普通高等院校“十二五”规划教材

基础数学 I

（高等数学）

JICHU SHUXUE I GAODENG SHUXUE

沈大庆 主　编

李繁荣 崔艳英 刘亚轻 副主编

国防工业出版社

National Defense Industry Press

普通高等院校"十二五"规划教材

基础数学 I

（高等数学）

沈大庆　主编
李繁荣　崔艳英　刘亚轻　副主编

国防工業出版社

内 容 简 介

本书的主要内容有函数与极限、微分、积分、无穷级数与常微分方程等。课程教学的主要任务是培养学生掌握微积分的基本概念、基本原理及简单应用;培养学生使用微积分的方法及数学软件 Matlab 分析和解决实际问题的能力。它为后继课程提供必要的数学知识和工具。

本书适合作为应用型高校非数学各专业的基础课教材和参考书。工科各专业可讲授全部内容,需用 80 课时左右;文科专业可讲授去掉星号※的部分,需用 64 课时左右。建议 1/3 以上课时在数学实验室上。

图书在版编目(CIP)数据

基础数学. 1,高等数学/沈大庆主编. —北京:国防工业出版社,2014. 8

ISBN 978 - 7 - 118 - 09661 - 3

Ⅰ. ①基...　Ⅱ. ①沈...　Ⅲ. ①高等数学 - 高等学校 - 教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 190604 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787 × 1092　1/16　印张 13　字数 303 千字

2014 年 8 月第 1 版第 1 次印刷　印数 1—4000 册　定价 29. 80 元

国防书店:(010)88540777　发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755　发行业务:(010)88540717

前　言

近代数学的飞速发展，一方面使数学本身的面貌发生了根本的改变，另一方面推动了计算机科学与计算机技术以及高科技的飞速发展，从而改变了人类的生活，改变了整个世界的面貌。这一切都冲破着传统观念，改变了人们对数学知识的需求和利用，数学变得更深刻了，更有用了，更能用了。

然而，应用型高校的数学教育教学存在着与数学发展不相适应的弊病。其主要表现如下。

（1）教学内容陈旧。基础数学课是几十年不变的微积分、线性代数与概率统计，很少涉及现代应用数学。

（2）教学方法落后。现代教学技术（如多媒体、数学软件）没有发挥应有的作用。

（3）教学效果的评价标准存在问题。教学效果的检查主要是看考试成绩和考研的及格率，基本上还是应试教育。

（4）没有因材施教。应用型高校受教育的对象主要是即将进入社会的应用型人才，而不是数学上的创新人才。数学课片面强调推理和计算技巧，数学的应用讲的少，用数学解决实际问题的训练少。

特别是扩招以后，我国的高等教育从精英教育进入到大众教育阶段。大批按原来精英教育的标准上不了大学的学生涌进应用型高校，应用型高校的学生情况发生了根本的变化。众多的应用型高等院校则成了大众教育的主要承载体。许多应用型高校没有顺利完成及时的再定位和改革，仍沿用原有的精英教育时的数学教育教学模式。教学的内容、方法不变，考核难度因要顾及考研还有提高，这就使原本存在的数学教育教学方面的问题雪上加霜。所以应用型高校与研究型高校在数学教育教学上相比更需要改革。大众教育形势下的应用型高校的数学教育应是践行1986年联合国教科文组织提倡的“大众数学教育”，即使不同专业不同层次的学生都能学到能懂的、能用的数学。

正是基于上述考虑，我们提出了应用型高校数学教学改革内容的设想：本科数学教学分三个单元，总体上不增加数学教学的课时。第一个单元开设的课程叫基础数学，开一学年。其中一学期《基础数学Ⅰ（高等数学）》，一学期《基础数学Ⅱ（线性代数与概率统计）》。第二单元的课程为《应用数学》，开一学期。课程可涉及运筹学、层次分析法、差分方程、灰色系统、神经网络、插值与拟合、模糊数学、多元统计方法等。第三个单元的课程为《数学建模》，开一学期。与此相对应要出四本教材。要改变过去教学内容的弊病，还要考虑学生的现状。因此，教材不得不遵循以下原则。

（1）简单原则。要把数学尽量变成让现在的学生容易接受的、简单又有乐趣的课程。在完成同样要求的情况下简单和浅讲深用是我们追求的目标。

（2）压缩原则。我们改革后的教学内容一方面要介绍应用数学的内容（使学生了解现

代有用的数学）和数学建模的内容（培养用数学解决实际问题的能力）。另一方面由于“老三篇”是现代数学的基础，所以有必要保留其精华，那么，只有对这老三篇加以压缩。高等数学课程压成一学期，线性代数和概率统计压成一学期。

