普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

经管类

下册

林　谦　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（经管类）下册

主　编　林　谦

副主编　梁　林　何振华

　　　　黄　永　杨朝丽

参　编　张　玮　向　华

　　　　李　微　梁双凤

　　　　姚晓霞

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是为适应高等院校数学类课程改革的需要，在编者多年教学实践经验和吸收“十五”、“十一五”规划教材成果的基础上编写而成的. 全书分为上、下两册，本书为下册，内容包括定积分、微分方程初步、多元函数微分学、二重积分、级数.

本书可作为高等院校(含师范类)经管类各专业通用的教材，也可作为高等院校教师的教学参考书，还可供经济管理人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：经管类. 下册/林谦主编. —北京：科学出版社，2013

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-036301-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①林… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 314465 号

责任编辑：胡云志 任俊红 唐保军 / 责任校对：张凤琴

责任印制：阎 磊 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 B5

2013 年 1 月第一次印刷 印张：13 1/4

字数：280 000

定价：26.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　　录

第 6 章　定　积　分

本章将讨论积分学中的另一个基本问题——定积分，即某种和式的极限问题．对于定积分概念，它是由实际问题的需要而引进数学领域的，并且在各个领域中都有广泛的应用，特别是在物理学、几何学和经济学中的应用更加明显和重要，因为这些领域中许多量的计算最终都可归结为计算某个函数的定积分．

虽然定积分与不定积分是两种完全不相同的概念，属于积分学中的两个基本问题，但它们之间却可通过原函数而存在内在联系，并且这种联系体现在牛顿-莱布尼茨公式上．正是这种内在的联系，才使得定积分的计算得以简化，进而使积分学成为解决实际问题的有力工具．

6.1　引例及定积分概念

6.1.1　问题的引入

为了方便理解定积分的概念，先讨论下面的具体问题——求曲边梯形的面积．

引例　曲边梯形的面积．设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数，则由直线 $x=a$，$x=b$，$y=0$ 与曲线 $y=f(x)$ 所围成的平面图形 D 称为**曲边梯形**（图 6.1），试求曲边梯形 D 的面积 A.

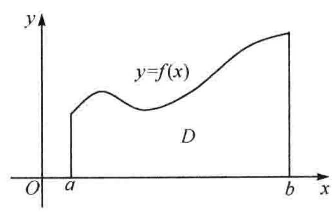

图 6.1

分析　从几何直观上来看，曲边梯形 D 的面积 A 是存在的．**现在的问题是**如何计算曲边梯形 D 的面积的精确值？众所周知，矩形是特殊的梯形，其面积非常容易计算．但在一般情况下，无法用计算矩形面积的方法直接得到曲边梯形的面积，即**不能用初等数学的方法去解决面积 A 的计算问题，而需要采用极限的方法来解决**，下面进行讨论．

解　(1) **分割（化整为零）**．用任意一组分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 将闭区间 $[a,b]$ 分割成 n 个小闭区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n],$$

同时过每个分点 x_i 作垂直于 x 轴的直线 $x=x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$，则这些直线把曲边梯形 D 分割成 n 个小曲边梯形（图 6.2）

$$D_1,D_2,\cdots,D_i,\cdots,D_n,$$

并记 Δx_i 为 x_i-x_{i-1} 为小闭区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度，ΔA_i 为 D_i 的面积（$i=1,2,\cdots,$

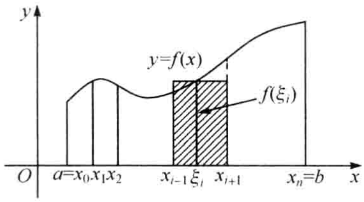

图 6.2

n),则曲边梯形 D 的面积 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta A_i$.

(2) **求和取近似(积零为整)**. 因为函数 $f(x)$ 连续,故当分割 T 越来越细密(即各小闭区间$[x_{i-1},x_i]$的长度 Δx_i 越来越小)时,函数 $f(x)$ 在各小闭区间$[x_{i-1},x_i]$上的变化就越来越小,因而各小曲边梯形 D_i 便可近似地看成小矩形. 此时,在各小闭区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 ξ_i,则 D_i 就可近似地看成以小闭区间$[x_{i-1},x_i]$为底,函数值 $f(\xi_i)$为高的小矩形,因而 $\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$,从而

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

(3) **取极限(精确化)**. 因为当闭区间$[a,b]$的分割越来越细密,即各小闭区间$[x_{i-1},x_i]$的长度 Δx_i 越来越小时,和式$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 就越来越接近于面积A. 于是对上式右边的和式,令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$,取极限便有

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$ **解毕**

除了求曲边梯形的面积外,在许多实际问题(如求变速直线运动的路程、旋转体的体积、某时间段内的总产量等)中,都会遇到归结为求类似于上述形式和式的极限问题. 因此,将这些不同问题的共同点加以抽象、归纳和引申,便可引出下述定积分的概念:

6.1.2 定积分的概念

定义 6.1 设 $f(x)$ 是定义在闭区间$[a,b]$上的函数.

