石油教材出版基金资助项目

石油高等院校特色教材

弹性波动力学简明教程

尹成　田继东　主编

石油工业出版社
Petroleum Industry Press

石油教材出版基金资助项目

石油高等院校特色教材

弹性波动力学简明教程

尹　成　田继东　主编

石油工业出版社

内 容 提 要

本书主要讲述均匀各向同性介质中的弹性力学的基本理论、弹性振动的基本波、不同类型弹性波在分层介质中的传播特征等三部分内容，共五章。本书叙述通俗易懂，对问题的阐述提纲挈领，简洁明了。

本书可作为普通高校地球物理勘探类专业本科生的教材，也可供相关专业的研究生及科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹性波动力学简明教程/尹成，田继东主编.
北京：石油工业出版社，2014.9
（石油高等院校特色教材）
ISBN 978－7－5183－0341－0

Ⅰ.弹…
Ⅱ.①尹… ②田…
Ⅲ.地震波－弹性动力学－高等学校－教材
Ⅳ.P631.4

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第185539号

出版发行：石油工业出版社
（北京安定门外安华里2区1号 100011）
网 址：http://pip.cnpc.com.cn
编辑部：（010）64256770 发行部：（010）64523620
经 销：全国新华书店
排 版：北京苏冀博达科技有限公司
印 刷：北京晨旭印刷厂

2014年9月第1版 2014年9月第1次印刷
787×1092毫米 开本：1/16 印张：8.5
字数：216千字

定价：18.00元
（如出现印装质量问题，我社发行部负责调换）

前　言

弹性波动力学是理论物理学的一个重要分支，其任务是在牛顿力学实验定律的基础上，进一步引进空间数学场分析的方法，来研究弹性物体受力与变形间的静态和动态关系问题。而我们的地震学和地震勘探主要是在探讨有关地壳介质中的质点受力产生的振动和相邻质点振动所形成的机械波动的问题。因此，弹性波动力学也是地震学和地震勘探的理论基础。

近四十年来，地震勘探随着计算机和信息技术的发展，取得了长足的进步，已成为了石油工业必备的关键技术。这其中有关地震波时间域与深度域的偏移成像、正演模拟与照明分析、叠前弹性参数与波形反演、各向异性分析与多相介质中的流体检测等，均涉及弹性波动力学的基础理论。因此，学习弹性波动力学分析的基本方法与原理是后续学习、研究地震勘探新方法、新技术的有力工具。

本书是以勘查技术与工程专业的学生为主要对象而编写的专业基础理论教材。书中围绕理想介质中弹性力学的基本理论、弹性振动的基本波、弹性波在分层介质中的传播特征等基础理论，进行了提纲挈领的阐述。

本书采用了近年来国内外参考书及有关文献中常用的张量分析的哑指标规则，并对其作了较为详细的论述。本书按照普通高等学校工科勘查技术与工程专业的教学大纲的要求，内容介绍由浅入深，循序渐进，突出基本理论、基本概念与基本分析方法，并在每章后给出了本章的重点以及一些拓展理解的思考题，以使学生在有限的学时内掌握更加丰富的基本知识。书后还配有张量分析、应力分析、应变分析、波动方程、波的传播等五个方面的练习题，以加强学生对理论的理解和应用。

本书是编者在总结多年教学、科研经验的基础上编写而成的。在编写、构思和选材过程中，参考了书后所列文献的一些编写思想，采用了其中一些内容、例题和习题，在此谨向这些文献的作者表示诚挚的感谢！

全书由尹成教授和田继东教授编写，田继东教授负责编写第一章，尹成教授负责统一修改与定稿。另外，研究生田乔协助完成了部分图件的制作与清绘工作。

由于水平有限，书中难免有不足之处，欢迎广大读者批评指正。特别是文字和符号的错误，欢迎使用者及时指出，以便使我们不断修正错误，使本书进一步完善和提高。

编　者

2014.5

目　　录

1 绪　　论

作为本门课程的引导，本章主要介绍不同类型介质及其完全弹性性质的基本概念、介质中弹性波动的产生过程，进而总结出弹性波动力学的基本任务，最后给出了线性弹性动力学的基本假设。