（3）淡化原则。首先是突出能体现学科思想的重要概念及其应用，淡化其他内容。其次是淡化数学形式化的表述和繁复的推理与计算。例如，高等数学着重讲述函数和极限、微分、积分、级数的概念和简单的应用；线性代数主要讲述线性方程组的概念和应用；概率则偏重一元随机变量的概念及相关问题。定理的推导过程几乎都去掉。

（4）与软件相结合原则。第一单元复杂题的计算用 Matlab 等数学软件解决。第二单元、第三单元的有些问题则需要简单编程去解决。使用数学软件也是由简到繁、由易到难。

本书就是改革后的第一部教材，共分为四章。第 1 章和第 2 章由李繁荣、崔艳英撰写，第 3 章由马吉臣、张红宁撰写，第四章由沈丽英、刘亚轻撰写。本书可作为二本、三本非数学专业的数学教材和参考书。全书授课应在 80 课时左右，去掉打星号部分应在 64 课时左右。其中 1/3 多的课程应考虑在数学实验室上。

本书带有探讨性，不妥之处在所难免，敬请各位读者批评指正。

编 者

2014 年 7 月 1 日

目　　录

第 1 章　函数与极限

函数概念于 17 世纪被引入后，便处于数学的中心地位，它把变量和运动带进数学而成为人们研究的主要对象。全部微积分其实就是建立在极限论基础上的函数理论。

1.1　函　　数

1.1.1　n 维空间

全体实数组成的集合称为实数集或 1 维空间，记作 R。

如 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个实数，则称$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为 n 元有序数组或 n 维向量，称所有 n 元有序数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$构成的集合$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in R, i = 1, 2, \cdots, n\}$为 n 维空间，并记作 R^n。特别地，R^1 就是 R。$R^2 = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$ 也称为 2 维平面。$R^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in R\}$ 也称为立体空间或 3 维空间或空间。常用 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示 R^n 中的元素（也称 X 为 R^n 中的点），x_i 称为 X 的第 i 个坐标。如果 X 是 R 中的元素，则可记为 x。

设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n), Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in R^n, \lambda \in R$，可定义以下两个运算。

$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$（称为 X 与 Y 的和），$\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$（称为 λ 与 X 的数乘）。也可以定义 X 与 Y 的距离：$\|X - Y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$。显然，如 $x, y \in R$，则 $\|x - y\| = |x - y|$；如 $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2) \in R^2$，则 $\|X - Y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$。

R^n 的部分元素构成的集合称为 R^n 的子集。下面给出 R^n 中的一些特殊的点和子集。若 $a \in R^n, \delta > 0$，则称$\{X \in R^n \mid \|X - a\| < \delta\}$为点 a 的 δ－邻域（简称为邻域），记作$U(a, \delta)$或 $U(a)$；称 $\{X \in R^n \mid 0 < \|X - a\| < \delta\}$为点 a 的去心 δ－邻域（简称为去心邻域），记作$\mathring{U}(a, \delta)$ 或$\mathring{U}(a)$。

如 $a \in R$，则 a 在 R 中的领域 $U(a, \delta)$和去心邻域$\mathring{U}(a, \delta)$分别为$\{x \in R \mid |x - a| < \delta\}$和$\{x \in R \mid 0 < |x - a| < \delta\}$。

假设 E 是 R^n 的一个子集，$p \in R^n$。若存在 p 的一个领域 $U(p)$，使得 $U(p) \subset E$（$U(p) \cap E = \varnothing$），则称点 p 称为 E 的内点（外点），显然，$p \in E$（$p \notin E$）。若对于任何 p 的邻域 $U(p)$ 都有 $U(p) \cap E \neq \varnothing$ 且 $U(p) \cap E^C \neq \varnothing$，则称点 p 为 E 的边界点（边界点 p 可能属于 E，也可能不属于 E）。E 的边界点的全体称为 E 的边界，记为∂E。如果对于任意给定的 $\delta > 0$，点 p 的去心邻域$\mathring{U}(P, \delta)$内总有 E 中的点，则称 P 是 E 的聚点（聚点 p 可能属于 E，也可能不属于 E）。

若 R^n 的子集 E 中的点都为 E 的内点，则称 E 为开集。若 E 的余集 E^C 为开集，则称 E

为闭集。若 E 内的任意两点都能用全属于 E 的折线连接起来(首尾相接的一些线段称为折线,而 R^n 中的以 a、$b(a \in R^n, b \in R^n)$ 为端点的线段——简称为线段——是指 R^n 中的子集 $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (1-\lambda)a + \lambda b, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$,当 $n=2$ 时这个子集确实是以 a、b 为端点的线段),则称 E 为连通集。

