

EXAMINATION QUESTIONS AND ANSWERS
OF AMERICAN MIDDLE SCHOOL STUDENTS
MATHEMATICAL CONTEST FROM THE FIRST
TO THE LATEST (VOLUME IV)



历届美国中学生

数学竞赛试题及解答

第4卷 兼谈Mordell定理

1965~1969

刘培杰数学工作室 编



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

EXAMINATION QUESTIONS AND ANSWERS
OF AMERICAN MIDDLE SCHOOL STUDENTS
MATHEMATICAL CONTEST FROM THE FIRST
TO THE LATEST (VOLUME IV)



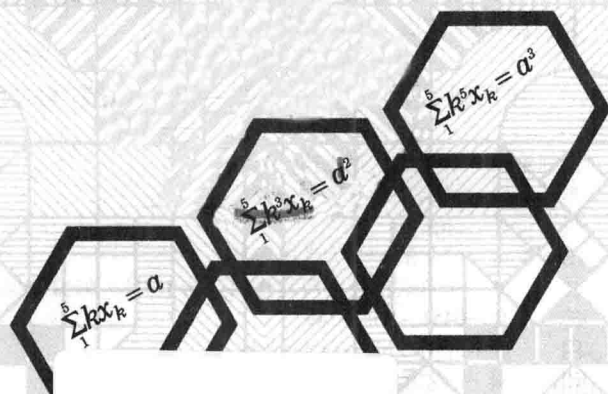
历届美国中学生

数学竞赛试题及解答

第4卷 兼谈Mordell定理

1965 ~ 1969

刘培杰数学工作室 编



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

美国中学数学竞赛是全国性的智力竞技活动,由大学教授出题,题目具有深厚的背景,蕴含丰富的数学思想,这些题目有益于中学生掌握数学思想,提高辨识数学思维模式的能力.本书面向高中师生,整理了从1965年到1969年历届美国中学生数学竞赛试题,并给出了巧妙的解答.

本书适合于中学生、中学教师及数学竞赛爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

历届美国中学生数学竞赛试题及解答.第4卷,
兼谈 Mordell 定理:1965~1969/刘培杰数学工作室
编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.4

ISBN 978-7-5603-4550-5

I. ①历… II. ①刘… III. ①中学数学课—题解
IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 309929 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘家琳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 11.5 字数 129 千字
版 次 2014 年 4 月第 1 版 2014 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4550-5
定 价 28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎
目
录

第1章	1965年试题	//1
1	第一部分	//1
2	第二部分	//4
3	第三部分	//7
4	答案	//10
5	1965年试题解答	//11
第2章	1966年试题	//28
1	第一部分	//28
2	第二部分	//32
3	第三部分	//35
4	答案	//38
5	1966年试题解答	//39
第3章	1967年试题	//59
1	第一部分	//59
2	第二部分	//63
3	第三部分	//66
4	答案	//68
5	1967年试题解答	//69
第4章	1968年试题	//93
1	第一部分	//93
2	第二部分	//95
3	第三部分	//97
4	第四部分	//100
5	答案	//102
6	1968年试题解答	//102

第 5 章	1969 年试题	//121
1	第一部分	//121
2	第二部分	//123
3	第三部分	//126
4	第四部分	//128
5	答案	//130
6	1969 年试题解答	//130
附录	Mordell 定理	//149
1	引论	//149
2	费马的栏外注解	//150
3	斐波那契问题	//153
4	古典的结果	//155
5	与椭圆曲线的关系	//157
6	与椭圆曲线中 BSD 猜想的联系	//160
7	同余数表	//161
8	同余数与费马大定理	164 //
	参考文献	//166



1965 年试题

第 1 章

1 第一部分

1. 满足方程式 $2^{2x^2-7x+5} = 1$ 的 x 的实数值共有几个().
(A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 4 (E) 多于 4
2. 一正六边形内接于一圆, 其一边的长与被边所截的较短的弧长的比为().
(A) 1:1 (B) 1:6 (C) 1: π
(D) 3: π (E) 6: π
3. 式 81^{-2-2} 跟何者有相同的值().
(A) $\frac{1}{81}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 3
(D) 81 (E) 81^4
4. 线 l_2 相交于线 l_1 , 而线 l_3 平行于线 l_1 , 此三线均相关且在同一平面内, 距三线等远的点共有几个点().
(A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 4 (E) 8

历届美国中学生数学竞赛试题及解答(第4卷)

5. 将循环小数 $0.363\ 636\cdots$ 写成最简单的分数形式时, 其分子与分母的和为().