1.1 物质与弹性

1.1.1 物质与介质

自然界是一个物质的世界。它可以包括看得见的、有形的，也包括一些看不见的、无形的，如物理学上的场和波。对于常规的物质，可以表现为气态、液态和固态，即物质的三态，也可以称为气体、液体和固体。由于气体与液体一般没有固定的形状，因此也可以合称为流体。

一种物质存在于另一种物质内部时，后者就是前者的介质。某些波状运动(如空气中的声波、光波等)借以传播的物质称为这些波状运动的介质，介质分为光介质、电介质、机械波介质、磁介质等等。

声音的传播需要物质，物理学中把这样的物质称为声音的介质。不同介质中，声音的传播速度有：$v_{气}<v_{液}<v_{固}$。常温(15℃)下，钢铁(固体)中的声速约为5200m/s，海水(液体)中的声速约为1500m/s，空气中的声速约为340m/s，在25°C时则约为346m/s。可以说这是三种不同物性的介质，也说明不同的介质具有不同的物性。

当一个物体的形状和体积在所讨论的问题中都不起显著的作用，从而可以认为该物体极小时，就可以将该物体称为一个质点。质点是力学中的概念，它不同于几何学中的点，也可以说质点就是有质量但不存在体积与形状的点，主要是为了便于我们研究问题的主要特征而构想出的一个理想模型。

1.1.2 介质的性质

对于固体介质来说，其形状和体积一般都比较稳固，当其受到外力的作用时，一般会产生变形。如果变形小到可以忽略时，则称该物体具有刚性。

物体受到外力的作用，其内部各部分(或者说质点)之间就要发生相对的位移，从而使得物体的形状与大小发生改变，也称为物体在外力作用下发生了形变。其实，物体的形变是以物体内部各部分之间的内力为依据的，外力只是一种条件而已。

当外力停止作用后，物体会在内力的作用下恢复到原来的形状和大小，其形变会随之消失，这样的性质就称为物体的弹性，随着外力的消失而消失的那种形变，则称为弹性形变。

反之，物体在外力作用下发生形变，当外力停止作用后形变却并不消失，物体的形状和大小并不还原，这样的性质称为物体的塑性，相应的形变称为塑性形变。

1.1.3 介质的类型

1. 完全弹性介质与黏弹性介质

在适当条件下，介质的弹性可能表现得非常显著，而其塑性、刚性可以暂时忽略时，我们就可以得到一种理想化的完全弹性介质。这种理想化的假设可以简化弹性力学中许多问题。

当然，建立理想的完全弹性介质模型，可以在一定范围内近似满足实际介质的要求。而实际地下的地层岩石介质中，一般既有弹性，又表现出像黏性流体那样的黏滞性(如流体在受到外力作用时发生变形(流动)，其内部相应要产生对变形的抵抗，并以内摩擦的形式表现出来，通常把这样的介质称为黏弹性介质。

2. 各向同性介质与各向异性介质

将固体的弹性性质与空间方向无关的固体介质称为各向同性介质，反之则称为各向异性介质。

对于地球内部的岩石介质来说，其弹性性质的方向性，一般取决于组成岩石、矿物质点的空间方向性，矿物质点(或矿物晶体)的排列结构以及岩石成分等。

3. 均匀介质、层状介质和连续介质

在地震波动理论中，根据岩石介质中地震波传播速度的空间分布规律，可以把固体介质分为均匀介质和非均匀介质。均匀介质是指在空间每个点上，地震波速度相同的介质，即速度值不随空间坐标的变化而变化。反之，则称为非均匀介质。

在非均匀介质中，其中局部速度值相同的点也可以构成一个区域，于是整个介质可以被分成若干个区域。速度不同的介质区域的交界处称为界面或速度分界面，界面可以是平面，也可以是曲面。如果非均匀介质的性质表现为成层性，则称该介质为层状介质。宏观上，我们经常将研究的地下沉积岩近似看成水平层状介质。