R^n 中连通的开集称为区域或开区域。区域连同它的边界一起构成的集合称为闭区域。

对于 R^n 的一个子集 E,如果存在坐标原点 O 的一个邻域 $U(O)$,使 $E \subset U(O)$,则称 E 为有界集,一个集合如果不是有界集,则称为无界集。

R 中的区域或开区域称为开区间,开区间连同它的边界一起构成的集合称为闭区间。开区间 $\{x \mid a<x<b\}$,记为(a,b)。闭区间 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$,记为$[a,b]$。$a$、$b$ 是其边界点。

此外,还有特殊的子集半开区间。半开区间 $\{x \mid a \leqslant x<b\}$,记为$[a,b)$。半开区间 $\{x \mid a<x \leqslant b\}$,记为$(a,b]$。上述区间是 R 的有界子集,故称为有限区间,此外,下面 R 的无界子集开区间$\{x \mid a<x\}$(记为$(a,+\infty)$)、$\{x \mid x<a\}$(记为$(-\infty,a)$)、闭区间$\{x \mid a \leqslant x\}$(记为$[a,+\infty)$)、闭区间$\{x \mid x \leqslant a\}$(记为$(-\infty,a]$)称为无限区间。区间$\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$,记为$(-\infty,+\infty)$。其实$(-\infty,+\infty)=R$,它既是开区间又是闭区间(其中 $-\infty$ 和 $+\infty$,分别读作“负无穷大”和“正无穷大”,它们不是数,仅仅是记号)。

1.1.2 映射

设 X、Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对 X 中每个元素 x,按法则 f,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作 f: $X \to Y$,其中 y 称为元素 x 在映射 f 下的像,并记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$。元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的一个原像。集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 D_f,即 $D_f=X$;X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域,记作 R_f 或 $f(X)$,即 $R_f=f(X)=\{f(x) \mid x \in D\}$。

构成一个映射必须具备两个要素:一个是定义域;另一个是对应规则。

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射,若 $R_f=Y$,即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像,则称 f 为 X 到 Y 上的满射;若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$,它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 为 X 到 Y 的单射;若映射 f 既是单射又是满射,则称 f 为 1-1 映射(对应)(或双射)。

1.1.3 函数

设 $D(\neq \varnothing) \subset R^n$,称映射 $f: D \to R$ 为 D 上的 n 元函数,记为

$$u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$$

或

$$u=f(X), \quad X=(x_1, x_2 \cdots, x_n) \in R^n$$

式中:$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为自变量;u 称为因变量;D 称为定义域,记作 D_f;称 $\{f(X) \mid X \in D_f\}$ 称为值域,记为 R_f。一个函数的定义域视为自变量的取值集合,值域是因变量的取值集合。

一元函数简称为函数,记为

$$y=f(x), x \in D \subset R$$

二元函数常记为

$$z=f(x,y),(x,y) \in D \subset R^2$$

或

$$z=f(X),X\in D\subset R^2$$

三元函数常记为

$$u=f(x,y,z),(x,y,z)\in D\subset R^3$$

或

$$z=f(X),X\in D\subset R^3$$

当 $n\geqslant 2$ 时,称 n 元函数为多元函数。

由于函数就是特殊的映射,因此定义域和对应规则就是构成一个函数的两要素。一般函数的对应规则常用一个数学公式来表示,如果没有专门指出它的定义域,则默认这个函数的定义域是**自然定义域**,即使表达函数的数学公式有意义的所有自变量取值的集合。

例 1.1.1 求函数 $z=\arcsin(x+1)+\ln(-x)$ 的定义域。

解 由 $\begin{cases}-1\leqslant x+1\leqslant 1\\ -x>0\end{cases}$,得 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 0\\ x<0\end{cases}$,可得定义域 $D=\{x\mid -2\leqslant x<0\}$。

例 1.1.2 求函数 $z=\arcsin(x-y^2)+\ln[\ln(10-x^2-4y^2)]$ 的定义域。

解 由 $\begin{cases}|x-y^2|\leqslant 1\\ 10-x^2-4y^2>1\end{cases}$,得 $\begin{cases}y^2-1\leqslant x\leqslant y^2+1\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{4y^2}{9}<1\end{cases}$,可得定义域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{4y^2}{9}<1,y^2-1\leqslant x\leqslant y^2+1\right\}$(图 1-1-1)。

