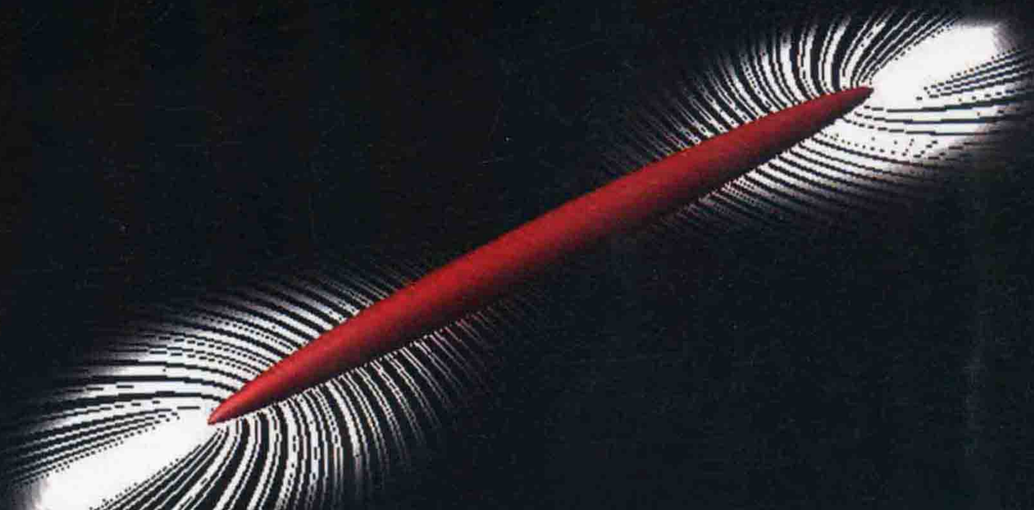
普通高等教育“十二五”规划教材

电动力学

◎ 李元杰 编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

电　动　力　学

李元杰　编著

机械工业出版社

本书为全新数字教学课程教材，其重要特色是，采用了数值计算及模拟的技术与数字教学的新理念，把现代科学、中华文化和现代信息技术三者巧妙地结合在一起，使得传统的电动力学教学内容与方法发生了极大的变化。所有这些新内容都是本教材的亮点。

本书开篇就讨论麦克斯韦方程的四维化，接着列出不同情况下的麦克斯韦方程的具体类型，全书以求解不同情况下的麦克斯韦方程为主线展开。相对论没有再单独列成一章，整个结构更为简明。

本书为高等学校物理专业及其他相关专业的基础教材，也可供相关专业教师、研究人员和工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

电动力学/李元杰编著. —北京：机械工业出版社，2014.5
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-111-46574-4