层状介质模型是地震勘探中最常用的介质模型，但不少地区特别是沉积旋回比较明显的地区，往往存在很多较薄的地层。这时可以认为地震波速度沿地层沉积方向是连续渐变的，因此将波速是空间连续变化函数的介质称为连续介质。

4. 单相介质与双相介质

地下岩石一般包含不同岩性(泥岩、砂岩、石灰岩、白云岩等)的固体岩石，同时也包含有一定数量的流体物质(油、气、水等)。只考虑单一固体岩石(或单一岩相)的介质称为单相介质；如果既考虑固体岩石，又考虑流体介质，则把这种介质称为双相介质。

1.2 弹性波动力学的任务

1.2.1 质点的振动与传播

弹性物体(如地下岩石)在没有外力作用时，其内部各质点在相互作用下，而处于相对静止即相对平衡位置。如果某个质点因受到外力作用而偏离其平衡位置，它与其相邻质点之间就将发生相对位置变动，从而它们之间就要产生附加内力——弹性恢复力。弹性恢复力使该质点在其平衡位置附近振动，同时又引起周围质点发生位移和振动，于是振动就会在弹性体内逐

渐由近及远地传播开来，并伴有能量的传递。在振动所到之处，质点的位移、形变及内力都会发生变化。把由于外力作用而引起质点的位移、形变及内力在弹性体内的传播过程称为弹性波。

1.2.2 弹性波的类型

弹性波在介质中传播过程既是空间位置的函数，同时又是传播时间的函数。在每一个瞬间，弹性体内已被扰动和未被扰动的区域之间的界面，被称为波阵面（或称为波前面、波前、波面）。如水池面上投入一块石头所引起的波浪面，垂直波阵面的方向称为波的传播方向，其传播速度称为波速。波速是扰动信号在弹性体内的传播速度，它与弹性体内质点本身振动的速度是不相同的。

质点振动方向与波的传播方向一致的波称为纵波，质点振动方向与波的传播方向垂直的波称为横波。根据波阵面的几何形状不同，也可以把波分为平面波、球面波、柱面波等。

弹性波传播时，在到达弹性体边界之前，边界的存在对弹性波的传播就没有影响。如同在无限大弹性体内传播一样，可以在三维空间中任何方向传播，这类波被称为体波。当体波传播到两个弹性体的分界面上时，一般将发生向原来弹性体内的反射（也称为反射波），以及穿过界面向另一弹性体内的透射（也称为透射波）。在有些情况下，还会发生沿两种介质之间的分界面上传播的波，称为面波。

1.2.3 弹性波动力学研究的问题

本教程除了涉及弹性波，还研究动力学。动力学是理论力学的一个分支学科，它主要研究作用于物体的力与物体运动的关系。动力学的研究以牛顿运动定律为基础，牛顿运动定律的建立则以实验为依据。因此，动力学也可以说是牛顿力学或经典力学的一部分。

弹性波的特性既与其外力作用大小（人工炸药、重锤、空气枪等震源特性）有关，也与弹性体的性质（岩石的弹性性质，如岩石的密度、速度等）有关。研究弹性波弹性与震源特性的关系问题，称为弹性波的激发问题。在远离激发震源的位置，研究弹性体性质对波的传播特性的影响问题，称为弹性波的传播问题。

因此，弹性波动力学的任务就是应用线性弹性力学的理论，来研究地下岩石中弹性波（也称为地震波）的激发与传播问题。

1.3 线性弹性理论的基本假设

客观事物总是多种多样的，作为一门学科，要探讨一般性的规律，势必要抓住所讨论范围内事物的本质方面，而忽略一些次要的因素，把实际事物理想化，进行科学的抽象，这样就离不开以实践为依据的假设。作为经典弹性动力学对所研究物体的材料及形变特征所作的基本假设主要有以下5项。