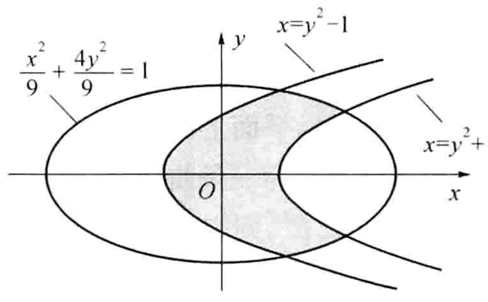

图 1-1-1

注:一般情况下,一元函数的定义域是区间,二元函数的定义域是平面上的区域,三元函数的定义域是空间中的区域。

1.1.4 函数的图形

在中学的解析几何中,我们已经知道在同一个平面上用互相垂直且有公共原点的两条数轴可构成平面直角坐标系。于是,可以建立平面点集与二元有序数组集合间的 1-1 对应。类似地,作 3 条互相垂直的数轴,交于公共的原点且具有相同的长度单位。这 3 条数轴分别叫做 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称**坐标轴**。通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上,而 z 轴则是铅垂线,它们的正方向要符合右手规则,即以右手握住 z 轴,当右手的四指从正向 x 轴以 $\pi/2$ 角度转向正向 y 轴时,大拇指的指向就是 z 轴的正向,这样的 3 条坐标轴就组成了一个**空间直角坐标系**,点 O 叫做**坐标原点**(图 1-1-2)。

3 条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的 3 个平面统称坐标面，分别称为 xOy 平面、yOz 平面和 zOz 平面。

取定了空间直角坐标系后，就可以建立起空间的点与三元有序数组之间的 1－1 对应关系：设点 M 为空间一已知点，过点 M 作 3 个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P、Q、R，这 3 点在 x 轴、y 轴、z 轴的坐标依次为 x、y、z。于是，空间的一点 M 就唯一地确定了一个三元有序数组 (x,y,z)。这组数 (x,y,z) 就叫做点 M 的坐标，并依次称 x、y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标（图 1－1－3）。坐标为 (x,y,z) 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$。反过来给定了一个三元数组，以此为空间点的坐标也可以唯一确定空间中的一个点。这样，通过空间直角坐标系，就建立了空间的点集和三元有序数组集之间的一一对应关系。

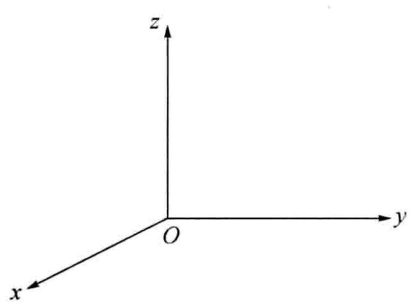

图 1－1－2

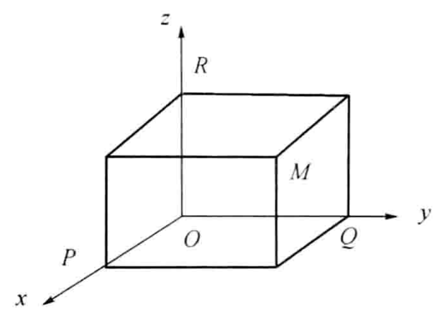

图 1－1－3

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征。例如，如果点 $M(x,y,z)$ 在 yOz 平面上，则 $x=0$；同样，如果点 $M(x,y,z)$ 在 zOx 面上，则 $y=0$；如果点 $M(x,y,z)$ 在 x 轴上，则 $y=z=0$；如果点 M 是原点，则 $x=y=z=0$。

设函数为 $y=f(x),x\in D\subset R$，则坐标平面上的点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x),x\in D$ 的图形。函数图形通常表示为一条曲线。

设二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D\subset R^2$，则空间点集 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\subset R^2\}$ 称为二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D\subset R^2$ 的图形。二元函数的图形通常表示为空间的一张曲面。

例 1.1.3 用 Matlab 做函数 $y=x\sin x$ 的图形。

解 输入：
```
ezplot('x*sin(x)',[0,40])
(或 x=0:0.1:40;y = x.*sin(x);
plot(x,y))
```

输出：（图形如图 1－1－4 所示）

注：命令 ezplot('fun',[xmin,xmax]) 中 fun 为包含单个符号变量 x 的符号表达式，命令表示在给定区间[xmin,xmax] 内绘制 f(x) 的函数图形，[xmin,xmax] 缺省时，则默认范围是[－2*pi,2*pi]（即[$-2\pi,2\pi$]）。

