XIANXING DAISHU
YU KONGJIAN JIEXI JIHE LILUN

线性代数
与空间解析几何理论

主编 姜本源 杨国栋 王向辉

吉林大学出版社

XIANXING DAISHU YU KONGJIAN JIEXI JIHE LILUN

线性代数与空间解析几何理论

主　编　姜本源　杨国栋　王向辉
副主编　周优军　李晓冬　于加武

吉林大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何理论 / 姜本源，杨国栋，王向辉主编. -- 长春 ：吉林大学出版社，2012.11

ISBN 978-7-5601-9319-9

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①姜… ②杨… ③王… Ⅲ. ①线性代数②立体几何—解析几何 Ⅳ. ①O151.2②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 265714 号

书　名：线性代数与空间解析几何理论

作　者：姜本源　杨国栋　王向辉　主编

责任编辑：孟亚黎　　封面设计：王菊红

吉林大学出版社出版、发行　　北京市登峰印刷厂　印刷

开本：787×1092 毫米　1/16　　2012 年 11 月第 1 版

印张：22.375　字数：572 千字　　2012 年 11 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5601-9319-9　　定价：36.00 元

版权所有　翻印必究

社址：长春市明德路 501 号　邮编：130021

发行部电话：0431－89580026/28/29

网址：http://www.jlup.com.cn

E—mail:jlup@mail.jlu.edu.cn

前　言

随着现代数学的发展，线性代数与空间解析几何这两门数学课程相互渗透、紧密结合已经成为一种趋势．我们编写的这门《线性代数与空间解析几何理论》在介绍数学知识的同时，还注意培养读者的数学素养，培养读者应用数学知识解决实际问题的能力，为读者在生活和工作中学习现代数学方法、更新数学知识奠定了良好的基础．

本书的编写具有以下特色：

(1)以基本概念为背景，提高读者利用数学方法解决实际问题的能力．

对基本概念、理论、思想方法的阐述准确、简洁、透彻、深入．取材上，精选内容，突出重点，强调应用．对一些抽象数学概念进行还原，尽量从实际背景出发，通过提出问题、解决问题的方式展开内容，力求突出解决实际问题的数学思想与方法，也使读者更有兴趣在现实生活中发现问题、解决问题，这样安排不仅解决了读者理解抽象概念的困难，而且增强了读者建立数学模型的能力．

(2)把线性代数与空间解析几何有机地融合在一起．

线性代数与空间解析几何之间既有联系又有区别．线性代数是讨论有限维空间的线性理论的课程，有很强的抽象性和逻辑性；空间解析几何问题广泛存在于自然科学、技术科学以及日常生活中．线性代数为空间解析几何提供研究方法，空间解析几何为线性代数提供直观背景．这本书把这两部分内容有机融合、融会贯通，必将提高读者的逻辑推理能力、计算能力以及空间想象能力．

(3)学习现代数学的接口．

本书使用现代数学语言、术语与符号，并注意与当代文献的习惯用法相衔接；介绍了数学软件 MATLAB 的使用，通过上机练习，灵活应用现代数学工具解决线性代数与空间解析几何中的计算问题．这些内容将拓展读者的知识面和视野，为进一步拓宽数学知识指明方向．

(4)内容丰富且多层次．

本书力求适应不同层次的要求，在内容的编排、例题与习题的配备方面注意了多样化．例题丰富，按小节配备，特别注意了“典型性”与“全面性”，兼容各种题型，难易结合．

本书共有十二章，系统地介绍了线性代数与空间解析几何的基本理论与方法，内容包括行列式、矩阵、几何向量、n 维向量、线性方程组、特征值和特征向量、二次型、欧氏空间和酉空间、曲面与空间曲线、线性空间与线性变换、射影几何初步、MATLAB 软件简介与应用．本书既可以用来了解数学知识，也能作为高等学校的教材．

全书由姜本源、杨国栋、王向辉担任主编，周优军、李晓冬、于加武担任副主编，并由姜本源、杨国栋、王向辉负责统稿．具体分工如下：

第 10 章～第 12 章：姜本源(辽宁科技大学)；

第 3 章、第 9 章：杨国栋(大同大学朔州师范分校)；

第 6 章～第 8 章：王向辉（忻州师范学院）；

第 1 章、第 2 章：周优军（柳州师范高等专科学校）；

第 4 章：李晓冬（包头师范学院）；

第 5 章：于加武（大连工业大学）.

在此由衷地感谢相关专家以及出版社为完善书稿所提供的有力帮助和对本书提出的修改意见和建议.