(1)连续性。假定构成物体的材料在空间中是没有空隙、连续分布的，所研究的物理量（位移、速度、应力及应变等）是空间坐标的连续函数，而且各点的位移是坐标的单值连续函数。即反映物体的运动和变形不会发生破裂。

(2)均匀各向同性。假定物体是同一种材料构成的，所研究的物体的力学性质是各点（或各个方向）相同的。即表征介质性质的物理量（密度、速度、杨氏模量、泊松比、拉梅系数、体积

模量等)，都是与空间坐标无关的常数。

(3)完全弹性。物体受力后就产生变形，卸力后能完全恢复原状。即假定介质的内力与形变之间成线性关系，介质服从线性弹性力学中的虎克定律(Hooke Law)，这样的物体也称为理想弹性体。

(4)小变形。物体变形时，其内部质点的位移都远远小于物体原来的尺度，且形变的数据大小都远远小于1。换句话说，在描述物体形变与内力，并探讨其变化规律时，都使用质点在形变前的空间坐标点；对于形变数据所涉及的二次及以上的幂或乘积项都可以忽略不计，从而使得弹性动力学中的方程都简化为线性方程。

(5)无初应力。物体在受外力作用之前是处于无应力的自然状态，弹性力学所求得的应力仅是外力作用以后产生的。

以上述5项基本假设为基础而建立起来的弹性力学也称为线性弹性力学。否则，称为非线性弹性理论。

思考题

1. 质点、介质的基本含义是什么?

2. 有哪些基本的、常用的介质类型? 对于我们的石油地球物理勘探，为什么要定义和引入这么多不同类型的介质模型?

3. 物体在什么条件下表现为刚性性质、弹性性质、黏滞性性质和塑性性质?

4. 地球物理勘探中一般用哪些物理量来描述岩石的物理性质(或弹性性质)?

5. 什么是波? 什么是弹性波和地震波?

6. 地震波有哪些基本类型的波?

7. 弹性波动力学的基本任务是什么?

8. 地震波动理论所研究的基本内容是什么?

9. 线性弹性理论的基本假设的物理意义是什么?

10. 非线性弹性理论所针对的问题与研究内容是什么?

2 直角坐标张量的基础

本章将首先回顾在物理学中为了表示空间某点的物理状态和性质所使用的标量和向量，然后简要介绍一些数学场论的基础知识。最后详细介绍、描述某些物理量所需要使用的直角坐标张量的基础知识。

2.1 标量与向量

2.1.1 标量与向量的定义

描述一个物理现象，需要用一个物理量来说明和定义它，同时该物理量还需要具体的单位、量值、方向等来共同说明。

1. 标量

单位与数值的结合，称为量值。

用一个可以有正、负的量值就能完全代表一种物理量，称为标量。如质量(kg)、密度(g/cm^3)、时间(s)、温度(℃)等。

2. 向量

既有量值大小又有方向，且服从确定的运算法则的量，称为向量。

一般来说，在物理学中称作矢量，在数学中称作向量。如速度(m/s)、加速度(m/s^2)、力(N)、位移(m)等。

2.1.2 向量的表示法

1. 向量的坐标表示

一个向量的向径大小不受坐标变换的影响，其方向可以用一个三维直角坐标系来表示。

在三维直角坐标系中的向量可以用三个坐标分量来表示：

$$a = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = (a_x, a_y, a_z)$$

其中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为坐标系的单位向量或基向量。

坐标系是为了使用的方便而引入的。

向量表示法具有较大的独立性，理论推导方便。坐标表示法是为了计算方便。

2. 向量的模与方向余弦

向量的模：

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

即三个坐标轴上分量的平方和开方。

方向余弦：$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i})$ 即向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴 $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ 的夹角 (α,β,γ) 的余弦，如图 2.1 所示。

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|} \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$$

单位向量：

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{i} + \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{j} + \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{k} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$$