例 1.1.4 作出一元函数 $y=x+\sin x$ 的图形。

解 输入：
```
ezplot('x+sin(x)')
```

输出：（图形如图 1－1－5 所示）

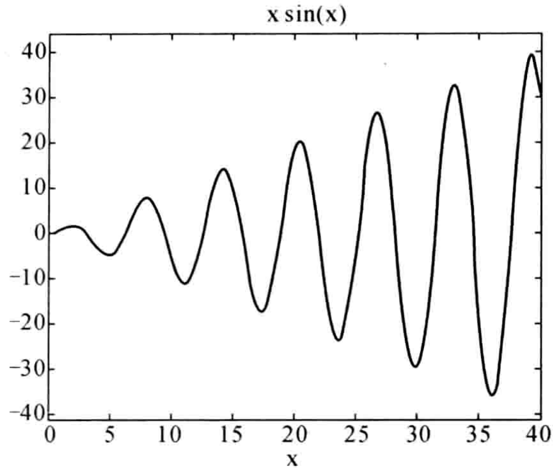

图 1－1－4

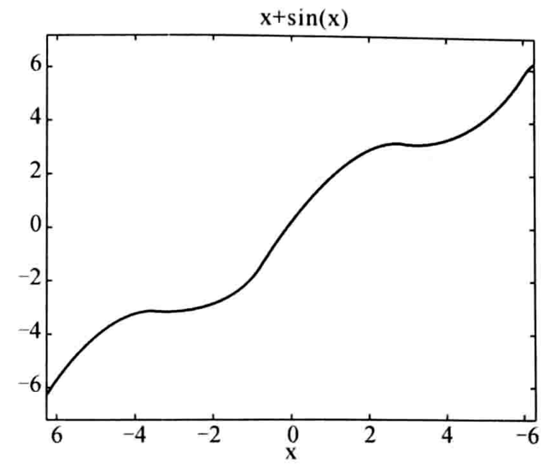

图 1－1－5

例 1.1.5　作出函数 $x^2+y^2=4$ 的图形。

解　输入:ezplot('x^2 +y^2 -4',[-3,3])

输出:(图形如图 1－1－6 所示)

例 1.1.6　作出由参数形式给出的三维螺旋线 $x=t\sin t, y=t\cos t, z=t$ 的图形。

解　输入: ezplot3('t * sin(t)','t * cos(t)','t',[0,70])

(或 t =0:0.5:70; x =t.* sin(t) ;y =t.* cos(t) ;z =t ;plot3(x,y,z))

输出:(图形如图 1－1－7 所示)

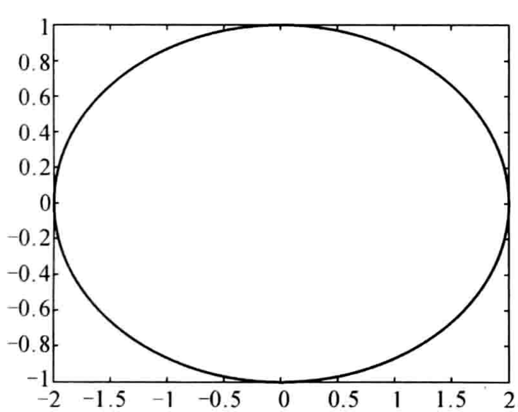

图 1－1－6

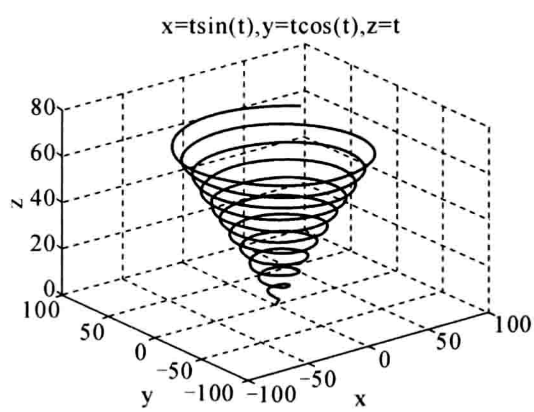

图 1－1－7

注:如空间曲线是空间两个曲面的交线,那么,空间曲线方程可由两个曲面方程(三元方程)的联立方程组来表示,但在计算机上不接受“两个曲面的交线”这种表示,所以也只能用参数来实现。

注:ezplot3('x(t)','y(t)','z(t)',[t1,t2])是画三维曲线的简易命令,使用方法和 ezplot 相似,若后面参数 t 的范围[t1,t2]缺省,则默认的范围是 [-2 * pi,2 * pi]。

例 1.1.7　作出二元函数 $z=x+y$ 的图形。

解　输入:ezsurf('x +y')

(或 x = -4:0.1:4;y = -4:0.1:4;[x,y] =meshgrid(x,y);z =x +y;surf(x,y,z))

输出:(图形如图 1－1－8 所示)

注:x、y 的一次函数是三维空间的平面。

ezsurf(‘f(x,y)’,[x1,x2,y1,y2])是画空间曲面的简易命令，若后面 x 的范围[x1,x2]、y 的范围[y1,y2]缺省，则默认的范围都是[−2 * pi,2 * pi]。

例 1.1.8 作出二元函数 $z=x^2+y^2$ 的图形。

解 输入：`ezsurf(‘x^2 +y^2’)`

输出：(图形如图 1 −1 −9 所示)