(A) 15 (B) 45 (C) 114 (D) 135
(E) 150

6. 若 $10^{\lg 9} = 8x + 5$, 则 x 等于().

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{9}{8}$
(E) $\frac{2\lg 3 - 5}{8}$

7. 方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根的倒数和为().

(A) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (B) $-\frac{c}{b}$ (C) $\frac{b}{c}$ (D) $-\frac{a}{b}$
(E) $-\frac{b}{c}$

8. 一三角形的一边长为 18, 在此三角形内引一线段平行于此边致使其形成一梯形, 而其面积为此三角形面积的三分之一, 则此线段的长为().

(A) $6\sqrt{6}$ (B) $9\sqrt{2}$ (C) 12 (D) $6\sqrt{3}$
(E) 9

9. 抛物线 $y = x^2 - 8x + c$ 的顶点将为 x 轴上的一点, 假设 c 的值为().

(A) -16 (B) -4 (C) 4 (D) 8
(E) 16

10. 叙述 $x^2 - x - 6 < 0$ 同义于叙述().

(A) $-2 < x < 3$ (B) $x > -2$
(C) $x < 3$ (D) $x > 3$ 且 $x < -2$
(E) $x > 3$ 或 $x < -2$

11. 考虑叙述:

$$I: (\sqrt{-4})(\sqrt{-16}) = \sqrt{(-4)(-16)};$$

$$\text{II} : \sqrt{(-4)(-16)} = \sqrt{64};$$

$$\text{III} : \sqrt{64} = 8.$$

以上叙述中,何者为误().

- (A)无 (B)仅 I (C)仅 II (D)仅 III
(E)仅 I 与 III

12. 一菱形内接于 $\triangle ABC$, 已知菱形一顶点为 A , 而其中两边分别在 AB, AC 上, 若 $AC = 6, AB = 12$, 且 $BC = 8$, 则此菱形的一边长为().

- (A)2 (B)3 (C) $3\frac{1}{2}$ (D)4
(E)5

13. 设 n 为满足 $5y - 3x = 15$ 与 $x^2 + y^2 \leq 16$ 的数对 (x, y) 的组数, 则 n 等于().

- (A)0 (B)1 (C)2
(D)多于2, 但有限 (E)大于任何有限数

14. 在 $(x^2 - 2xy + y^2)^7$ 的完全展开的式子中, 数字系数之和为().

- (A)0 (B)7 (C)14 (D)128
(E) 128^2

15. 记号 25_b 表示 b 进位制的两位数, 若数 52_b 是数 25_b 的两倍, 则 b 等于().

- (A)7 (B)8 (C)9 (D)11
(E)12

16. 设 AC 垂直于 CE , 而 D 为 CE 的中点, B 为 AC 的中点, 连 AD, EB , 若 AD 与 EB 交于 F , 且 $BC = CD = 15$, 则 $\triangle DFE$ 的面积为().

- (A)50 (B) $50\sqrt{2}$ (C)75 (D) $\frac{15}{2}\sqrt{105}$

(E)100

17. 已知真叙述:唯若气候不佳,周日的野餐将不举行.
由此可得的结论是().

(A)若野餐举行了,则周日的气候无疑是好的
(B)若野餐不举行,则周日的气候可能是不好的
(C)若周日天气不好,则野餐将不举行
(D)若周日天气好,则野餐可以举行
(E)若周日天气好,则野餐将举行

18. 若 $1-y$ 用来作 $\frac{1}{1+y}$ 的值的近似值,而 $|y| < 1$, 则误差与正确值之比为().