(1) **分割(化整为零)**. 用任意一组分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 将闭区间$[a,b]$分割成 n 个小闭区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n],$$

并记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ 为小闭区间$[x_{i-1},x_i]$的长度$(i=1,2,\cdots,n)$.

(2) **求和(积零为整)**. $\forall\,\xi_i\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$,作和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i \quad (称为**积分和**).$$

(3) **取极限(精确化)**. 令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$,取极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{6.1}$$

若极限(6.1)存在(有限),并且该极限值与闭区间$[a,b]$的分法及各介点$\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$的取法均无关,则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上**可积**(或称$f(x)$为闭区间$[a,b]$上的**可积函数**),并称极限值(6.1)为函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上的**定积分**,记为$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中$\int$称为**积分号**,$f(x)$称为**被积函数**,$f(x)\mathrm{d}x$称为**被积表达式**,$[a,b]$称为**积分区间**,x称为**积分变量**,a称为**积分下限**,b称为**积分上限**,并记

$$R[a,b] = \{f(x) \mid f(x)\text{ 在}[a,b]\text{上可积}\},$$

即$f\in R[a,b]$表示$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的可积函数.

关于定积分的概念,需要注意下面几个问题:

(1) 由定积分的定义知,定积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$是一个确定的数值,而不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$却表示由$f(x)$的全体原函数构成的集合,因而定积分与不定积分是完全不相同的两个概念.

(2) 由定积分的定义知,数值$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$与闭区间$[a,b]$的分法和各介点$\xi_i$的取法均无关,即该数值仅与积分区间$[a,b]$和被积函数$f(x)$有关,而**与积分变量用什么字母表示无关**,也即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \cdots.$$

(3) 在定积分的定义中,实际上假定了$a<b$,但为了便于计算和应用,特作如下两点合理**规定**:

(i) 当$a=b$时,规定$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;

(ii) 当$a>b$时,规定$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$,即**互换上、下限位置后所得到的定积分的值**$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$**与原定积分的值**$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$**互为相反数**(即**反号**).

如此规定之后,定积分的下限a就不必非要小于上限b.

(4) 若$f\in R[a,b]$,则$f(x)$必在$[a,b]$上有界;反之,不成立.

6.1.3　可积函数类

函数$f(x)$在区间$[a,b]$上应满足什么条件,才能保证其在$[a,b]$上可积?由于后面的重点是如何计算定积分,因此,下面先不加证明地给出函数可积的一些充分

条件,即给出一些可积函数类.

定理 6.1　若 $f \in C[a,b]$,则 $f \in R[a,b]$,即 $C[a,b] \subset R[a,b]$;反之,不成立.

定理 6.2　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且只有有限个间断点,则 $f \in R[a,b]$.

6.1.4　定积分的几何意义

由定积分的定义并结合引例易知,当函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上非负连续时,定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 在几何上可表示以闭区间 $[a,b]$ 为底,以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积.因此,**定积分的几何意义是曲边梯形的面积**.

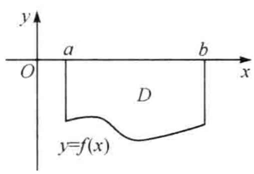

图 6.3

当函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且 $f(x) \leqslant 0$ 时,则以 $[a,b]$ 为底,以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形 D 位于 x 轴的下方(图 6.3),故此时定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示该曲边梯形面积 A 的相反数,即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A \leqslant 0,$$

所以定积分的值可正、可负,也可为零.

例 6.1　利用定积分的几何意义计算定积分 $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ 的值.

解　由定积分的几何意义知,$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ 表示介于直线 $x=-2$,$x=2$,x 轴和上半圆 $y=\sqrt{4-x^2}$ 之间的平面图形的面积,即表示以原点为圆心,以 2 为半径且落在上半平面内的上半圆的面积,故

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi \times 2^2}{2} = 2\pi.$$

解毕

习　题　6.1

1. 用定积分定义证明 $\int_a^b k\,\mathrm{d}x = k(b-a)$(其中 k 为常数).