并且满足 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$，即三个方向余弦分量的平方和等于单位 1。因此向量还可以表示为：

$$\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|\ \boldsymbol{a}_0.$$

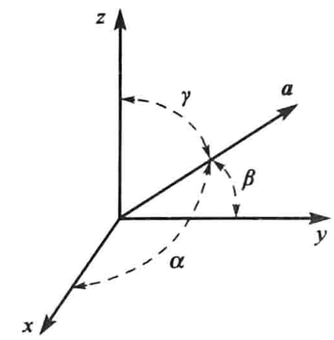

图 2.1　一个向量的方向余弦

2.1.3　向量的运算

1. 向量的代数运算

对于向量 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$，有如下运算定律：

交换律：　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$

结合律：　$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$

$k(\lambda\boldsymbol{a}) = (k\lambda)\boldsymbol{a}$

分配律：　$k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$

$(k + \lambda)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{a}$

向量的减法：　$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$

向量的三角不等式：　$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$

其中 k、λ 为实数。

2. 两个向量的标量积

两个向量的标量积又称为两个向量的点积或内积，将得到一个标量。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\theta = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

坐标表示：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \cdot (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\end{aligned}$$

即对应分量的乘积的总和。

可以用一个力对质点所作的功来说明(图 2.2)。

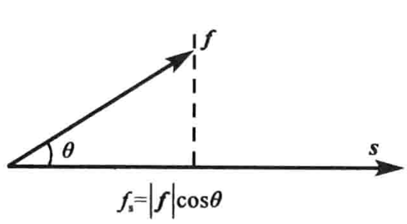

图 2.2　两个向量的标量积

功是用来描述力对物体作用的空间累积效应，如人推车移动的作用效果、贡献大小等。

$$A = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{s} = |\boldsymbol{f}| \cdot |\boldsymbol{s}| \cos\theta = |\boldsymbol{f}| \cos\theta \cdot |\boldsymbol{s}| = f_s \cdot s$$

即作用力在位移方向的投影与位移长度的乘积，功是一个标量。

标量积运算适合以下的运算规律：

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a}) \cdot (\mu\boldsymbol{b}) = \lambda\mu\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$$

其中 λ、μ 为常数。

引理：两个非零向量垂直的充分必要条件是标量积为 0：$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$

3. 两个向量的向量积

两个向量的向量积又称为叉积或外积，记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，其结果为一向量，该向量垂直于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 所确定的平面，如旋转运动即为两个剪切力合成的结果。

(1)大小：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$。

(2)方向：按右手螺旋法则确定如图 2.3 所示。

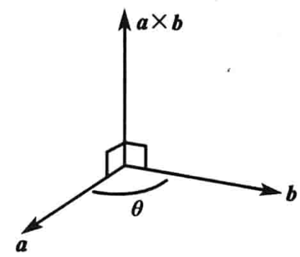

图 2.3 两个向量的向量积

向量积的坐标表达式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

向量积运算适合以下的运算规律：

反交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$.

结合律：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

$\lambda\boldsymbol{a}\times\mu\boldsymbol{b}=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

$[(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}]\times\boldsymbol{b}=(\lambda+\mu)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$.

引理：两个非零向量平行的充分必要条件是向量积为 0 向量：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$。

2.2 数学场及其空间导数

2.2.1 物理场与数学场

1. 物理场

场是物质的一种特殊形态。也可以说，场是指物体在空间和时间中的分布情况，即场是用空间位置和时间函数来表征的。在物理学中，经常要研究某种物理量在空间中的分布和变化规律。

如果某一个物理量在我们考虑的时间和空间范围内的每一个时间点和位置都有一确定的值与之对应，那么该物理量在时间和空间上的分布函数就称为一个物理场。如，静电场：静止带电体周围存在的一种物质，可以用电场强度，电位等物理量来描述；静磁场：空间中对运动电荷作用的磁力；电磁场：加速运动的电荷或交流电路周围存在的物质；重力场：空间中对相邻物体间产生的引力。