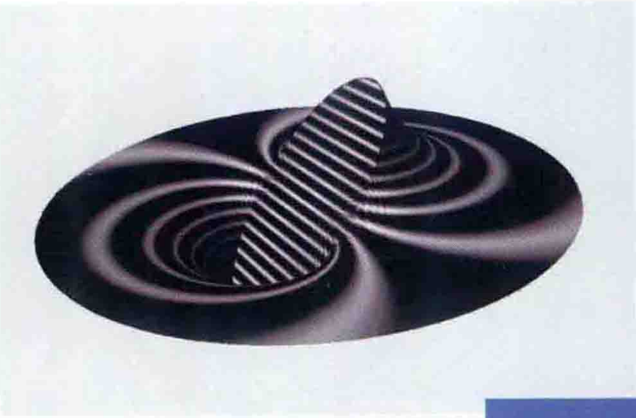
Ⅰ.①电… Ⅱ.①李… Ⅲ.①电动力学-高等学校-教材 Ⅳ.①O442

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 087691 号

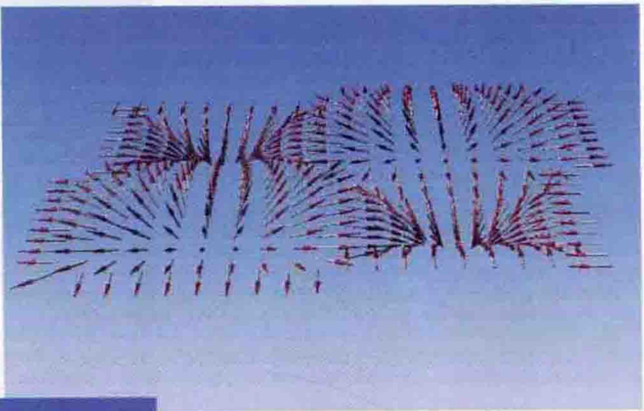
机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：李永联 责任编辑：李永联 李 乐 版式设计：赵颖喆
责任校对：张 征 封面设计：陈 沛 责任印制：李 洋
北京宝昌彩色印刷有限公司印刷
2014 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
169mm × 239mm · 11 印张 · 2 插页 · 212 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-46574-4
ISBN 978-7-89405-376-3（光盘）
定价：29.00 元（含 1CD）

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

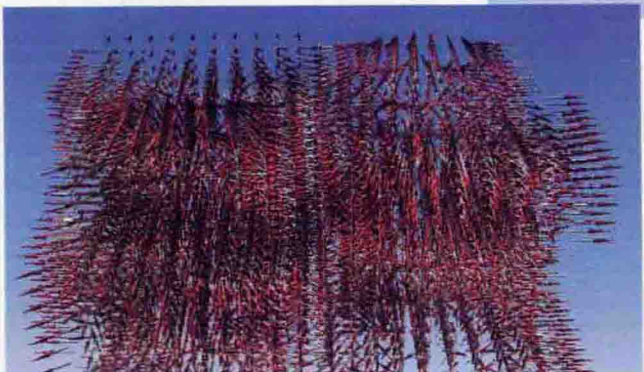
电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	封面无防伪标均为盗版