2. 利用定积分的几何意义计算下列定积分的值:

(1) $\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{-1}^1 (2x-1)\,\mathrm{d}x$.

6.2　定积分的基本性质

性质 6.1(线性组合性)　若 $f,g \in R[a,b]$,则 $\forall \alpha,\beta \in \mathbf{R}$,$\alpha f+\beta g \in R[a,b]$,

并且

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.2}$$

证明　因为 $f, g \in R[a,b]$，故 $\forall\, T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，并记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，则当 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\} \to 0$ 时，极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 和 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$ 都存在，并且

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

从而结合 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分和

$$\sum_{i=1}^{n}[\alpha f(\xi_i) + \beta(\xi_i)]\Delta x_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

便知结论成立．　　**证毕**

注 6.1　性质 6.1 可推广到被积函数为有限个函数的线性组合的情形．

下面所给性质的证明可仿性质 6.1，用定义或结合已有性质来证，或用图形加以说明，这里不再赘述．

性质 6.2（定积分对区间的可加性）　若 $f \in R[a,b]$，则 $\forall\, a < c < b$，都有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.3}$$

如图 6.4 所示为性质 6.2 的几何意义．

注 6.2　(1) 性质 6.2 可推广到有限项和的情形，并且结合规定 $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 可知，在一点处改变函数值不影响积分值．

(2) 式(6.3) 对任意顺序的 a, b, c 都成立，只要函数在相应区间上可积就行．

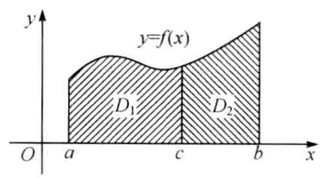

图 6.4

性质 6.3　$\int_a^b k\,\mathrm{d}x = k(b-a)$（其中 k 为常数）（见习题 6.1）．**特别地有** $\int_a^b 1\cdot\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a$.

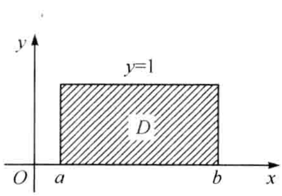

图 6.5

如图 6.5 所示为性质 6.3 的几何意义．

性质 6.4（单调性）　若 $f, g \in R[a,b]$ 且 $f(x) \leqslant g(x)$ 于 $[a,b]$ 上，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

推论 6.1（严格单调性）　若 $f, g \in C[a,b]$，$f(x) \leqslant$

$g(x)$ 于$[a,b]$上,并且 $\exists x_0 \in [a,b]$,使得 $f(x_0) < g(x_0)$,则

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx.$$

推论 6.2(非负性) 若 $0 \leqslant f \in R[a,b]$,则$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

推论 6.3(绝对可积性) 若 $f \in R[a,b]$,则$|f| \in R[a,b]$,反之不一定,并且当 $f \in R[a,b]$ 时,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{6.4}$$

性质 6.5(估值性) 若 $f \in R[a,b]$ 且 $m = \min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$,$M = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$,则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a), \tag{6.5}$$

并称式(6.5)为**估值不等式**.

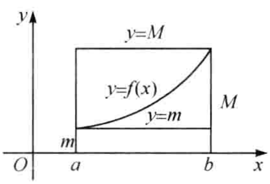

图 6.6

如图 6.6 所示为性质 6.5 的几何意义.

性质 6.6(定积分中值定理) 若 $f \in C[a,b]$,则 $\exists \xi \in [a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a), \tag{6.6}$$

并称式(6.6)为**定积分中值公式**.

性质 6.6 的几何意义如下: 只要函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上非负连续,在$[a,b]$上就至少存在某一点 ξ,使得以闭区间$[a,b]$为底,以函数值 $f(\xi)$ 为高的矩形面积等于由直线 $x=a$,$x=b$,x 轴和曲线 $y=f(x)$ 所围的曲边梯形的面积(图 6.7).

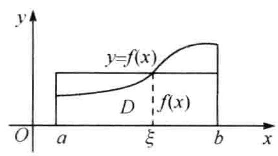

图 6.7

定义 6.2 若函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上可积,则称数值$\dfrac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$ 为函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上的**平均值**,记为 $\bar{f}$,即 $\bar{f} = \dfrac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$.

