

美国MCM/ICM竞赛指导丛书

美国大学生数学建模 竞赛题解析与研究

第5辑

王杰 Jay Belanger
吴孟达 刘易成

 高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

美国MCM/ICM竞赛指导丛书

美国大学生数学建模 竞赛题解析与研究

Meiguo Daxuesheng Shuxue Jianmo Jingsaiti Jiexi yu Yanjiu

第5辑

王 杰 Jay Belanger
吴孟达 刘易成



 高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS · BEIJING

内容提要

本系列丛书是以美国大学生数学建模竞赛(MCM/ICM)赛题为主要研究对象,结合竞赛特等奖的优秀论文,对相关的问题做深入细致的解析与研究。本辑针对2013年MCM/ICM竞赛的3个题目:最佳巧克力蛋糕烤盘问题、淡水资源的调配问题以及地球生态环境的健康临界点问题等进行了解析与研究。由于参赛论文需要用英语书写,同时考虑到不同层次读者的需要,故本书包括两部分:一部分是地道的英文,另一部分为与之对应的中文,便于读者在学习建模方法的同时,逐步培养用英文写作及思考的习惯。

本书内容新颖、实用性强,可作为指导学生参加美国大学生数学建模竞赛的主讲教材,也可作为本科生、研究生学习和准备全国大学生、研究生数学建模竞赛的参考书,同时也可供研究相关问题的科研人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

美国大学生数学建模竞赛题解析与研究. 第5辑 / 王杰等编著. — 北京:高等教育出版社, 2014. 6

(美国MCM/ICM竞赛指导丛书 / 王杰主编)

ISBN 978-7-04-033914-7

I. ①美… II. ①王… III. ①数学模型 - 竞赛题 - 研究 IV. ①O141.4-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第039903号

策划编辑 刘英 责任编辑 刘英 封面设计 李卫青 版式设计 杜微言
插图绘制 尹莉 责任校对 陈杨 责任印制 韩刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社址	北京市西城区德外大街4号	网址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
开本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landaco.com.cn
印张	17.25	版次	2014年6月第1版
字数	330千字	印次	2014年6月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定价	45.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 33914-00

审图号 GS(2013)2902号

“美国 MCM/ICM 竞赛指导丛书”
编审委员会

顾 问

Sol Garfunkel 美国数学及应用联合会 (COMAP)

Chris Arney 西点军校

主 编

王 杰 麻省大学罗威尔分校/COMAP 中国合作部

副主编

叶其孝 北京理工大学

秘 书

毛紫阳 国防科学技术大学

委 员 (按姓氏拼音排序)

Jay Belanger 杜鲁门州立大学

Joseph Myers 美国陆军研究部

陈秀珍 乔治华盛顿大学

龚维博 麻省大学阿默斯特分校

韩中庚 解放军信息工程大学

贺明峰 大连理工大学

贺祖国 北京邮电大学

刘深泉 华南理工大学

鲁习文 华东理工大学

谭 忠 厦门大学

王嘉寅 圣路易斯华盛顿大学

吴孟达 国防科学技术大学

叶正麟 西北工业大学

张存权 西弗吉尼亚大学

COMAP 总裁序

美国大学生数学建模竞赛 (the Mathematical Contest in Modeling, MCM) 已经举办近 30 年了, 时间真是快得难以置信。在此期间, 竞赛从最初参赛的 90 支美国队逐渐发展成为一个国际大赛, 今年已有来自世界各地的 25 个国家超过 5 000 支队伍参赛。尤其令人感动和鼓舞的是我的中国同事们对竞赛赋予的极大热情以及中国参赛队伍的快速增长。COMAP 张开双臂欢迎你们的参与。

