其他的形式都可表成它们的线性组合? 希尔伯特证明了这样的形式系是存在的,然后应用此结果于不变量而得到了不变量系有限整基的存在定理。希尔伯特的证明是纯粹的存在性证明,他不是像哥尔丹等人所做的那样同时

把有限基构造出来,这使它在发表之初遭到了包括哥尔丹本人在内的一批数学家的非议。哥尔丹宣称“这不是数学,而是神学!”但克莱因、凯莱等人却立即意识到希尔伯特工作的价值。克莱因指出希尔伯特的证明“在逻辑上是不可抗拒的”,并将希尔伯特的文章带到在芝加哥举行的国际数学会议上推荐介绍。存在性证明的意义日益获得公认。正如希尔伯特本人阐明的那样:通过存在性证明“就可以不必去考虑个别的构造,而将各种不同的构造包摄于同一个基本思想之下,使得对证明来说是最本质的东西清楚地突显出来,达到思想的简洁和经济,……禁止存在性证明,等于废弃了数学科学”。对于现代数学来说,尤为重要的是希尔伯特的不变量理论把模、环、域的抽象理论带到了显著地位,从而引导了以埃米·诺特(Emmy Noether)为代表的抽象代数学派。事实上,希尔伯特对不变量系有限基的存在性证明,是以一条关键的引理为基础,这条关于模(module,指多项式环中的一个理想)的有限基的存在性引理,正是通过使用模、环、域的语言而获得的。

希尔伯特最后一篇关于不变量的论文是《论完全不变量系》(*Über die vollen Invariantensysteme*, 1893),他在其中表示“由不变量生成的函数域的理论最主要的目标已经达到”,于是他在致闵可夫斯

基的一封信中宣告：“从现在起，我将献身于数论。”

代数数域(1893—1898)。希尔伯特往往以对已有的基本定理给出新证明作为他征服某个数学领域的前奏。他对代数数论的贡献，情形亦是如此。1893年在慕尼黑举办的德国数学会年会上，希尔伯特宣读的第一个数论结果——关于素理想分解定理的新证明，即引起了与会者的重视，数学会遂委托希尔伯特与闵可夫斯基共同准备一份数论进展报告。该报告最后实际上由希尔伯特单独完成(闵可夫斯基中间因故脱离计划)，并于1897年4月以“代数数域理论”为题正式发表(以下简称“报告”)。这份本来只需概述现状的报告，却成为决定下一世纪代数数论发展方向的经典著作。“报告”用统一的观点，将以往代数数论的全部知识铸成一个严密宏伟的整体，在对已有结果给出新的强有力的方法的同时引进新概念，建立新定理，描绘了新的理论蓝图。希尔伯特在“报告”序言中写道：

数域理论是一座罕见的优美和谐的大厦。就我所见，这座建筑中装备得最富丽的部分是阿贝尔域和相对阿贝尔域的理论，它们是由于库默尔关于高次互反律的工作和克罗内克关于椭圆函数复数乘法的研究而被开拓的。更深入地考察这两位数学家的理论，就会发现其中还蕴藏