例如,由例 6.1,$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\pi$,故函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 在$[-2,2]$上的平均值为

$$\bar{f} = \frac{1}{2-(-2)}\cdot\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}.$$

例 6.2(比较积分值) 不计算积分,利用性质比较定积分$\int_3^4 \ln x\,dx$ 与$\int_3^4 \ln^2 x\,dx$ 的大小.

解 因为 $\ln x < \ln^2 x$ 于$[3,4]$上,故由推论 6.1,

$$\int_3^4 \ln x \mathrm{d}x < \int_3^4 \ln^2 x \mathrm{d}x.$$ **解毕**

例 6.3(估计积分值) 利用定积分的性质证明

$$1 < \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x < \mathrm{e}.$$

证明 设 $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$,则 $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2} \geqslant 0$ 于$[0,1]$上,故 $f(x)$ 在$[0,1]$上递增,从而有

$$f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) \text{于}[0,1]\text{上,即 } 1 \leqslant \mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e} \text{ 于}[0,1]\text{上},$$

所以,由推论 6.1 和推论 6.3 便有

$$1 = \int_0^1 1 \cdot \mathrm{d}x < \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x < \int_0^1 \mathrm{e}\mathrm{d}x = \mathrm{e}.$$ **证毕**

习 题 6.2

1. 不求出定积分的值,试比较下列各对定积分值的大小:

(1) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 与$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x$ 与$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{-2} x\mathrm{d}x$ 与$\int_0^{-2} \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

2. 证明不等式 $2 \leqslant \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x \leqslant 2\sqrt{2}$.

3. 证明性质 6.6(定积分中值定理).

6.3 微积分基本定理及定积分的计算

已经知道,定积分与不定积分是完全不相同的两个概念,但它们之间又有着密切的关系,下面将用这种关系导出利用不定积分来计算定积分的重要计算公式——**牛顿-莱布尼茨公式**.

6.3.1 变限积分函数及其导数

定义 6.3 若 $f(t) \in C[a,b]$,则 $\forall x \in [a,b], f(t) \in C[a,x], f(t) \in C[x,b]$,故可在区间$[a,b]$上分别确定函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \Psi(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

并分别称 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 为**变上限积分函数**和**变下限积分函数**,统称为**变限积分函数**,它们分别表示一个变动着的曲边梯形的面积(图 6.8).

同理,可给出**一般变限积分函数**的定义如下:

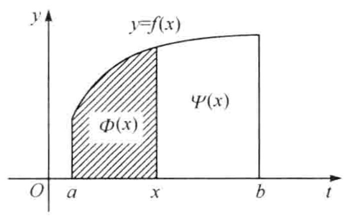

图 6.8

$$F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b],$$

其中 $f(t),\psi'(x),\varphi'(x)\in C[a,b]$,并且 $a\leqslant\psi(x)$, $\varphi(x)\leqslant b$ 于 $[a,b]$ 上.

定理 6.3(变上限积分函数的导数)　若 $f(t)\in C[a,b]$,则变上限积分函数 $\Phi(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可导函数,并且

$$\Phi'(x)=\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(x),\quad x\in[a,b]. \tag{6.7}$$

证明　(1) 因为 $f(t)\in C[a,b]$,故 $\forall x,\ \ x+\Delta x\in(a,b)$,结合定积分中值定理有

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t=f(\xi)\Delta x,\quad \xi\text{ 介于 }x\text{ 与 }x+\Delta x\text{ 之间},$$

从而结合 $f(t)$ 在点 $x\in(a,b)$ 处的连续性以及当 $\Delta x\to0$ 时 $\xi\to x$,有

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}f(\xi)=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x),$$

即当 $x\in(a,b)$ 时,结论成立.

(2) 当 $x=a$ 或 $x=b$ 且 $x+\Delta x\in(a,b)$ 时,只要令 $\Delta x>0$ 或 $\Delta x<0$,则类似(1) 可得

$$\Phi_+'(a)=f(a)\quad\text{或}\quad\Phi'_-(b)=f(b).$$

综述(1),(2) 便知定理的结论成立.　　**证毕**

对变下限积分函数 $\Psi(x)$,同理有

$$\Psi'(x)=\left[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right]'=-f(x),\quad x\in[a,b]. \tag{6.8}$$

更一般地,对变限积分函数 $F(x)$,有以下定理:

定理 6.4(变限积分函数的导数)　若 $f(t),\psi'(x),\varphi'(x)\in C[a,b]$,并且 $a\leqslant\psi(x),\varphi(x)\leqslant b$ 于 $[a,b]$ 上,则变限积分函数 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可导函数,并且

$$F'(x)=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)-f(\psi(x))\cdot\psi'(x),\quad x\in[a,b]. \tag{6.9}$$

显然,式(6.7),(6.8) 是式(6.9) 的特例,并且由定理 6.4 可得如下定理:

定理 6.5(原函数存在定理)　若 $f\in C[a,b]$,则变上限积分函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b]$$

是函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的一个原函数.