(A) y (B) y^2 (C) $\frac{1}{1+y}$ (D) $\frac{y}{1+y}$

(E) $\frac{y^2}{1+y}$

19. 若 $x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r$ 恰可被 $x^3 + 3x^2 + 9x + 3$ 除尽,则 $(p+q)r$ 的值为().

(A) -18 (B) 12 (C) 15 (D) 27
(E) 45

20. 对每一 n , 一算术级数的前 n 项之和 S_n 为 $2n + 3n^2$, 则第 r 项为().

(A) $3r^2$ (B) $3r^2 + 2r$ (C) $6r - 1$ (D) $5r + 5$
(E) $6r + 2$

2 第二部分

21. 若选取 $x > \frac{2}{3}$, 则 $\lg(x^2 + 3) - 2\lg x$ 的值为().

- (A) 负的 (B) 0 (C) 1
(D) 小于任何可以指明的正数
(E) 大于任何可以指明的正数
22. 若 $a_2 \neq 0$ 且 r, s 为 $a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$ 的根, 则等式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 = a_0(1 - \frac{x}{r})(1 - \frac{x}{s})$ 对下列何者成立().
- (A) 所有 x 值, $a_0 \neq 0$ (B) 所有 x 值
(C) 仅当 $x = 0$ (D) 仅当 $x = r$ 或 $x = s$
(E) 仅当 $x = r$ 或 $x = s, a_0 \neq 0$
23. 若对所有使得 $|x - 2| < 0.01$ 的 x 有 $|x^2 - 4| < N$, 则 N 的最小值为().
- (A) 0.030 1 (B) 0.034 9
(C) 0.039 9 (D) 0.040 1
(E) 0.049 9
24. 已知数列 $10^{\frac{1}{n}}, 10^{\frac{2}{n}}, 10^{\frac{3}{n}}, \dots, 10^{\frac{n}{n}}$, 使得此数列前 n 项之积超过 100 000 时, n 的最小值为().
- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10
(E) 11
25. 设 $ABCD$ 为四边形, 延长 AB 至 E 使 $AB = BE$, 连 AC 与 CE 形成 $\angle ACE$, 为使此角为一直角, 四边形 $ABCD$ 必须有的性质是().
- (A) 各角均全等 (B) 各边均全等
(C) 两对全等边 (D) 一对全等边
(E) 一对全等角
26. 对数 a, b, c, d, e , 定义 m 为此五数的算术平均数; k 为 a 与 b 的算术平均数; l 为 c, d 与 e 的算术平均数; 而 p 为 k 与 l 的算术平均数, 则不论 a, b, c, d, e

历届美国中学生数学竞赛试题及解答(第4卷)

如何选取,将常有().

- (A) $m = p$ (B) $m \geq p$ (C) $m > p$ (D) $m < p$
(E) 非上述的答案

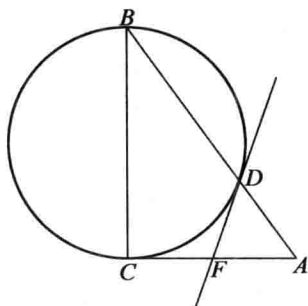
27. 当 $y^2 + my + 2$ 除以 $y - 1$ 得商为 $f(y)$, 剩余为 R_1 ;
当 $y^2 + my + 2$ 除以 $y + 1$ 得商为 $g(y)$, 剩余为 R_2 .
若 $R_1 = R_2$, 则 m 等于().
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1
(E) 一不定的常数

28. n 阶均匀(常可见到的部分)的一自动扶梯,以固定的速率下降,两男童 A 与 Z 从走动的自动扶梯稳定地走下来, A 每分钟走动的扶梯阶数为 Z 的两倍, A 经 27 阶到达底端,而 Z 经 18 阶到达底端,则 n 为().
(A) 63 (B) 54 (C) 45 (D) 36
(E) 30

29. 28 位同学至少选 1 门课,其中仅选数学与英语的人数等于仅选数学的人数,无同学仅选英语或仅选历史的,6 个同学选数学与历史,但不选英语,仅选英语与历史的数目为 3 门课全选的人数的 5 倍,若 3 门课全选的人数为一非零的偶数,则仅选英语与数学的人数为().
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8
(E) 9

30. 如图所示,设 $\text{Rt} \triangle ABC$ 的边 BC 为一圆的直径,此圆交斜边 AB 于 D ,过 D 作切线交 CA 于 F ,此资料不足以证明().