由于编者水平有限，书中难免有疏漏和缺陷，还请广大读者批评指正，以使本书能够不断完善.

编　者

2012 年 9 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第 1 章　行列式 …… 1
1.1　二阶与三阶行列式 …… 1
1.2　n 阶行列式的定义 …… 4
1.3　n 阶行列式的性质与计算 …… 6
1.4　行列式的展开定理 …… 11
1.5　克莱姆法则 …… 18
第 2 章　矩阵 …… 23
2.1　矩阵的概念及运算 …… 23
2.2　矩阵的分块 …… 32
2.3　逆矩阵 …… 37
2.4　矩阵的初等变换 …… 44
2.5　矩阵的秩 …… 52
第 3 章　几何向量 …… 58
3.1　向量的基本概念 …… 58
3.2　向量的线性运算 …… 59
3.3　向量的数量积、向量积和混合积 …… 65
3.4　平面 …… 77
3.5　空间直线 …… 85
第 4 章　n 维向量 …… 94
4.1　n 维向量的定义 …… 94
4.2　向量组的相关性 …… 96
4.3　向量组的秩 …… 105
4.4　向量空间 …… 112
4.5　内积与正交向量组 …… 116
第 5 章　线性方程组 …… 122
5.1　齐次线性方程组 …… 122
5.2　非齐次线性方程组 …… 128
5.3　线性方程组的几何应用 …… 137

第 6 章　特征值和特征向量 …… 146
6.1　特征值与特征向量 …… 146
6.2　相似矩阵 …… 155
6.3　实对称矩阵的相似对角化 …… 160
第 7 章　二次型 …… 167
7.1　二次型的概念与矩阵表示 …… 167
7.2　二次型的标准型 …… 171
7.3　正定二次型 …… 180
第 8 章　欧氏空间,酉空间 …… 190
8.1　欧氏空间 …… 190
8.2　欧氏空间的线性变换 …… 198
8.3　酉空间 …… 200
8.4　谱定理 …… 203
8.5　正交矩阵 …… 207
8.6　最小平方逼近 …… 209
第 9 章　曲面与空间曲线 …… 214
9.1　常见的曲线和曲面 …… 214
9.2　一般二次曲线的讨论 …… 225
9.3　二次曲面的一般方程 …… 238
9.4　几种典型的二次曲面 …… 240
9.5　二次直纹曲面 …… 250
9.6　作简图 …… 254
第 10 章　线性空间与线性变换 …… 258
10.1　线性空间的概念与性质 …… 258
10.2　线性变换 …… 265
10.3　线性变换的矩阵表示 …… 271
第 11 章　射影几何初步 …… 277
11.1　射影平面齐次坐标 …… 277
11.2　对偶原理 …… 283
11.3　射影变换,射影分类 …… 287
第 12 章　MATLAB 软件简介与应用 …… 301
12.1　MATLAB 软件简介 …… 301
12.2　MATLAB 软件在线性代数中的应用 …… 313
参考文献 …… 352

第 1 章　行列式

1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

用加减消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}, \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1.1)有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了便于记忆，我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

并称它为二阶行列式，其中横排称为行，竖排称为列．二阶行列式的计算也可根据对角线法来记忆，如图 1-1-1.

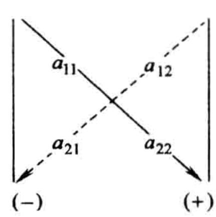

图 1-1-1

利用二阶行列式，式(1.2)中的两个分子可以分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

所以，对于方程组(1.1)，当行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，方程组的解可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

例 1-1-1 解二元线性方程组$\begin{cases} 3x_1+2x_2=5 \\ 5x_1-7x_2=29 \end{cases}$.

解:由于系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}=-31\neq 0,$$

有

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 29 & -7 \end{vmatrix}=-93,\ D_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 29 \end{vmatrix}=62,$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-93}{-31}=3,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{62}{-31}=-2.$$

例 1-1-2 计算$\begin{vmatrix} x+y & 2y \\ 2x & x+y \end{vmatrix}$.

解:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x+y & 2y \\ 2x & x+y \end{vmatrix}&=(x+y)^2-4xy \\ &=x^2+y^2-2xy \\ &=(x-y)^2.\end{aligned}$$

1.1.2 三阶行列式

设三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases},\tag{1.3}$$

用消元法解得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{31}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$

其中，分母不为零．这个表达式比二阶线性方程组复杂得多，为了能够将解简单表达，引入三阶行列式的定义．

记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式．三阶行列式的求和规律遵循图 1-1-2 所示的对角法则：实线连结的三个元素乘积之和减去虚线连结的三个元素乘积之和．其中，三条实线看做是平行于主对角线的连线．三条虚线表示平行于负对角线的连线．

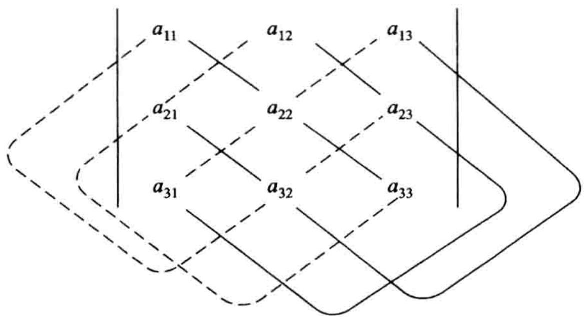

图 1-1-2

若线性方程组(1.3)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0, \tag{1.4}$$

则方程(1.3)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 1-1-3　用对角线法则计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

解：$D=2\times1\times3+(-3)\times(-2)\times5+1\times4\times1-1\times1\times5-(-3)\times4\times3-2\times(-2)\times1=75.$

例 1-1-4　计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times3\times2+2\times1\times3+3\times1\times2-3\times3\times3-2\times2\times2-1\times1\times1=-18.$

例 1-1-5 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=26 \\ 2x_1-4x_2-x_3=9 \\ x_1+2x_2+x_3=16 \end{cases}.$$

解：系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5\neq0,$$

所以方程组有唯一解，计算得

$$D_1=\begin{vmatrix} 26 & -1 & 1 \\ 9 & -4 & -1 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix}=55, D_2=\begin{vmatrix} 3 & 26 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 1 & 16 & 1 \end{vmatrix}=20, D_3=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 26 \\ 2 & -4 & 9 \\ 1 & 2 & 16 \end{vmatrix}=-15,$$

方程组的解为

$$x_1=\frac{55}{5}=11, x_2=\frac{20}{5}=4, x_3=\frac{-15}{5}=-3.$$

1.2 n 阶行列式的定义

1.2.1 排列和逆序数

定义 1.2.1 由 n 个不同数 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 n 阶排列．排列 $1,2,\cdots,(n-1),n$ 称为标准排列或自然排列．

定义 1.2.2 在一个排列中，若一个较大的数排在较小的数前面，就称这两个数构成一个逆序．一个排列逆序的总数称为该排列的逆序数．

我们用 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 表示排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数，如 $\tau(31542)=5$. $=1+1+3$

定义 1.2.3 设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是 n 阶排列，若 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 是奇数，那么称 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇排列；若 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 是偶数，则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 是偶排列．

定义 1.2.4 把一个排列中某两个数字的位置互相调换，其余数字不变，这样的一个调换称为一个对换．

定理 1.2.1 对换改变排列的奇偶性，即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列．

定理 1.2.2 在全部 $n(n\geqslant2)$ 阶排列中，奇排列和偶排列各占一半．

定理 1.2.3 任意一个 n 阶排列可经过一系列对换变成自然排列，并且所作对换次数的奇

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

偶性与这个排列的奇偶性相同．

例 1-2-1　求排列 42153 的逆序数．

解:在排列 42153 中，4 的逆序数是 0，2 的逆序数是 1，1 的逆序数是 2，5 的逆序数是 0，3 的逆序数是 2，因此排列 42153 的逆序数

$$\tau(42153)=0+1+2+0+2=5.$$

例 1-2-2　求排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数．

解:$\tau[n(n-1)\cdots 21]=0+1+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$.

因此，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，$n(n-1)\cdots 21$ 是偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，$n(n-1)\cdots 21$ 是奇排列．

1.2.2　n 阶行列式的定义

定义 1.2.5　n^2 个数排成的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.6}$$

的代数和，其中，$p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列．当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时，式(1.6)的前面带正号；当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇排列时，式(1.6)的前面带负号．所以行列式(1.5)可以表示成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\underbrace{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}_{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}. \tag{1.7}$$

$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和．

例 1-2-3　证明上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

这种主对角线(从左上角到右下角的对角线)以下(上)的元素都是 0 的行列式称为上(下)三角行列式．

证明:这是 n 阶行列式，在展开式中共有 $n!$ 项，在每项乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中，只要有一个元素为零，乘积就为 0，故只需要计算乘积中不出现零的项．由于第 n 行元素中除了 a_{nn} 外都是零，所以只可以取 $p_n=n$. 同理在第 $n-1$ 行中，只能取 $p_{n-1}=n-1$. 依次类推，可知在展开式中不为