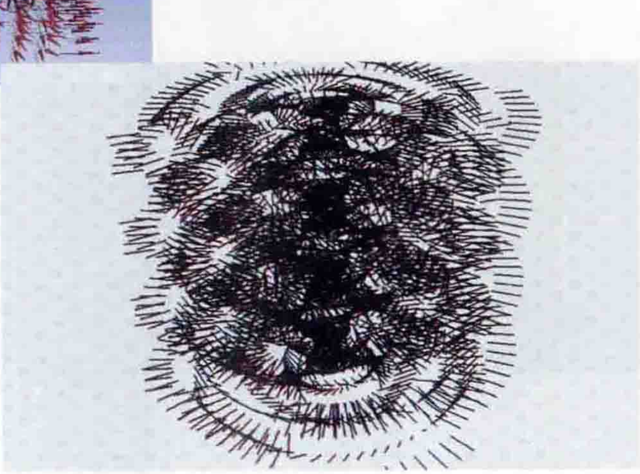
均匀磁化球磁场的等磁势线



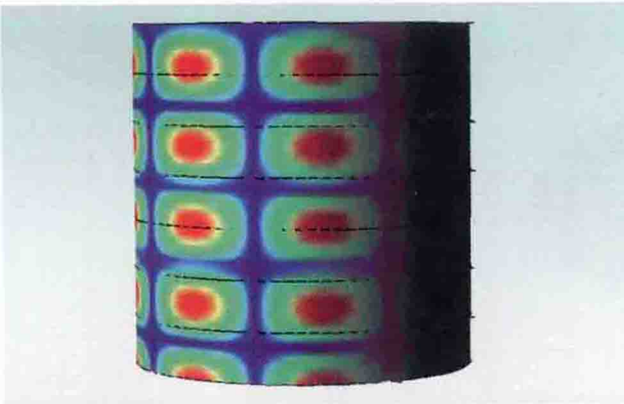
矩形空腔中 TM_{22} 波截面图



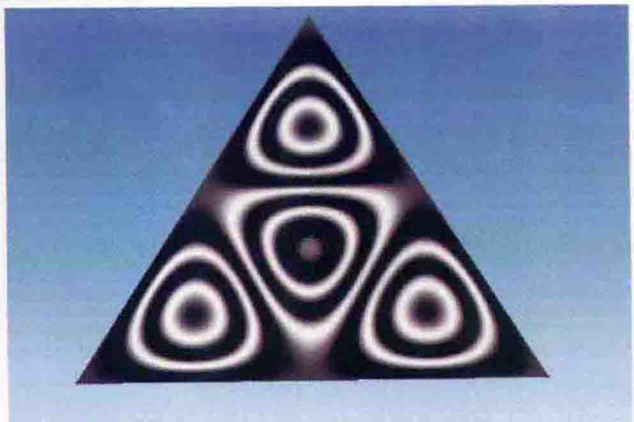
矩形波导中的 TM_{22} 波，其中 z 轴向上



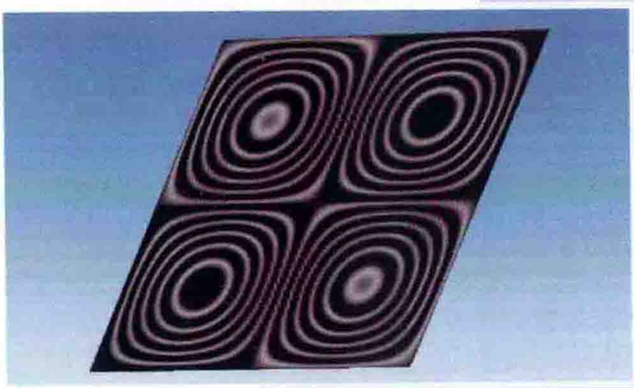
圆柱波导中电场的 TM_{43} 波



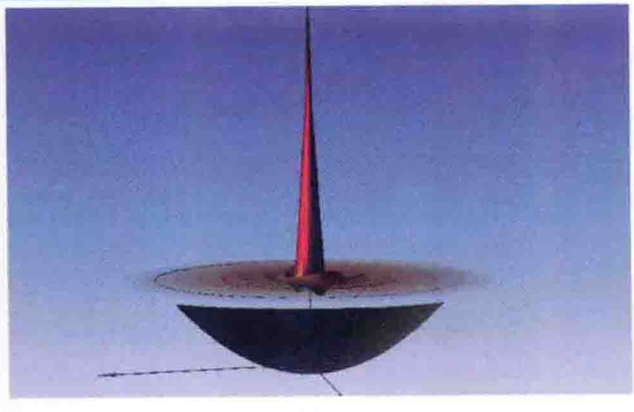
圆柱波导中电场的 TM_{44} 波（侧面图）



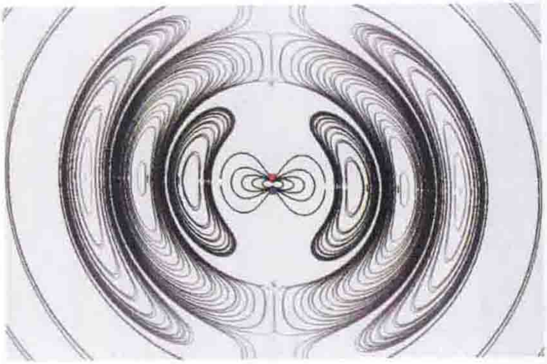
等边三角形截面波导相位图



任意平行四边形截面波导相位图



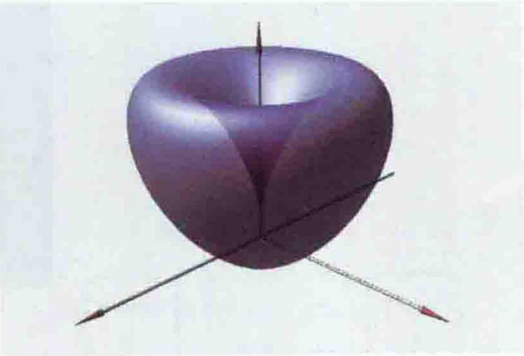
抛物面天线辐射能流分布



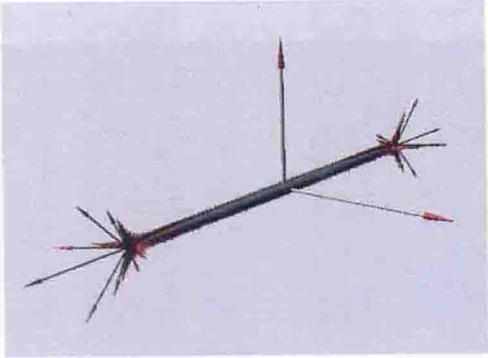
偶极辐射的电场

金属圆柱对平面波的散射

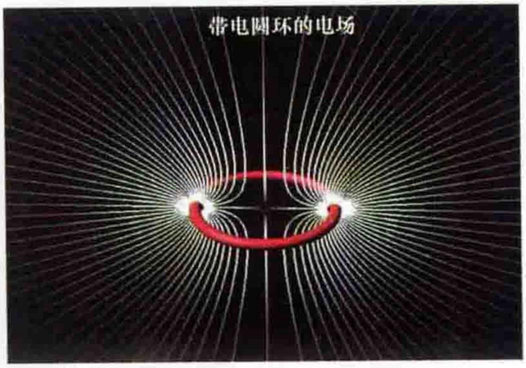
金属圆柱对柱面波的散射



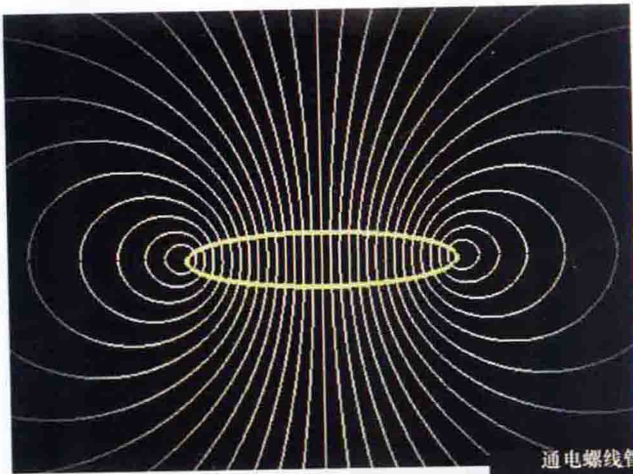
辐射的角分布



金属尖端的电场

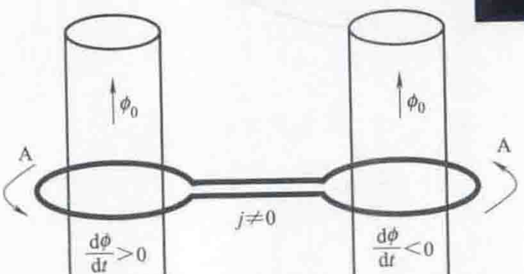


均匀带电圆环的电场

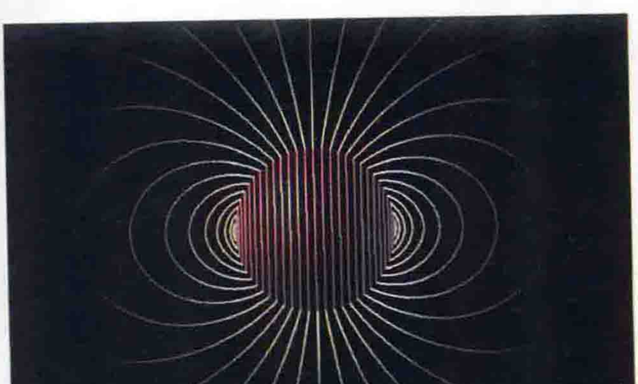


多边形电流的磁场（n =50）

通电螺线管的磁场



证实 L 效应的超导感应电流实验



均匀磁化球的磁场分布

前　　言

本书是作者继其《大学物理》与《数理方法》两门全新数字教学课程教材出版后的又一新作，其主要特色是：采用了数值计算及模拟技术与数字教学的新理念，使得传统的电动力学教学内容与方法发生了极大的变化。例如：在静电场部分，处理了关于金属尖端表面的电场分布、均匀带电圆环的电场及有限大平行板电容器的电场等问题；在稳恒电流的磁场部分，处理了环形电流的磁场、有限长螺线管的磁场等问题，还介绍了作者新近提出的关于角动量的最小耦合原理及磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 的一阶矩的 L 效应；在电磁波传播及辐射部分，定量模拟了全反射时的入射、反射及折射的动态过程和偶极辐射与四极矩辐射的动态过程以及矩形、圆形、三角形和平行四边形截面的波导中的动态电磁行波；定量讨论与模拟了金属圆柱对平面波及柱面波的散射等。所有这些新内容都是本节的亮点。

本书开篇就讨论了麦克斯韦方程的四维化，并列出了不同情况下的麦克斯韦方程的具体类型，并以求解不同情况下的麦克斯韦方程为主线展开。相对论没有再单独列一章，整个结构更为简明。本书是根据作者在南方科技大学教学的讲稿整理而成。

本书为高等学校物理专业及其他相关专业的基础教材，也可供相关专业教师、研究人员和工程技术人员参考。