地球物理领域所研究的地球物理场，可以分为天然存在的地球物理场和人工激发的地球物理场。

地球岩石的重力场、地磁场、地电场、地温场、核物理场是天然存在的地球物理场；由人工爆炸或敲击产生的振动在地下传播的弹性波场、向地下供电在地下产生的局部电场、向地下发射电磁波激发出的电磁场等，属于人工激发的地球物理场。

地球物理场还可分为正常场和异常场。异常场是由勘探对象所引起的局部地球物理场的异常出现。例如，存在地下的磁铁矿体或磁性岩体中产生的磁场，这部分磁场叠加在它的围岩

和地球其他部分产生的磁场之中，在研究观测得来的磁场时，就要区分或提取出磁异常场；又如铬铁矿的密度比围岩的密度大，盐丘岩体的密度比围岩的密度小，这两种情况分别会引起重力场局部增强或减弱的异常现象。

地球物理勘探正是根据对各种正常场和异常场的分布特征研究，进行地质解释和推断。我们的地震勘探就是人工激发的地球物理场，如炸药爆炸产生的弹性波场，弹性波在岩层中传播遇到不同密度的分界面时会发生反射、折射和能量衰减等现象，根据弹性波返回到地面的时间来研究其传播速度、岩层厚度和产状等问题。

2.数学场

作为空间坐标的函数(有时还是时间的函数)的任何物理量，都可以抽象为一个数学场。地震勘探所研究的弹性波场，很自然地就要引用适当的数学场，特别是一些数学场论的一些运算工具。

2.2.2 标量场与向量场

1.标量场

以地下岩石密度和温度为例说明。

通过钻井采样发现，地下不同深度、不同地方的岩石密度是不同的，即它是空间坐标的函数 $\rho=\rho(x,y,z)$ 。岩石密度不随坐标系而变，只是在不同的坐标下有不同的表达式，它有一定的单位——g/cm^3，但没有方向，因此称为标量场。

同样，地下地层的温度也是一个标量场，即不同深度、不同地方的地层温度是不同的，只是空间位置的函数 $T(x,y,z)$ 。在油藏开发过程中，如稠油注蒸汽开采时，地层温度还是时间变量的函数，即 $T(x,y,z,t)$ 。

2.向量场

以河水流动的速度和地下温度的变化率为例说明。

生活中可以观察到，一条河流中不同位置、不同时间的水流速度、方向都可能是不一样的，即流速是空间位置、时间的函数，且有方向的一个向量场。

$$\boldsymbol{v}=v(x,y,z,t)=v_x(t)\boldsymbol{i}+v_y(t)\boldsymbol{j}+v_z(t)\boldsymbol{k}$$

在三维直角坐标中，由三个分量确定着速度场向量本身，这三个分量的总体集合称为该向量场在此坐标系下的表征。在不同的坐标系下，向量场有不同的分量，即不同的表征，这也称为向量场存在有坐标变换的性质。

另外，研究地下地层温度(标量场)在横向和纵向上的差异大小，我们需要考察温度在空间三个方向上的变化率：

$$\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial x},\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial y},\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z}$$

即地层温度的变化率是一个既有大小又有方向的物理量，因此可以称它为一个向量场。

小结(从描述一个物理量的复杂程度来说)：

标量场：$N^0=1$　　0阶(复杂性)；

向量场：$N^1=3$　　1阶(复杂性)；

张量场：$N^2=9$　　2阶(复杂性)。

其中 N 代表空间坐标的个数，物理空间中 $N=3$ 。

2.2.3 张量场的引出

前面考查空间某点的标量场(如地层的温度场)与相邻点的变化率时可知,其变化率可能存在不同的方向有不同的值,即标量场的变化率可以得到一个向量场。

因此,如果我们考查空间某点 p 处的一个向量场 $\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)$,沿任意方向 C 的变化率,则将引出一个新的数学场—张量场。

如图 2.4 所示,在任意方向 C 上的相邻两点 p、p'处的向量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}'$,则向量 $\boldsymbol{A}$ 沿任意方向 C 的变化率,即微分:

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial C}=\lim_{pp'\to 0}\frac{\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}}{\Delta C}$$