例 6.4　计算下列变限积分函数的导数:

(1) $\Phi(x)=\int_0^x\cos^2 t\mathrm{d}t$;　　(2) $\Psi(x)=\int_x^{-1}\cos e^t\mathrm{d}t$;

(3) $H(x)=\int_{2}^{x^2}\sin t\mathrm{d}t$;　　(4) $F(x)=\int_{x}^{x^2}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$.

解 根据式(6.7)～(6.9)分别有

(1) $\Phi'(x)=\left(\int_0^x\cos^2 t\mathrm{d}t\right)'=\cos^2 x$.

(2) $\Psi'(x)=\left(\int_x^{-1}\cos \mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right)'=-\cos \mathrm{e}^x$.

(3) $H'(x)=\left(\int_0^{x^2}\sin t\mathrm{d}t\right)'=(\sin x^2)\cdot(x^2)'-\sin 0\cdot 0'=2x\cdot\sin x^2$.

(4) $$\begin{aligned}F'(x)&=\left[\int_x^{x^2}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t\right]'=\ln[1+(x^2)^2]\cdot(x^2)'-\ln(1+x^2)\cdot x'\\&=2x\ln(1+x^4)-\ln(1+x^2).\end{aligned}$$ **解毕**

例 6.5 计算下列未定式的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\sin t\mathrm{d}t}{x^2}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}t\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t}{x^6\mathrm{e}^x}$.

解 应用洛必达法则和式(6.7),(6.9),并结合 $\sin x^2\sim x^2(x\to0)$有

(1) 原式$\xlongequal{\frac{0}{0}型}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\int_0^x\sin t\mathrm{d}t\right)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $$\begin{aligned}原式&\xlongequal{\frac{0}{0}型}\lim_{x\to0}\frac{\left(\int_0^{x^2}t\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t\right)'}{(x^6\mathrm{e}^x)'}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\mathrm{e}^{x^2}\sin x^2\cdot(x^2)'}{x^5(6+x)\mathrm{e}^x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}\cdot x^2\cdot 2x}{x^3(6+x)\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to0}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{(6+x)\mathrm{e}^x}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$ **解毕**

6.3.2 牛顿-莱布尼茨公式

定理 6.6(微积分学基本定理) 若 $F'(x)=f(x)\in C[a,b]$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)\xlongequal{记为}F(x)\Big|_a^b, \tag{6.10}$$

并称式(6.10)为**牛顿-莱布尼茨公式**或**微积分学基本公式**.

证明 因为 $F(x)$ 与 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 均为 $f(x)$ 的原函数,故存在常数 C,使得

$$\Phi(x)=F(x)+C$$

即

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=F(x)+C,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

于是在上式中,取 $x=a$ 可解得 $C=-F(a)$,从而有

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=F(x)-F(a),\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

特别地有 $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)\triangleq F(x)\Big|_a^b.$$ **证毕**

牛顿-莱布尼茨公式揭示了微分与积分间的本质关系,给出了计算定积分的有效简便方法,由此体现了该公式的重要作用.由牛顿-莱布尼茨公式可以看到,该公式把计算定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

的问题,转化为计算 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$ 和函数值差 $F(b)-F(a)$ 的问题.因此,通过牛顿-莱布尼茨公式,可将用定义难以进行计算的定积分问题变得简单易行,从而使积分学在各个领域中得到广泛的应用.

例 6.6 计算下列定积分:

(1) $\int_0^2 (3x^2+2x+1)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\cos x}\mathrm{d}x$.