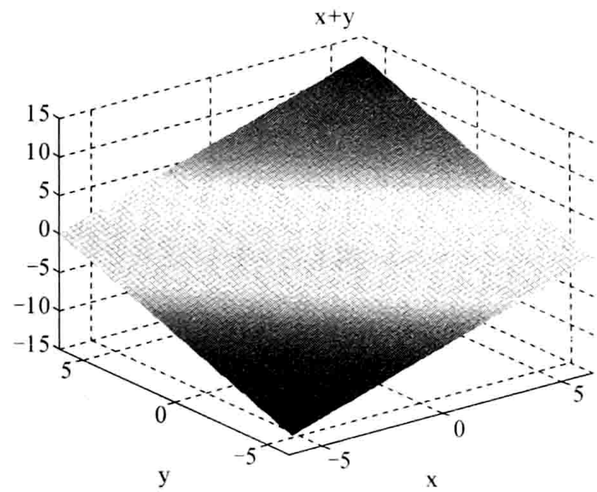

图 1 −1 −8

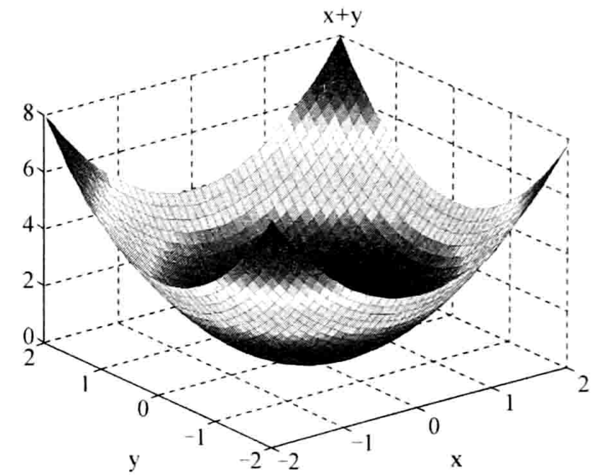

图 1 −1 −9

例 1.1.9 作出函数 $z=\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}$的图形。

解 输入：`ezsurf(‘x^2/9 -y^2/4’,[ -40,40])`

`title(‘马鞍面’)`

输出：(图形如图 1 −1 −10 所示

这个图形被称为马鞍面。

例 1.1.10 作出利用函数 $z=\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$的图形。

解 输入：`ezmesh(‘sin(sqrt(x^2 +y^2))/sqrt(x^2 +y^2)’)`

输出：(图形如图 1 −1 −11 所示)

这个图形被称为墨西哥帽。

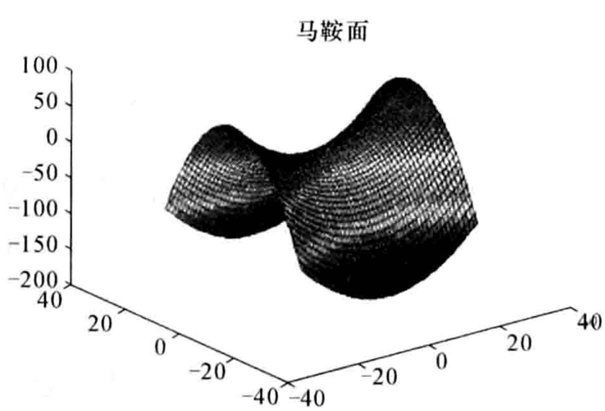

图 1 −1 −10

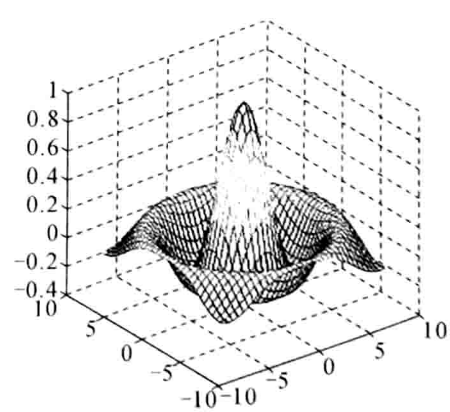

图 1 −1 −11

1.1.5 初等函数

1. 反函数

设函数$f:D\to f(D)=\{y\mid$存在$x\in D$,使$y=f(x)\}$是单射，则存在映射$f^{-1}:f(D)\to D\}$，f^{-1}如下定义:对每个$y\in f(D)$，定义$f^{-1}(y)=x$,$x\in D$，且$y=f(x)$。称此映射f^{-1}为函数f的**反函数**。不难说明,f也是f^{-1}的反函数。按习惯,$y=f(x)$,$x\in D$的反函数记为$y=f^{-1}(x)$,$x\in f(D)$。