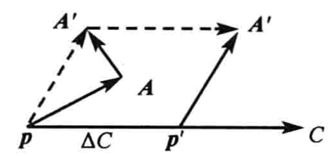

图 2.4 向量的变化率

令 $\Delta C=pp'$在直角坐标系的投影为:$\Delta x,\Delta y,\Delta z$。我们可以理解为:$p'$点的向量 $\boldsymbol{A}'$可以用 p 点的向量 $\boldsymbol{A}$ 的泰勒级数来表示:

$$\boldsymbol{A}'(p)=\boldsymbol{A}(p)+\frac{\boldsymbol{A}\ (p)'}{1!}(p'-p)+\frac{\boldsymbol{A}\ (p)''}{2!}\ (p'-p)^2+\cdots$$

其中,向量 $\boldsymbol{A}$ 的一阶导数为:

$$\boldsymbol{A}\ (p)'=\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x},\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y},\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}\right)$$

$$p'-p=\boldsymbol{pp}'=\Delta C=(\Delta x,\Delta y,\Delta z),$$

略去高阶微分项后,两个向量的差就为两个向量的标量积,如下式:

$$\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\ (p)'\cdot\boldsymbol{pp}'=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}\Delta z=\Delta\boldsymbol{A}.$$

考虑方向余弦:

$$\frac{\Delta x}{\Delta C}=\cos(\boldsymbol{x},\boldsymbol{C})=l,\quad \frac{\Delta y}{\Delta C}=\cos(\boldsymbol{y},\boldsymbol{C})=m\quad,\frac{\Delta z}{\Delta C}=\cos(\boldsymbol{z},\boldsymbol{C})=n,$$

$$\frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta C}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial C}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}l+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y}m+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}n$$

再代入向量 $\boldsymbol{A}$ 的直角坐标系下的投影分量 (A_x,A_y,A_z),则有:

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial C}=\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\boldsymbol{j}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\boldsymbol{k}\right)l+\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial A_z}{\partial y}\boldsymbol{k}\right)m+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\boldsymbol{i}+\frac{\partial A_y}{\partial z}\boldsymbol{j}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)n$$

描述一点向量 $\boldsymbol{A}$ 沿任意方向 C 的变化率(微商),或者说考察相邻两点处两个向量场有多大的相差,就要分别比较向量场的三个分量 (A_x,A_y,A_z) 分别在直角坐标系的三个轴 (x,y,z) 上的变化率,即需要 9 个偏导数,把这 9 个分量的总体集合:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial x}\\ \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial y}\\ \frac{\partial A_x}{\partial z} & \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial z}\end{pmatrix}$$

来反映向量场的空间变化率，称为张量。这9个分量一般都是空间坐标的函数，因此也称为张量场。

小结：对于三维空间中($N=3$)

标量场：$N^0=1$　　称为0阶张量；

向量场：$N^1=3$　　称为1阶张量；

张量场：$N^2=9$　　称为2阶张量。

推广到一个 r 维的空间中，即需要用 r^n 个量来描述的一个数学场，则称为 n 阶 r 维张量。

可以说，张量的概念是向量概念和矩阵概念的推广，标量是零阶张量，向量是一阶张量，3×3的矩阵(方阵)是二阶张量，而三阶张量则好比立体矩阵，更高阶的张量用图形就无法表达了。

2.2.4　数学场的空间导数场

描述标量场的变化率需要引入向量场，描述向量场的变化率需要引入一个张量场，描述一个向量场的散度仅仅需要一个标量场，它们之间的转换是通过数学场的空间导数来实现。

1. 空间导数的初步概念

$$y=f(x)\to y'=f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\to\Delta y=y'\cdot\Delta x$$