限于作者的水平，难免有不妥与错误之处，望读者批评指正。

作　者

目　录

第一章

麦克斯韦方程的四维化

从大学普通物理教材中我们知道，电磁学的基本方程是麦克斯韦方程组：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1-1-1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1-1-2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1-1-3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1-1-4}$$

式中，$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$；$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$；$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$；$\boldsymbol{E} = -\nabla U - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$；$\rho$ 为自由电荷密度；$\boldsymbol{j}$ 为自由电流密度。由于电磁场是以光速运动的，它遵从相对论的规律，所以我们要将它们改写为四维形式。

第一节　电磁场的基本方程

1. 势与场的四维形式

电磁学中的电标势 U 和磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 可以构成一个四维矢量

$$A_\mu = (\boldsymbol{A}, \mathrm{i}U) \quad (\text{其中取 } c = \hbar = G = 1, \text{自然单位制}) \tag{1-1-5}$$

由于 $\boldsymbol{E} = -\nabla U + \partial_t \boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$，于是，电磁场能表述为一个二阶反对称张量 $F_{\mu\nu}$，即

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{1-1-6}$$

不难证明

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\mathrm{i}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\mathrm{i}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\mathrm{i}E_3 \\ \mathrm{i}E_1 & \mathrm{i}E_2 & \mathrm{i}E_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{1-1-7}$$