COMAP 每年举办 3 个建模竞赛, 即 MCM, ICM (the Interdisciplinary Contest in Modeling) 和 HiMCM (the High School Mathematical Contest in Modeling) 竞赛。竞赛的目的不仅仅是奖励同学们所作出的努力——无疑这是同样重要的, 我们举办各类数学建模竞赛的目的始终是为了推动在世界各国的各级教育体系中增加应用数学及数学建模的比重。建模是人们为了解世间事物的运作规律所做的尝试, 数学的使用能够帮助我们建立更好的模型。这不是一个国家的任务, 而是所有国家都应该共同关心的问题。COMAP 建模竞赛从孕育到现在已经演变成实现这一宏伟目标的有力工具。

我热切地希望同学们通过阅读这套优秀的丛书, 对 COMAP 竞赛有更多的了解, 并且学习到更多有关数学建模的方法与过程。我希望同学们尝试自己解决丛书中讨论的所有建模问题, 这些都是令人兴奋并且具有实用价值的问题。我希望更多的同学参加 MCM/ICM 竞赛, 并参与推广和普及数学建模的活动, 这是很有意义的工作。

萨尔·加芬克尔, 博士
COMAP 总裁
2012 年 11 月

Forward by Sol Garfunkel

While it is hard for me to believe, the Mathematical Contest in Modeling (MCM) is fast approaching its 30th year. During this time we have grown from 90 US teams to over 5,000 teams representing 25 countries from all across the globe. We have been especially buoyed by the enthusiasm shown by our Chinese colleagues and the rapid growth in Chinese participation. COMAP welcomes your involvement with open arms.

COMAP runs three contests in mathematical modeling; they are MCM, ICM (the Interdisciplinary Contest in Modeling), and HiMCM (the High School Mathematical Contest in Modeling). The purpose of all of these contests has never been simply to reward student efforts — as important as that is. Rather, our objective from the beginning has been to increase the presence of applied mathematics and modeling in education systems at all levels worldwide. Modeling is an attempt to learn how the world works and the use of mathematics can help us produce better models. This is not a job for one country, but for all. The COMAP modeling contests were conceived and evolved to be strong instruments to help achieve this much larger goal.

It is my supreme hope that through this excellent book series the Chinese students will learn more about COMAP contests and more about the process of mathematical modeling. I hope that you will begin to work on the exciting and important problems you see here, and that you will join the MCM/ICM contests and the rewarding work of increasing the awareness of the importance of mathematical modeling.

Sol Garfunkel, PhD

Executive Director

COMAP

November 2012

ICM 竞赛主席序

数学建模的训练与经验能使同学们在解决问题时更有创意，同时也能帮助同学们成为更为优秀的研究生。“美国 MCM/ICM 竞赛指导丛书”的出版，将通过数学建模竞赛题目和概念的解析，帮助同学们掌握数学建模的技能，并为同学们在今后的工作中获得成功打下坚实的基础。

数学建模是一种过程，也是一种理念，或者说是一种哲学。作为过程，学生在理解及使用建模过程或框架时需要指导并积累经验。作为经验，学生需要使用不同的数学方法（离散、连续、线性、非线性、随机、几何及分析）构造数学模型，从中体验不同的细节及复杂程度。作为理念，学生需要发现各种相关的、具有挑战性的及有趣的实际问题，从中培养对数学建模的兴趣，并认识到数学建模在实际生活中的作用。数学建模的主要目的是指导学生用建模的方法解决实际问题。尽管在实际中，有些问题或许可以使用已有的算法和公式来求解，但数学建模的方法比简单使用已有算法和公式能解决更多的问题，特别是解决新的、没有固定答案及没有被解决过的问题。

为了积累经验，同学们应尽早地接受数学建模训练，至少应该在大学低年级时就开始，这样可以在以后的课程学习中进一步强化数学建模能力。由于数学建模的综合与交叉特性，所以各个专业的学生都能够从数学建模活动中受益。