零的项只能是 $a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$，其行标已按自然顺序排好，列标的排列为 1，2，…，n，因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1,2,\cdots,n)} a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

1.3　n 阶行列式的性质与计算

1.3.1　n 行列式的性质

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称行列式 D^{T} 为行列式 D 的转置行列式．显然，D 也是 D^{T} 的转置行列式．

性质 1.3.1　行列式与它的转置行列式相等．

证明：记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

其中，$b_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，依据定义，有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}, \end{aligned}$$

且

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

所以

$$D^{\mathrm{T}}=D.$$

性质 1.3.2　互换行列式的两行，行列式变号．即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

证明:设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

由题设知,D_1 是交换 D 的第 i 行与第 j 行所得,设 $i<j$,当 $k\neq i,j$ 时,$b_{kp}=a_{kp}$;而 $b_{ip}=a_{jp}$,$b_{jp}=a_{ip}$,则有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \\ &= -\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \\ &= -D. \end{aligned}$$

推论 1.3.1　如果行列式有两行完全相同,则行列式等于零.

性质 1.3.3　用数 k 乘以行列式的某一行所有元素等于用数 k 乘以该行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明:由行列式的定义可得

$$\begin{aligned}\text{左式}&=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{i-1p_{i-1}}(ka_{ip_i})a_{i+1p_{i+1}}\cdots a_{np_n}\\&=k\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=\text{右式}.\end{aligned}$$

推论 1.3.2 若行列式中有两行成正比例,则行列式等于零,即

$$\begin{array}{l}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\begin{array}{l}\\\\(\text{第 } i\text{ 行})\\\\(\text{第 } j\text{ 行})\\\\\\\end{array}\end{array}=0.$$

证明:由性质 1.3.2 和性质 1.3.3 可得

$$\text{左式}=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=k\cdot 0=0.$$

推论 1.3.3 若行列式某一行元素全为零,则行列式等于零.

性质 1.3.4 若行列式的某一行的元素都是两数之和,即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}+b_{i1}&a_{i2}+b_{i2}&\cdots&a_{in}+b_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和,即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{i1}&b_{i2}&\cdots&b_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

性质 1.3.5 把行列式的某一行的 k 倍加到另一行上去行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明: 右式 $= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0$

= 左式.

1.3.2 n 阶行列式的计算

例 1-3-1 计算 $D=\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$. → 尽可能凑成三角行列式

解:

$$D \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+2r_1}} -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r3+3r2} -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4-4r_3} -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$=9.$

例 1-3-2 计算

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}.$$

解:该行列式的特点是各行 4 个数之和都是 6,因此把第 2、3、4 列同时加到第 1 列,提出公因子 6,再用各列减去第 1 列.

$$D\xrightarrow[c_1+c_4]{\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3}}\begin{vmatrix}6&1&1&1\\6&3&1&1\\6&1&3&1\\6&1&1&3\end{vmatrix}\xrightarrow{c_1\div 6}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}6\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}$$

$=8.$

例 1-3-3 已知行列式 $D=\begin{vmatrix}x&y&z\\3&0&2\\1&1&1\end{vmatrix}=1$,根据行列式的性质求下列行列式:

(1)$D_2=\begin{vmatrix}x+1&y+1&z+1\\3&0&2\\4&1&3\end{vmatrix}$;

(2)$D_1=\begin{vmatrix}x&y&z\\3x+3&3y&3z+2\\x+2&y+2&z+2\end{vmatrix}$.

解:(1)第 1 行的每一个元素均为两个数之和,故有

$$D_2=\begin{vmatrix}x&y&z\\3&0&2\\4&1&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1\\3&0&2\\4&1&3\end{vmatrix}.$$

在第一个行列式中,用第 3 行减去第 2 行就是 D,而对于第二个行列式,将第 1 行加到第 2 行,则与第 3 行完全相同,行列式值为零,于是有

$$D_2=\begin{vmatrix}x&y&z\\3&0&2\\4&1&3\end{vmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{vmatrix}x&y&z\\3&0&2\\1&1&1\end{vmatrix}=D=1.$$

(2)

$$D_1\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{vmatrix}x&y&z\\3&0&2\\2&2&2\end{vmatrix},$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com