练习 1-1-1　请读者自行证明式（1-1-7）。

2. 场和势所满足的方程

通常，交变电磁场满足达朗贝尔方程，我们将 ∇ 叉乘式（1-1-3），并利用式

(1-1-4) 得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial(\nabla\times\boldsymbol{H})}{\partial t}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

又

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=\nabla\frac{\rho}{\varepsilon}-\nabla^2\boldsymbol{E}$$

于是有

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\mu\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}+\nabla\frac{\rho}{\varepsilon}\tag{1-1-8}$$

类似有

$$\nabla^2\boldsymbol{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\boldsymbol{j}\tag{1-1-9}$$

练习 1-1-2 请由麦克斯韦方程导出式 (1-1-9)。

转为四维形式，可将 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\varepsilon\partial_t\boldsymbol{E}+\mu\boldsymbol{j}$ 写成为

$$\partial_\nu F_{\mu\nu}=-\mu j_\mu\tag{1-1-10}$$

将 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial_t\boldsymbol{B}$ 写成

$$\partial_\rho F_{\mu\nu}+\partial_\mu F_{\nu\rho}+\partial_\nu F_{\rho\mu}=0\tag{1-1-11}$$

式 (1-1-10) 和式 (1-1-11) 为四维形式的麦克斯韦方程。

练习 1-1-3 请验证式 (1-1-10) 和式 (1-1-11)。

下面我们用哈密顿原理导出无源的四维场方程。由四维势和其导数可构成的标量项是

$$\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}(F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu),A_\mu A_\mu$$