按此定义，反函数f^{-1}的对应法则完全是由函数的f对应法则所确定的。

若f是定义在D上的单调增(减)函数,容易证明,f^{-1}也是$f(D)$上的单调增(减)函数。

相对于反函数$y=f^{-1}(x)$来说，原来的函数$y=f(x)$称为直接函数。把函数$y=f(x)$和它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图形画在同一坐标平面上，这两个图形是关于直线$y=x$是对称的。这是因为如果$P(a,b)$是$y=f(x)$图形上的点，则有$b=f(a)$。按反函数的定义，有$a=f^{-1}(b)$，故$Q(b,a)$是$y=f^{-1}(x)$图形上的点；反之，若$Q(b,a)$是$y=f^{-1}(x)$图形上的点，则$P(a,b)$是$y=f(x)$图形上的点。$P(a,b)$与$Q(b,a)$是关于直线$y=x$对称的。

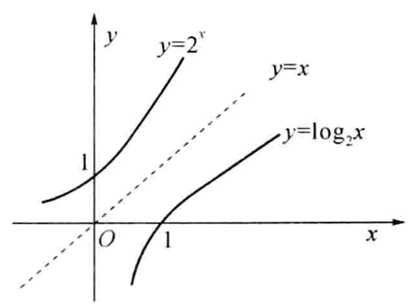

图 1－1－12

例如,函数$y=2^x$与函数$y=\log_2 x$互为反函数,则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线$y=x$对称的(图 1－1－12)。

2. 复合函数

若y是u的函数$y=f(u)$,而u又是x的函数$u=\varphi(x)$,且$\varphi(x)$的函数值的全部或部分在$f(u)$的定义域内,那么,y通过u的联系也是x的函数,称这个函数是由函数$y=f(u)$及$u=\varphi(x)$复合而成的函数,简称复合函数,记作$y=f[\varphi(x)]$,其中u叫做中间变量。显然,复合函数$y=f[\varphi(x)]$的定义域是$\{x\mid\varphi(x)\in D_f\}$。

注:复合函数还可以由更多函数复合而成,但并不是任意两个函数都能复合。

例如,函数$y=\arcsin u$与函数$u=2+x^2$是不能复合成一个函数的。因为对于$u=2+x^2$的定义域$(-\infty,+\infty)$中的任何x值所对应的u值(都大于或等于2),使$y=\arcsin u$都没有定义。

3. 基本初等函数

基本初等函数,是指中学学过的常数函数、指数函数、对数函数、幂函数、三角函数及反三角函数。

4. 一元初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及复合所构成并且能用一个公式表示出的函数称为**一元初等函数**。

例如,$y=2^{\cos x}+\ln(\sqrt[3]{4^{3x}+3}+\sin 8x)$是一元初等函数。

5. 多元初等函数

由具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算得到并且能用一个公式表出的多元函数称为**多元初等函数**。

例如，$\frac{x^2-y^2}{1+x^2}$，$\sin(x+y-z)$是多元初等函数。

一元初等函数和**多元初等函数统称为初等函数**。初等函数是高等数学研究的主要对象。

1.1.6 其他函数的例子

例 1.1.11 函数 $y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$ 称为绝对值函数。其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$。

解 用 Matlab 作图。

输入：ezplot('abs(x)',[-4,4])

输出：(图形如图 1-1-13 所示)

例 1.1.12 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 称为符号函数。其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\{-1,0,1\}$。

解 用 Matlab 作图。

输入：ezplot('sign(x)',[-2,2])

输出：(图形为如图 1-1-14 所示)

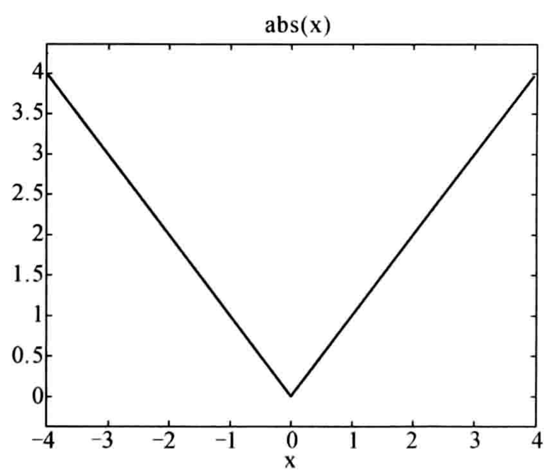

图 1-1-13

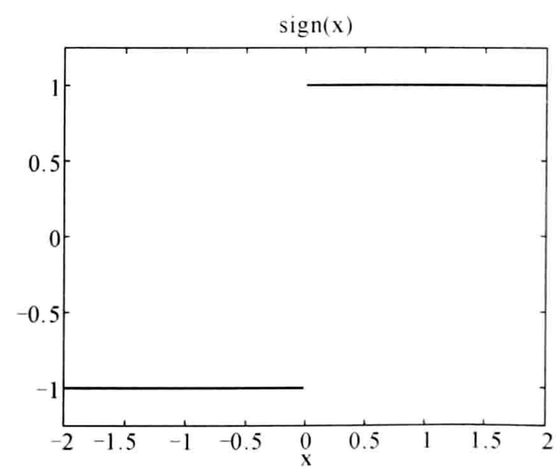

图 1-1-14

例 1.1.13 设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $y=[x]$。函数 $y=[x]$称为取整函数。其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=Z$，如