第30题图

- (A) DF 平分 CA (B) DF 平分 $\angle CDA$
 (C) $DF = FA$ (D) $\angle A = \angle BCD$
 (E) $\angle CFD = 2\angle A$

3 第三部分

31. 设 a, b 为关于 1 的正常数, 则满足等式 $(\log_a x) \cdot (\log_b x) = \log_a b$ 的 x 的实数值个数有().
 (A) 0 (B) 1 (C) 2
 (D) 大于 2 的一整数 (E) 无限个
32. 一物品值 C 元, 在损失为售价的 $x\%$ 之下, 以 100 元售出, 之后, 又在获利为新售价 S' 的 $x\%$ 之下售出, 若 S' 与 C 之差为 $\frac{10}{9}$ 元, 则 x 为().
 (A) 未定 (B) $\frac{80}{9}$ (C) 10 (D) $\frac{95}{9}$
 (E) $\frac{100}{9}$
33. 若数 $15!$ (表 $15 \times 14 \times 13 \times \cdots \times 1$ 之意) 以 12 进

位表其大小时,末尾有 k 个零;以 10 进位表其大小时,末尾有 h 个零,则 $k+h$ 等于().

- (A)5 (B)6 (C)7 (D)8
(E)9

34. 对 $x \geq 0$, 则 $\frac{4x^2 + 8x + 13}{6(1+x)}$ 的最小值为().

- (A)1 (B)2 (C) $\frac{25}{12}$ (D) $\frac{13}{6}$
(E) $\frac{34}{5}$

35. 一矩形的一边长为 5, 另一边长小于 4, 将矩形折起来, 使两对顶点重合, 若折痕的长为 $\sqrt{6}$, 则另一边的长为().

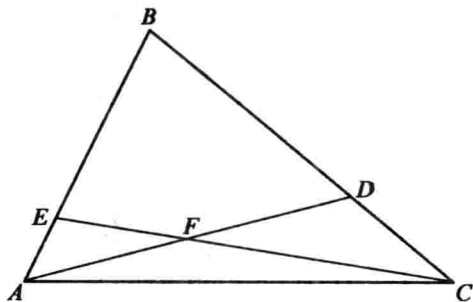
- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C)2 (D) $\sqrt{5}$
(E) $\sqrt{\frac{11}{2}}$

36. 已知 OA 与 OB 为两相关直线, 从 OA 上取一点作 OB 的垂线, 再自此垂足作 OA 的垂线; 再自第二垂足作 OB 的垂线, 依此进行直至无限. 若最初两垂线段长为 $a, b (a \neq b)$, 则此等垂直线段之长的和当垂线段无限增加时, 趋近于一极限, 此极限值为().

- (A) $\frac{b}{a-b}$ (B) $\frac{a}{a-b}$ (C) $\frac{ab}{a-b}$ (D) $\frac{b^2}{a-b}$
(E) $\frac{a^2}{a-b}$

37. 如图所示, 从 $\triangle ABC$ 的一边 AB 上取一点 E 使 $AE:EB = 1:3$, 又从另一边 BC 上取一点 D 使 $CD:DB =$

1:2,若 AD 与 CE 的交点为 F ,则 $\frac{EF}{FC} + \frac{AF}{FD}$ 为().



第37题图

- (A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{5}{4}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

(E) $\frac{5}{2}$

38. A 完成一工作需要的时间为 B 与 C 一起完成工作所需时间的 m 倍; B 完成工作需要的时间为 A 与 C 一起完成工作所需时间的 n 倍; 而 C 完成工作需要的时间为 A 与 B 一起完成工作所需时间的 x 倍, 则 x 为(以 m, n 表之)().