这里应用了爱因斯坦约定，相同的下标表示求和。

系统的拉格朗日量为

$$L=\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+m^2A_\mu A_\mu$$

对于电磁场光子静质量 $m=0$，代入系统的作用量

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t$$

由变分原理 $\delta S=0$ 得

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\delta(\partial_\mu A_\nu)\right]\mathrm{d}t=0$$

考虑到

$$-F_{\mu\nu}\partial_\mu(\delta A_\nu)=-\partial_\mu(F_{\mu\nu}\delta A_\nu)+\partial_\mu F_{\mu\nu}\delta A_\nu$$

其中 $\partial_\mu(F_{\mu\nu}\delta A_\nu)$ 积分后为零（因为在时间边界点 $\delta A_\nu=0$），则有

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}=0\tag{1-1-12}$$

式（1-1-12）是自由场四维形式的场方程，考虑到 $F_{\mu\nu}$ 的反对称性，式（1-1-12）也可以写成

$$\partial_\mu F_{\nu\mu}=0$$

将 $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ 代入方程（1-1-12）得

$$\partial_\mu(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)=0$$

取洛伦兹规范 $\partial_\mu A_\mu=0$，则

$$\nabla^2 A_\nu-\partial_t{}^2 A_\nu=0 \tag{1-1-13}$$

式（1-1-13）是自由场的四维形式的势方程。

将式（1-1-13）分别写成矢势与标势满足的波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\partial_t{}^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0} \text{和} \nabla^2 U-\partial_t{}^2 U=0$$

在有源场的情况下，场与势分别满足达朗贝尔方程

$$\partial_\mu F_{\nu\mu}=-\mu j_\nu \tag{1-1-14}$$

$$\nabla^2 A_\nu-\partial_t{}^2 A_\nu=-\mu j_\nu \tag{1-1-15}$$

有源场的拉格朗日量为 $L=\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\mu A_\nu j_\nu$，由变分原理即得式（1-1-14）和式（1-1-15）。

场方程写成三维形式即为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\mu\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}+\nabla\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1-1-16}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{H}-\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\boldsymbol{j} \tag{1-1-17}$$

势方程写成三维形式，即为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\partial_t{}^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{j} \tag{1-1-18}$$

$$\nabla^2 U-\partial_t{}^2 U=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1-1-19}$$

练习 1-1-4 试用有源场的拉格朗日量 $L=\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\mu A_\nu j_\nu$ 导出式（1-1-14）和式（1-1-15）。

第二节 不同特殊情况下的方程形式

1. 静电场的拉普拉斯方程与泊松方程

对于 $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$，$\partial_t U=0$，有

$$\nabla^2 U=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

称为泊松方程，以及

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \nabla \frac{\rho}{\varepsilon}$$

称为矢量泊松方程。

对于$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$，$\rho=0$，$\partial_t U=0$ ，有

$$\nabla^2 U=0$$

称为拉普拉斯方程。

2. 稳恒电流磁场的矢量泊松方程

对于$\partial_t \boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$，$\partial_t \boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，有

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{j}$$

称为矢量泊松方程。

对场

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = -\nabla \times \boldsymbol{j}$$

3. 自由电磁场的波动方程

对于$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$，$\rho=0$，有

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \partial_t{}^2 \boldsymbol{A}$$

称为矢势波动方程，以及

$$\nabla^2 U = \partial_t{}^2 U$$

称为标势波动方程。

对场 $$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \partial_t{}^2 \boldsymbol{E},\quad \nabla^2 \boldsymbol{H} = \partial_t{}^2 \boldsymbol{H}$$

4. 平面电磁波的亥姆霍兹方程

$$\partial_t{}^2 \boldsymbol{E} - k^2 \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0},\quad \partial_t{}^2 \boldsymbol{H} - k^2 \boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$$