$f'(x_0)$表示函数 $f(x)$在一个确定的 x_0 点处的变化率(即斜率)。

在三维直角坐标系下的数学场：在 p 点处，可以是标量场、向量场、张量场。

p 点→p'点：

两个场值的差或场值的增量，可以写成各个偏导数的线性式。对于标量场 S 的增量 $\mathrm{d}S$，可以用三个分量$\left(\frac{\partial S}{\partial x},\frac{\partial S}{\partial y},\frac{\partial S}{\partial z}\right)$表示出来；对于向量场 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}'$ 的增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 可以用这9个分量$\begin{pmatrix}A_{xx} & A_{yx} & A_{zx}\\ A_{xy} & A_{yy} & A_{zy}\\ A_{xz} & A_{yz} & A_{zz}\end{pmatrix}$表示出来；这就构成了另外一些数学场，来描述原来那个场的分布和特征。

2. 哈密顿(Hamiltonian)算子(又称矢量微分算子)

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

该式代表了对后面的函数作一种运算手续，这种数学符号也称为算符(或算子)，并具有矢量性和微分性的特征。

2.2.5　数学场的梯度、散度与旋度

1. 标量场的梯度

$\nabla S=\frac{\partial S}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial S}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial S}{\partial z}\boldsymbol{k}=\mathbf{grad}S$ 称为标量场 S 的梯度，这是从一个标量场得到一个向量场，它反映了标量场沿任意方向的变化率。

(1)标量场的增量，可以理解为标量在任意方向的变化率。

设任意方向无限小向量：　$\boldsymbol{pp}'=\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$.

p 到 p' 的标量场的增量：$\mathrm{d}S=\dfrac{\partial S}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial S}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial S}{\partial z}\mathrm{d}z$.

用一个向量（S 的梯度）沿任意方向作标量积：

$$\nabla S\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\left(\frac{\partial S}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial S}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial S}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k})=\frac{\partial S}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial S}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial S}{\partial z}\mathrm{d}z=\mathrm{d}S.$$

举例：求标量场 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $M(1,0,1)$ 处，沿向量 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的变化率。

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\rightarrow\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,0,1)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

同理可得：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,0,1)}=0,\quad\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

而单位向量为：$\boldsymbol{l}_0=\dfrac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$

故可得 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(1,0,1)}=\nabla u\cdot\boldsymbol{l}_0\big|_{(1,0,1)}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{3}\cdot 0+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

（2）标量场的梯度：可以用来表示标量场 S 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化率。

$$\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial S}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial S}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial S}{\partial z}\cos\gamma=\boldsymbol{l}_0\cdot\mathbf{grad}S$$

$l_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是沿 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向的单位向量。

梯度的概念具有下列意义：

①梯度的方向是函数 S 增长最快的方向，反之梯度的反方向是函数减小最快的方向；

②方向导数等于梯度在该方向的投影；

③梯度的模等于函数沿这一方向的变化率。

梯度运算的基本公式有：

$$\nabla C=0$$
$$\nabla(CS)=C\nabla S$$
$$\nabla(S\pm R)=\nabla S\pm\nabla R$$
$$\nabla(RS)=R\nabla S+S\nabla R$$
$$\nabla\left(\frac{R}{S}\right)=\frac{1}{S^2}(S\nabla R-R\nabla S)\quad S\neq 0$$
$$\nabla[f(S)]=f'(S)\nabla S$$

其中 C 为常数，R、S 为两个标量场，f 为一连续可微函数。

2. 向量场的散度

考虑向量场的空间导数场中的 9 个分量，

$$\begin{pmatrix}A_{xx}&A_{yx}&A_{zx}\\A_{xy}&A_{yy}&A_{zy}\\A_{xz}&A_{yz}&A_{zz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial A_x}{\partial x}&0&0\\0&\dfrac{\partial A_y}{\partial y}&0\\0&0&\dfrac{\partial A_z}{\partial z}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\dfrac{\partial A_y}{\partial x}&\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\\\dfrac{\partial A_x}{\partial y}&0&\dfrac{\partial A_z}{\partial y}\\\dfrac{\partial A_x}{\partial z}&\dfrac{\partial A_y}{\partial z}&0\end{pmatrix}$$

可以构成一个“标量导数场”和一个“向量导数场”。