本套丛书从将数学模型作为研究工具的角度出发，介绍模型的构造，分析建模过程，这些都是帮助学生更好地掌握数学建模技能的重要因素。数学建模是充满挑战的高级技能，更重要的是能够帮助学生更好地成长。当今世界需要解决的问题往往很复杂，所以建立的数学模型也很复杂，通常需要通过精细的计算和模拟才能获得解答或对模型结果的分析与检验。由于数据可视化技术的普及，解题方法的增加，所以现在的确是培养更多数学建模高手的最佳时期。

我希望同学们在数学建模探索中取得进步，也希望指导教师在使用这套丛书提供的例子及方法指导学生时取得很好的效果。尽管学生的层次可能不同，但我对你们的忠告是同样的：树立你的信心，发展你的技能，用你的才能解决社会中最具挑战及最重要的问题。祝各位建模好运！

克里斯·阿尼，博士
美国西点军校数学系教授
ICM 竞赛主席
2011 年 10 月

Forward by Chris Arney

Undergraduate students who receive instruction and experiences in mathematical modeling become better and more creative problem solvers and graduate students. This book series is being published to prepare and educate students on the topics and concepts of mathematical modeling to help them establish a problem solving foundation for a successful career.

Mathematical modeling is both a process and a mindset or philosophy. As a process, students need instruction and experience in understanding and using the modeling process or framework. As part of their experience, they need to see various levels of sophistication and complexity, along with various types of mathematical structures (discrete, continuous, linear, nonlinear, deterministic, stochastic, geometric, and analytic). As a mindset, students need to see problems that are relevant, challenging, and interesting so they build a passion for the process and its utility in their lives. A major goal in modeling is for students to want to model problems and find their solutions. Recipes for structured or prescribed problem solving (canned algorithms and formulas) do exist in the real world, but mathematical modelers can do much more than execute recipes or formulas. Modelers are empowered to solve new, open, unsolved problems.

In order to build sufficient experience in modeling, student exposure must begin as early as possible – definitely by the early undergraduate years. Then the modeling process can be reinforced and used throughout their undergraduate program. Since modeling is interdisciplinary, students from all areas of undergraduate study benefit from this experience.

The articles and chapters in this series expose the readers to model construction, model analysis, and modeling as a research tool. All these areas are important and build the students' modeling skills. Modeling is a challenging and advanced skill, but one that is empowering and important in student development. In today's world, models are often complex and require sophisticated computation or simulation to provide solutions or insights into model behavior. Now is an exciting

time to be a skilled modeler since methodology to provide visualization and find solutions are more prevalent and more powerful than ever before.

I wish the students well in their adventure into modeling and I likewise wish faculty well as they use the examples and techniques in this book series to teach the modeling process to their students. My advice to all levels of modelers is to build your confidence and skills and use your talents to solve society's most challenging and important problems. Good luck in modeling!

Chris Arney, PhD
United States Military Academy at West Point
Professor of Mathematics
Director of the Interdisciplinary Contest in Modeling
October 2011

丛书简介

美国大学生数学建模竞赛 (the Mathematical Contest in Modeling, MCM/the Interdisciplinary Contest in Modeling, ICM), 即“数学建模竞赛”和“交叉学科建模竞赛”, 是一项国际级的竞赛活动, 为现今各类数学建模竞赛之鼻祖。

1985 年, 在美国教育部的资助下, 在美国针对在校大学生创办了一个名为“数学建模竞赛”的竞赛, 其宗旨是鼓励大学师生对不同领域的各种实际问题进行阐明、分析并提出解决方案。它是一种完全公开的竞赛, 参赛形式为学生三人组成一队, 在 3 天 (72 小时) (近年改为 4 天, 即 96 小时) 内任选一题, 完成数学建模的全过程, 并就问题的重述、简化和假设及其合理性的论述、数学模型的建立和求解 (及软件)、检验和改进、模型的优缺点及其可能的应用范围与自我评价等内容写出论文。MCM/ICM 非常重视解决方案的原创性、团队合作与交流以及结果的合理性。由专家组成的评阅组进行评阅, 评出优秀论文。除了不允许在竞赛期间与团队以外的任何人 (包括指导教师) 讨论赛题之外, 允许使用图书资料、互联网上的资料、任何类型的软件等各种资料和途径, 从而为参赛学生提供了广阔的创作空间。第一届竞赛时, 只有美国的 158 个队报名参加, 其中只有 90 个队提交了解答论文。2012 年 MCM/ICM 共有 5 026 个队参加, 其中 MCM 有 3 697 个队, ICM 有 1 329 个队, 遍及五大洲。MCM/ICM 已经成为最著名的国际大学生竞赛之一, 影响极其广泛。