5. 偶极辐射的达朗贝尔方程

对于$\boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0}$，$\rho\neq0$ 的情况，

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t{}^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{j},\quad \nabla^2 U - \frac{1}{c^2}\partial_t{}^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

称为达朗贝尔方程。

下面几章将分别对以上各种情况下的麦克斯韦方程进行数学求解和物理分析与讨论。

练习 1-2-1 请自行设计一个表，把麦克斯韦方程在不同条件下的简化形式和名称列出来。

第二章

静 电 场

静电学的基本问题是求解满足边值条件和边值关系的泊松方程的解，从数学上讲，这个解是唯一的。

第一节 静电问题的唯一性定理

设 V 可分为若干均匀介质的区域，$V = \sum_i V_i$，其中 V_i 区域具有恒定介电常数 ε_i，$\varepsilon_i \partial_n U_i$ 是在均匀区域 V_i 的界面上的值，V_i 中电势分布满足泊松方程 $\nabla^2 U = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_i}$，在 V_i 和 V_j 分界面上，有 $U_i = U_j$，且 $\varepsilon_i \partial_n U_i = \varepsilon_j \partial_n U_j$。

唯一性定理：设区域 V 内，电荷分布为 $\rho(\boldsymbol{r})$，在 V 的边界 S 上给定① $U|_S = U_S(\boldsymbol{r})$，或② $\partial_n U|_S = \partial_n U_S(\boldsymbol{r})$，则 V 内的电场唯一地确定。

证明：设有两组不同的解 $U^{(1)}$ 和 $U^{(2)}$ 在每个均匀区域均满足泊松方程及边值关系和边界条件。

令 $U = U^{(1)} - U^{(2)}$，则

$$\nabla^2 U = 0 \tag{2-1-1}$$

且在两均匀介质界面上，

$$U_i = U_j, \varepsilon_i \partial_n U_i = \varepsilon_j \partial_n U_j \tag{2-1-2}$$

在整个 V 的边界上，

$$U|_S = 0, \quad \partial_n U|_S = 0 \tag{2-1-3}$$

考察 V_i 区域界面 S_i 上的积分 $\oint_{S_i} \varepsilon_i U \nabla U \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，则有

$$\begin{aligned}\oint_{S_i} \varepsilon_i U \nabla U \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_{V_i} \nabla \cdot (\varepsilon_i U \nabla U) \mathrm{d}V = \int_{V_i} [\varepsilon_i (\nabla U)^2 + \varepsilon_i U \nabla U] \mathrm{d}V \\ &= \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla U)^2 \mathrm{d}V\end{aligned}$$

对所有界面的积分为

$$\sum_i \oint_{S_i} \varepsilon_i U \nabla U \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_i \int_{V_i} \varepsilon_i \nabla^2 U \mathrm{d}V \tag{2-1-4}$$

在界面 S_i上其与 V_j的交界面中有 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_i=-\mathrm{d}\boldsymbol{S}_j$，加上边值关系式（2-1-2），所以式（2-1-4）左边为零，只剩下 V 的外部边界 S，由式（2-1-3）可知其值也为零。

于是

$$\sum_i \int_{V_i} \varepsilon_i \nabla^2 U \mathrm{d}V = 0$$

由正定性 $\varepsilon_i \nabla^2 U \geqslant 0$，必有 $\nabla^2 U=0$ 或 $U=\text{const}$，即 $U^{(1)}-U^{(2)}=\text{const}$，而势可以确定到相差一个常数，它们对应的场却是相同的，即 $\nabla U^{(1)}=\nabla U^{(2)}$，以上证明了解的唯一性定理。

现在讨论有导体存在情况下的唯一性定理，选择两种情况来证明：

（1）给定每个导体的电势 U_i，它也是导体 V_i表面 S_i的电势；

（2）给定每个导体 V_i所带的总电荷量 Q_i。

对于第一种情况，考虑在一均匀介质 V 中，有若干金属体 $V_i \subseteq V$，设挖去金属体 V_i后得体域为 $V'=V-\sum\limits_i V_i$，V'的界面为 V 的界面 S 减去 $\sum\limits_i V_i$ 的界面 $\sum\limits_i S_i$，在 V'中电荷分布为 ρ，各点的势满足泊松方程 $\nabla^2 U=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$以及在边界面上满足给定的值，所以唯一性定理成立。