$$\left[\frac{5}{7}\right]=0,\ [\sqrt{2}]=1,\ [\pi]=3,\ [-1]=-1,\ [-3.5]=-4。$$

解 用 Matlab 作图。

输入：ezplot('floor(x)',[-4,4])

输出：(图形如图 1-1-15 所示)

在自变量的不同变化范围中，对应规则用不同公式来表示的函数称为**分段函数**。例 1.1.12和例 1.1.13 中的函数都是分段函数。

例 1.1.14 【利润】某一玩具公司生产 x 件玩具将花费 $400+5\sqrt{x(x-1)}$ 元,如果每件玩具卖 48 元,那么,公司生产 x 件玩具获得的净利润是多少?

解 经过简单的分析,可以得到该公司生产 x 件玩具获得的净利润 y 为

$$y = 48x - 400 - 5\sqrt{x(x-1)}$$

例 1.1.15 【生产费用】某工厂生产计算机的日生产能力为 0 ~ 100 台,工厂维持生产的日固定费用为 4 万元,生产一台计算机的直接费用(含材料费和劳务费)是 4250 元。试建立该厂日生产 x 台计算机的总费用函数,并指出其定义域。

解 设该厂日生产 x 台计算机的总费用为 y(单位:元),则 y 为日固定费用和生产 x 台计算机所需总费用之和,即

$$y = 40000 + 4250x$$

由于该厂每天最多能生产 100 台计算机,所以定义域为$\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 100\}$。

例 1.1.16 【租车费用】一汽车租赁公司出租某种汽车的收费标准为:每天的基本租金 200 元,另外每千米收费为 15 元/km。

(1) 试建立每天的租车费与行车路程之间的函数关系。

(2) 若某人某天付了 400 元租车费,问他开了多少千米?

解 (1)设每天租车费为 x, 则 y 为每天的基本租金 200 元和当天开车 $x$km 所收费用 $15x$ 之和,即

$$y = 200 + 15x$$

(2) 把 400 代入(1)中的函数得

$$400 = 200 + 15x$$

由此得出

$$x \approx 13.3\text{km}$$

例 1.1.17 水利工程中最常采用的渠道为梯形断面,其两侧渠坡的倾斜程度用边坡系数 $m=\cot\alpha$ 表示,α 是渠坡线与水平线的夹角,如图 1-1-16 所示。边坡系数 m 的大小可根据土壤种类和护坡情况确定。对于底宽 BC 为 b、水深为 h、边坡系数为 m 的梯形渠道,在边坡系数 $m=\cot\alpha_0$ 和过水断面 $ABCD$ 的面积为 S_0 的情况下,求湿周与水深 h 之间的函数关系式,并指明其定义域。

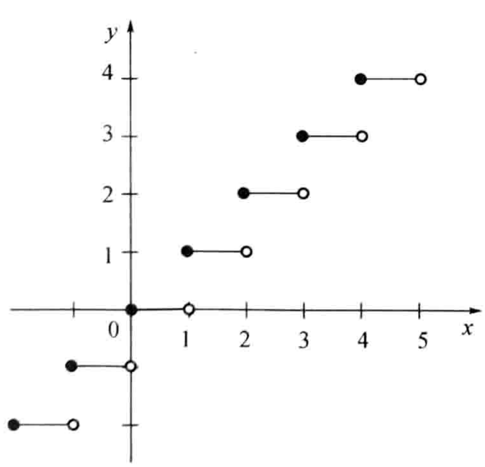

图 1-1-15

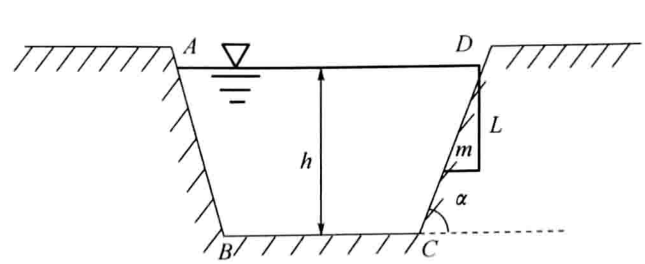

图 1-1-16