近年来, 已有越来越多的中国学生组队参加美国大学生数学建模竞赛, 其中不乏被评为优胜论文 (Outstanding Winners) 的佼佼者, 这充分显示了我国大学生参加 MCM/ICM 的积极性与实力。学生在准备竞赛的时候, 除了在指导教师的帮助下阅读和研究以往竞赛的优胜论文以外, 普遍希望能有一些专门针对美国大学生数学建模竞赛的书籍, 指导和帮助备赛。

“美国 MCM/ICM 竞赛指导丛书”就是为了满足读者的这一需求而出版的, 目的是帮助学生学习从全局出发, 不受固定模式的限制, 用建模的手段解决开放性问题的研究方法, 并提高写作能力。丛书的读者对象包括参赛学生及对数学建模与算法感兴趣的研究生、专业人员和业余爱好者。

我们邀请到 COMAP 中国合作总监、美国麻省大学罗威尔分校王杰教授担任丛书主编, 他曾为 MCM/ICM 命题, 对竞赛具有很多独到的认识。丛书作者

来自各高校，他们都是有经验的指导教师或参加过竞赛的优秀成员。丛书包括一本《正确写作美国大学生数学建模竞赛论文》和若干辑《美国大学生数学建模竞赛题解析与研究》，前者为了一本指导学生如何正确写作 MCM/ICM 论文的工具书，后者中的每一辑将讨论若干赛题，包括问题的背景、分析技巧、建模与测试方法及算法设计，并引导读者列出进一步研究的课题。目标是培养学生多方面的能力，如数学、编程、写作及课题研究等的训练，提高学生分析问题、解决问题的水平。

丛书的出版计划得到了美国数学建模专家的广泛支持，COMAP 总裁 Sol Garfunkel 博士及 ICM 主席、西点军校数学系教授 Chris Arney 博士受邀担任丛书顾问并为丛书作序。

我们热切希望通过这套丛书的出版，进一步活跃我国大学生参加 MCM/ICM 的积极性，提高他们的自信心，并最终取得满意的成绩。更为重要的是，提高学生的研究和解决实际问题的能力。

前言

2013 年美国大学生数学建模竞赛 (MCM/ICM) 是 1985 年竞赛开办以来参赛队伍最多的一年, 也是中国参赛队最多的一年, 而且取得了很好的成绩, 特别值得一提的是大部分的优胜论文 (Outstanding Winners) 都由中国参赛队所获得。预计 2014 年将有更多的中国队参赛。

2013 年也是 MCM/ICM 竞赛史上具有特殊意义的一年: 由中国建模专家组成的评委会首次在中国本土对中国学生提交的 5 124 篇 MCM 论文进行了初审, 这是一个新的尝试。通过这样的评审方式发现了一些值得深入思考的问题。比如, 在中国初审中获得最高分数的论文在优胜论文的终审中却无一中榜, 原因何在有待进一步探讨。从表面上看, 中国评委似乎更注重技术细节, 而美国评委则更注重创意与创新。除了写作本身的问题外, 这些观念上的差异会直接导致论文表达形式的不同, 使本来有可能进入更高级别的论文得不到应有的评价。追溯这些差异的根源则可能需要从中美两国文化背景和哲学理念上的差异, 以及竞赛设计理念的不同着手, 这也说明了加强中美两国交流的重要性。