对于第二种情况，方程与边界条件分别为

在 V'区域满足泊松方程 $\quad \nabla^2 U=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$

在 V 的边界 S 上满足 $\quad U|_S=U_S(\boldsymbol{r})$，$\partial_n U|_S=\partial_n U_S(\boldsymbol{r})$

在金属的边界 S_i上有 $\quad U|_{S_i}=U_i$，$\oint_{S_i}\partial_n U \mathrm{d}S=-\dfrac{Q_i}{\varepsilon}$

证明：设有两个不同的解 $U^{(1)}$ 和 $U^{(2)}$ 满足上面的方程及边界条件。取 $U=U^{(2)}-U^{(1)}$，则在 V'域内 U 满足拉普拉斯方程 $\Delta U=0$，同时边界条件

在 V 的边界 S 上满足 $\quad U|_S=0$，$\partial_n U|_S=0$

在金属的边界 S_i上有 $\quad U|_{S_i}=0$，$\oint_{S_i}\partial_n U \mathrm{d}S=0$

由

$$\sum_i \oint_{S_i} \varepsilon U \nabla U \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_i \oint_{V_i} \nabla \cdot (\varepsilon U \nabla U) \mathrm{d}V_i = \sum_i \oint V_i \varepsilon \nabla^2 U \mathrm{d}V_i = 0$$

考虑到 $\nabla^2 U$ 的正定性，必有

$$\nabla^2 U=\mathbf{0} \text{ 或 } U=U^{(2)}-U^{(1)}=\text{const}$$

故唯一性得证。

第二节 静电场的能量

在线性介质中静电场的总能量为

$$W_e = \frac{1}{2}\int_\infty \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V$$

由 $\boldsymbol{E} = -\nabla U$ 及 $\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho$ 得

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} = -\nabla U\cdot\boldsymbol{D} = -\nabla\cdot(U\boldsymbol{D}) + U\nabla\cdot\boldsymbol{D}$$

对无穷大区域而言，其中第一项化成面积分时为零，于是

$$W_e = \frac{1}{2}\int_\infty U\nabla\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_\infty \rho U\mathrm{d}V \tag{2-2-1}$$

值得指出的是：$\frac{1}{2}\rho U$ 非能量密度，因为对局部区域第一项化成面积分时并非为零。从物理上讲，场的能量并非只在有电荷的区域。

练习 2-2-1 讨论$\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}$与$\frac{1}{2}\rho U$在物理上与数学上有何相同与不同。

在全空间分布均匀介质时，电场的总能量还可以写为

$$W_e = \frac{1}{2}\int\mathrm{d}V\int\frac{\rho(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{2-2-2}$$

式中，

$$U(\boldsymbol{r}) = \int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

例 2-2-1 分别用公式 $W_e = \frac{1}{2}\int_\infty \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V$ 和 $W_e = \frac{1}{2}\int_\infty \rho U\mathrm{d}V$ 计算一半径为 a 的均匀带电球所具有的总电场能。

解： 设球的总电荷量为 Q，则 $\rho = \frac{3Q}{4\pi a^3}$。由高斯定理不难得到球内、外的场分别为

$$\boldsymbol{E}_i = \frac{\rho\ \boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon r^3}\frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{\rho}{3\varepsilon}\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{E}_e = \frac{Q\ \boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2}\int_\infty \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_{r\leqslant a}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_{r>a}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{18\varepsilon_0}\int_{r\leqslant a}\rho^2 r^4 4\pi\mathrm{d}r + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{r>a}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r \\ &= \frac{2\pi\rho^2}{45\varepsilon_0}a^5 + \frac{Q^2}{8\pi a\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{40\pi a\varepsilon_0} + \frac{Q^2}{8\pi a\varepsilon_0} = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a} \end{aligned}$$