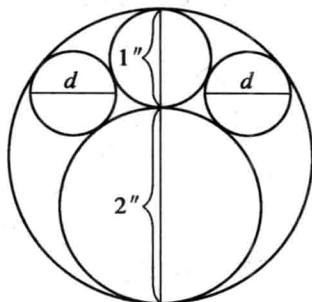
(A) $\frac{2mn}{m+n}$ (B) $\frac{1}{2(m+n)}$

(C) $\frac{1}{m+n-mn}$ (D) $\frac{1-mn}{m+n+2mn}$

(E) $\frac{m+n+2}{mn-2}$

39. 一工头监督一检查员以一 2" - 塞子与一 1" - 塞子检验一 3" - 洞(见图), 为了保证所测位置确实正确, 把两个新规格(一种仪器的名)插入其中, 若此新的规格完全相同, 则欲达到百分之一的精确度

时,新规格直径 d 应为().



第 39 题图

- (A) 0.87 (B) 0.86 (C) 0.83 (D) 0.75
(E) 0.71

40. 欲使 $P = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 3x + 31$ 为一整数的平方, 则 x 的整数值的个数为().

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
(E) 0

4 答 案

1. (C) 2. (D) 3. (B) 4. (C) 5. (A) 6. (B)
7. (E) 8. (A) 9. (E) 10. (A) 11. (B)
12. (D) 13. (E) 14. (A) 15. (B) 16. (C)
17. (E) 18. (B) 19. (C) 20. (C) 21. (D)
22. (A) 23. (D) 24. (E) 25. (D) 26. (E)
27. (A) 28. (B) 29. (A) 30. (B) 31. (C)
32. (C) 33. (D) 34. (B) 35. (D) 36. (E)
37. (C) 38. (E) 39. (B) 40. (D)

5 1965年试题解答

1. 因为 $2^{2x^2-7x+5} = 1 = 2^0$, 所以 $2x^2 - 7x + 5 = 0$.

既然 $7^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 > 0$, 此方程有两个实根.

答案: (C).

2. 令 r 为此圆的最大半径, 则六边形的一边为 r , 则被

边所截取的弧长是 $\frac{2\pi r}{6}$, 即 3π .

答案: (D).

3. $81^{-2-2} = 81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{3}$.

探讨: 是否仍有答案未列在五个选择之中?

答案: (B).

4. 令 l_4 为距 l_1, l_3 等距离的线, 令距离 $= d$, 令 l_5, l_6 是距 l_2 的长度为 d 的线 (l_5, l_6 平行于 l_2). l_4, l_5, l_6 的交点有 2 个, 此即所求之点所成的集合.

答案: (C).

5. 根据题意, 有

$$\begin{aligned} 0.363\ 636\cdots &= \frac{36}{10^2} + \frac{36}{10^4} + \cdots \\ &= \frac{\frac{36}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11} \end{aligned}$$

或:

令

$$F = 0.363\ 636\cdots, 100F = 36.363\ 636\cdots$$

$$99F = 36, F = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$$

答案:(A).

6. 因为 $10^{\lg 9} = 9, 8x + 5 = 9$, 所以 $x = \frac{1}{2}$.

答案:(B).

7. 设两根为 r, s , 则 $r + s = -\frac{b}{a}$ 且 $rs = \frac{c}{a}$.

$$\text{所以 } \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{r+s}{rs} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}, c \neq 0, a \neq 0.$$

答案:(E).

8. 令 s 为所求的线段的长, 则 $\frac{s^2}{18^2} = \frac{2}{3}$.

所以 $s = 6\sqrt{6}$ (两相似三角形的面积之比等于其对应边长的平方比).

答案:(A).

9. 因为 $y = x^2 - 8x + c = x^2 - 8x + 16 + c - 16 = (x - 4)^2 + c - 16$ (一抛物线), 顶点在 x 轴上, 故其坐标必为 $(4, 0)$, c 必有值 16.

或:

此抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点 x 坐标是 $-\frac{b}{2a}$, 得

$$x = -\frac{-8}{2} = 4$$

若 $0 = 4^2 - 8 \times 4 + c$, 即, 若 $c = 16$, 则 y 坐标是 0.

答案:(E).

10. 因为

$$x^2 - x - 6 < 0, x^2 - x < 6$$