本书将基于 2013 年的 MCM/ICM 竞赛题目, 针对 MCM/ICM 赛题的风格和特点, 着重讲解赛题解答的整个过程及具体的评判标准, 使中国学生对 MCM/ICM 有更深入的了解, 缩小理念上的差异, 以便在以后的竞赛中取得更加优异的成绩。

2013 年 MCM 的 A 题是设计最佳巧克力蛋糕烤盘问题, B 题是淡水资源的最优调配问题, C 题是地球生态环境的健康临界点问题。今年的 C 题和过去两年的 C 题一样都隶属网络科学, 而且明年的 C 题也还将是有关网络科学的题目。

本书的结构如下: 第 1 章介绍美国大学生数学建模竞赛的特点及设计理念。第 2 章介绍赛题解答的常规思路和方法, 包括赛前准备、读题、寻找相关资料、模型设计、赛题解答、稳定性及敏感性测试以及论文写作。第 3 章和第 4 章分别介绍 A 题及 B 题解答的具体过程及注意事项, 并给出若干优胜论文的解答方法。第 5 章和第 6 章给出了 C 题全部优胜论文的解答方法, 其中第 5 章介绍连续数学的方法, 第 6 章介绍离散数学的方法。第 3 章和第 4 章比较注重解答的细节分析, 而第 5 章和第 6 章则更注重解答的整体构造。这些优胜论文代

表了目前世界大学生数学建模的水平。此外，书中还附有一定数量的习题以供练习。

本书旨在为有志参加 MCM/ICM 竞赛的读者提供帮助，同时也可作为数学建模的参考书。我们希望为以下两类读者提供服务，一类是英文程度较高的读者，可直接阅读英语文献；另一类是英文程度较低的读者，阅读英语文献还有一定困难。为了达到这个目的，本书用英文撰写，并邀请了国防科学技术大学吴孟达教授及刘易成副教授将英文书稿译成中文，并由作者最后统稿，按英文在前、中文在后的次序编排。英语程度较低的读者可先阅读中文，然后再阅读英文，或者对照阅读。建议英语程度高的读者直接阅读英文，训练用英语思考问题的习惯，而不是先用中文思考再用英语表达。这样写出的论文读起来会更加流畅。

作者虽然尽了很大努力，书中的缺点和错误仍在所难免，恳请读者谅解，并欢迎读者批评指正。请将改进建议和发现的错误寄到作者的电子邮箱：wang@comap.com。对于读者的支持与帮助，我们在此表示由衷的感谢。

王杰, COMAP 中国合作部及
麻省大学罗威尔分校
Jay Belanger, 杜鲁门州立大学
2013 年 10 月

目录

COMAP 总裁序

Forward by Sol Garfunkel

ICM 竞赛主席序

Forward by Chris Arney

丛书简介

前言

I Mathematical Modeling for MCM/ICM 2013

Chapter 1 Introduction	2
Chapter 2 General Methodology	6
2.1 Before the Contest	6
2.2 Reading the Problem	7
2.3 Literature Search	9
2.4 Creating Models	11
2.5 Finding Solutions	12
2.6 Stability and Sensitivity	13
2.7 Writing up the Solution	14
Exercises	15
Chapter 3 The Ultimate Brownie Pan	16
3.1 Problem Description	16