解 (1) 因为

$$(x^3+x^2+x)'=3x^2+2x+1\in C[0,2],$$

故由牛顿-莱布尼茨公式有

$$\text{原式}=(x^3+x^2+x)\Big|_0^2=(2^3+2^2+2)-(0^3+0^2+0)=14.$$

(2) $\text{原式}=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$;

(3)
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\arctan x\Big|_{-1}^{\sqrt{3}}=\arctan\sqrt{3}-\arctan(-1)\\&=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7\pi}{12}.\end{aligned}$$

(4) $\text{原式}=\ln|x|\Big|_{-2}^{-1}=\ln|-1|-\ln|-2|=-\ln 2.$

(5)
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left|\sin\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x\\&=\sqrt{2}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=2\sqrt{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{aligned}$$ **解毕**

例 6.7　求 k 的值，使得 $\int_k^3 f(x)\,dx = \frac{40}{3}$，其中 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & |x| \leqslant 2, \\ 1+x^2, & 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$

解　由假设及定积分对区间的可加性有

$$\frac{40}{3} = \int_k^3 f(x)\,dx = \int_k^2 (2x+1)\,dx + \int_2^3 (1+x^2)\,dx$$

$$= (x^2+x)\Big|_k^2 + \left(x+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_2^3 = \frac{40}{3} - (k^2+k),$$

故有 $k^2+k = k(k+1) = 0$，从而有 $k=0$ 或 -1.　**解毕**

习　题　6.3

1. 求下列变限积分函数的导数：

(1) $\Phi(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \cos t\,dt$；　(2) $\Psi(x) = \int_x^1 \sin t\,dt$；

(3) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$.

2. 计算下列未定式的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,dt}$；

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

6.4　定积分的换元积分法与分部积分法

直接利用牛顿 - 莱布尼茨公式计算定积分时，必须先求出被积函数的原函数，然后将定积分的上、下限代入原函数并相减，由此得到定积分的值．但是，在许多情况下，这样进行运算显得比较复杂，并且当原函数不是初等函数或原函数不易求出来时，就无法直接应用牛顿 - 莱布尼茨公式来进行计算．因此，为了进一步解决计算定积分的问题，也可在定积分中引进类似于不定积分中的换元积分法和分部积分法，下面分别讨论这两种方法．

6.4.1　定积分的换元积分法

定理 6.7　若 $f \in C[a,b]$ 且 $x = \varphi(t)$ 满足以下条件：

(1) $\varphi' \in C[\alpha,\beta]$ 或 $C[\beta,\alpha]$ 以及 $\varphi'(t) \neq 0$；

(2) 当 $t \in [\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 时，$a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$ 且 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$，则有如下**定积分换元积分公式**：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{6.11}$$

证明　由假设知，式(6.11)两边的被积函数均为连续函数，故两个定积分均可应用牛顿-莱布尼茨公式进行计算. 不妨设 $F'(x)=f(x)$ 于 $[a,b]$ 上，则由复合函数求导法有

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \text{ 于}[\alpha,\beta]\text{或}[\beta,\alpha]\text{上},$$

故由牛顿-莱布尼茨公式并结合条件 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$，分别有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a),$$

由此便知式(6.11)成立.　　**证毕**

注 6.3　(1) 在进行定积分的换元积分法时，首先要变换定积分的上、下限，并且换元后所得新下限 α 不一定比新上限 β 小.

(2) 变换被积表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 时，只需将其中 x 的位置替换为 $\varphi(t)$ 便可，即

$$f(x)\mathrm{d}x = f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(3) 换元后的积分直接计算出结果 $F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))$ 即可，不必再将 $F(\varphi(t))$ 中的新变量 t 换回原变量 x 的形式 $F(\varphi(\varphi^{-1}(x)))=F(x)$，这正是定积分换元法的简便之处.

例 6.8　计算下列定积分：

(1) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　(2) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$；　(3) $\displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

解　(1) 令 $\sqrt{x}=t$，即 $x=t^2$，则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，并且当 $x=0$ 时 $t=0$，当 $x=4$ 时 $t=2$，从而由定积分换元积分公式(6.11)，有

$$\text{原式} = \int_0^2 \frac{1}{1+t}\cdot 2t\mathrm{d}t = 2\int_0^2\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = 2(t-\ln|1+t|)\Big|_0^2 = 4-2\ln 3.$$

(2) $$\text{原式} \xlongequal[\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t]{\sqrt{x-1}=t,\text{即 }x=1+t^2} \int_1^2 \frac{1+t^2}{t}\cdot 2t\mathrm{d}t = \int_1^2 (2+2t^2)\mathrm{d}t$$
$$= \left(2t+\frac{2}{3}t^3\right)\Big|_1^2 = \frac{20}{3}. .$$

(3) $$\text{原式} \xlongequal[\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t]{x=2\sin t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(1-\sin^2 t)}\cdot 2\cos t\mathrm{d}t = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\mathrm{d}t.$$
$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\mathrm{d}t = 2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.$$
解毕