3.2	How to Approach the Problem	17
3.2.1	Deciding What Needs to Be Done	17
3.2.2	Searching the Literature	19
3.2.3	Creating a Model	21
3.2.4	Finding Solutions	22
3.2.5	Stability Testing	22
3.3	Judging	23
3.3.1	Judging Criteria	23
3.3.2	Outstanding Winners	24
3.4	Model 1: The Best Rounded Rectangle for Ultimate Brownies	25
3.4.1	Packing the Pans in Standard Ovens	25
3.4.2	Maximizing the Even Distribution of Heat	28
3.4.3	Optimizing the Perimeters of Pans	34
3.5	Model 2: An Outstanding Brownie Pan	35
3.5.1	Analyzing a Circular Pan	36
3.5.2	Examining Two-dimensional Shape	37
3.5.3	Finding the Best Shape	39
	Exercises	41
Chapter 4 Water, Water, Everywhere		43
4.1	Problem Description	43
4.2	How to Approach the Problem	43
4.2.1	Searching the Literature	44
4.2.2	Creating a Model	45
4.2.3	Finding Solutions	46
4.2.4	Stability Test	46
4.3	Judging	46
4.3.1	Judging Criteria	46
4.3.2	Outstanding Winners	47
4.4	Model 1: A Highly Regarded Water Strategy	48
4.4.1	Water Supply and Demand	48
4.4.2	Modeling Water Transfer	52
4.4.3	Water Transfer and Desalinization	53
4.4.4	Including Water Conservation	55

4.5	Model 2: An Outstanding Water Strategy	55
4.5.1	Water Supply and Demand	56
4.5.2	Water Distribution Costs	57
4.5.3	Modeling Water Transfer and Desalination	58
4.5.4	Using the Model to Determine a Strategy	59
4.5.5	The Best Strategies	60
4.6	Model 3: Meeting the Demands of Saudi Arabia's Water Needs	61
4.6.1	Modeling Desalination	61
4.6.2	A Water Distribution Strategy	62
4.6.3	Treating Waste Water	65
4.6.4	Comments	66
	Exercises	66
Chapter 5 Network Modeling of Earth's Health I		68
5.1	Problem Description	68
5.2	How to Approach the Problem	71
5.2.1	Select Measures	73
5.2.2	Devise Network Models	73
5.2.3	Validate Models and Perform Sensitivity Analysis	75
5.3	Judging Criteria	75
5.3.1	Judging Criteria	75
5.3.2	Outstanding Winners	77
5.4	Model 1: A Two-level Network Model Using Differential Equations	78
5.4.1	Network Model	79
5.4.2	Sub-level Integrations as Predator and Preys	80
5.4.3	Reaction Diffusions in the Top-level Network	81
5.4.4	The Final Equation	82
5.4.5	Tipping Points	83
5.4.6	Sensitivity Analysis	85
5.4.7	Network Structures	86
5.4.8	Adding Disturbances to Parameters	88
5.4.9	Comments	88
5.5	Model 2: A Network Model on Ocean Pollution Diffusion	89
5.5.1	An Ocean Pollution Network	89

5.5.2	Model 2.1: Pollution Diffusion	91
5.5.3	Prediction of Ocean Pollution Trends	92
5.5.4	Model 2.2: A Transmission Control System	94
5.5.5	Prediction of Pollution Trends	95
5.5.6	Sensitivity Analysis	96
5.5.7	Network Structures and Critical Nodes	98
5.5.8	Comments	100
	Exercises	100
Chapter 6 Network Modeling of Earth's Health II		103
6.1	Model 1: A Two-level Network over Forrester's World Model	103
6.1.1	The Network	103
6.1.2	Measuring Environmental Health	106
6.1.3	Sub-level Interactions as Bipartite Bayesian Belief Networks	107
6.1.4	Tipping Point for Environmental Health	108
6.1.5	Top-level Interactions as Communication Networks	109
6.1.6	Global Health and the Tipping Point	111
6.1.7	Prediction of Future Trends	113
6.1.8	Comments	113
6.2	Model 2: A Technology-diffusion Network Model	115
6.2.1	Technology Diffusion Model	115
6.2.2	CO ₂ Regression Model	117
6.2.3	CO ₂ Absorbtion Model	117
6.2.4	Model Validation	120
6.2.5	Global Health Prediction	120
6.2.6	Structure Analysis	121
6.2.7	Comments	122
6.3	Model 3: A Data-driven Network Model	123
6.3.1	Environmental Effects by Earth Damage Score	123
6.3.2	Human Actions	123
6.3.3	Assumptions	124
6.3.4	The Network Model	125
6.3.5	Measuring Centrality with PageRank	128