

The Calculus of Friendship

What a Teacher and a Student Learned about Life While
Corresponding about Math

學微積分， 也學人生

美國康乃爾大學 應用數學系教授 史蒂芬·史特格茲 (Steven Strogatz) 著
英國愛丁堡大學 數學博士 蔡承志 譯

張海潮 台灣大學數學系教授
游森棚 高雄大學應用數學系教授
強力推薦

微積分的核心問題是「流動」與「改變」。

是數學上的應用，人生中的大小事物亦不斷在流動與改變。

與其老師通信 30 年的集結，

學、分享解題的樂趣，透過數學品嘗人生甘苦。

37 大眾科學館

達流

Popular
Science

37 大眾科學館



學微積分，也學人生

The Calculus of Friendship
What a Teacher and a Student Learned about Life
While Corresponding about Math

史蒂芬·史特格茲 (Steven Strogatz) 著
蔡承志 譯



The Calculus of Friendship:

What a Teacher and a Student Learned about Life While Corresponding about Math

Copyright © 2009 by Steven Strogatz

Chinese translation copyright © 2011 by Yuan-Liou Publishing Co., Ltd.

(through arrangement with Brockman, Inc.)

All rights reserved.

學微積分，也學人生

作者 / 史蒂芬·史特格茲 (Steven Strogatz)

譯者 / 蔡承志

編輯 / 陳懿文

封面設計 / 唐壽南

企劃經理 / 金多誠

科學叢書總編輯 / 吳程遠

出版一部總監 / 王明雪

發行人 / 王榮文

出版發行 / 遠流出版事業股份有限公司

臺北市 100 南昌路二段 81 號 6 樓

郵撥 / 0189456-1 電話 / 2392-6899

傳真 / 2392-6658

法律顧問 / 董安丹律師

著作權顧問 / 蕭雄淋律師

2011 年 10 月 1 日 初版一刷

行政院新聞局局版臺業字第 1295 號

新台幣售價 / 300 元 (缺頁或破損的書，請寄回更換)

有著作權 · 侵害必究 Printed in Taiwan

ISBN 978-957-32-6857-4

Ylib 遠流博識網

<http://www.ylib.com> E-mail: ylib@ylib.com

國家圖書館出版品預行編目資料

學微積分，也學人生 / 史蒂芬·史特格茲 (Steven
Strogatz) 著；蔡承志譯. -- 初版. -- 臺北市：遠流，

2011.10

面；公分. -- (大眾科學館；PS037)

譯自：The Calculus of Friendship : What a Teacher
and a Student Learned about Life While

Corresponding about Math

ISBN 978-957-32-6857-4 (平裝)

1. 數學 2. 書信

310.7

100018300

學微積分，也學人生
The Calculus of Friendship

目 錄

導讀 優秀老師示範，偉大老師啟發／游森棚	002
推薦 另一種師生情緣／張海潮	005
譯序 微積分中的人生意義	007
前言	012
連續性（1974-75）	017
追逐（1976）	025
相對論（1977）	031
無理數（1978-79）	045
移位（1980-89）	059
餐墊紙上的證明（1989.3）	071
和尚與山（1989-90）	109
隨機（1990-91）	127
無限與極限（1991）	141

混沌 (1992-95)	159
慶祝 (1996-99)	169
最快走下坡之路 (2000-03)	173
分歧 (2004).....	187
海龍公式 (2005- 目前)	203
致謝.....	222
延伸閱讀.....	225
參考文獻.....	232
數學問題總整理.....	235

37 大眾科學館



學微積分，也學人生

The Calculus of Friendship
What a Teacher and a Student Learned about Life
While Corresponding about Math

史蒂芬·史特格茲 (Steven Strogatz) 著

蔡承志 譯

導讀

優秀老師示範，偉大老師啟發

游森棚

這本書是當代優秀數學家史蒂芬·史特格茲整理自他和高中數學老師喬弗瑞 30 年的通信。藉由書信往來，他們討論了許多有趣的微積分問題。

先談數學。平心而論，數學科普書中的數學受限於讀者的接受度，通常不會太令人驚豔，但這本書不同，非常不同。

這些回信中的數學非常有品味。史蒂芬回給老師信並不是敷衍帶過或制式化的解法，他不止把問題解釋得清清楚楚，解釋的方法還常令人眼睛一亮，比如用幾何方法證明 $\sqrt{2}$ 是無理數、由一個無窮等比級數的斂散引入傅立葉級數、導出圓周率的公式、高幕次餘弦函數的積分等等。而喬弗瑞老師也不乏佳作，比如用駱駝證明一個正弦函數自我正交的積分式。

但是除了這些數學，這本書中我讀到更多其他層面的

意涵。

這本書讓我感動，因為作者史蒂芬在書中誠實地回顧面對老師的心情轉折。他從身為喬弗瑞老師的學生，一路成為頂尖大學的教授；從學生寫信的問好，成為書信討論的筆友和老師，最後成為朋友。這本書讓我感動，也因為喬弗瑞老師在信中誠實面對他自己的數學能力；在信件中，都是史蒂芬在教喬弗瑞老師，而即使已經教了幾十年的微積分，喬弗瑞老師仍然知道他在數學上不會的東西有很多，但他永遠像一個求知若渴的學生，寫信問著困擾他的有趣問題、分享他的發現。反觀對照國內到處充斥半瓶水的王牌名師，就知道如喬弗瑞老師的謙遜與坦誠有多麼困難。

就像韓愈說的，弟子不必不如師，師不必賢於弟子，聞道有先後，術業有專攻。

我更看到歲月的淘洗與無情。隨著年歲愈高，身體狀況走下坡的喬弗瑞老師更頻於通信，如日中天忙碌的史蒂芬愈少回信。然而我也看到時間淬鍊後純粹的友情，縱使人生賦予種種試煉，他們卻很少在信中透露個人的憂傷，兩人的通信只討論數學，保持著微妙的距離。這是謹慎的信任，這些信件是情緒的釋放，不知不覺，他們成為彼此的重要他人（significant others）。

讀這本書時，我不停地回想起我在建中執教時幾個優秀學生的臉孔。我想起高一開學第一個星期，有個學生問我怎麼算一個三重積分（triple integral），高二另一個學生問我什麼是李代數（Lie Algebra），老實說，當時我真的被嚇到了。

這些學生現在不少在名校攻讀博士，有哈佛、麻省理工、加州理工、柏克萊。是的，直到現在我們仍然偶爾通信；我們只是在BBS或Gmail上偶爾丟丟水球，不像書中作者與喬弗瑞老師互通信件討論數學，在各自專業的學術上，他們已經各有一片天空。但如同這本書一樣，我完全體會師生關係可延續昇華為一生的朋友。

書中有一幕，喬弗瑞老師獲得教師獎，史蒂芬應邀致詞，講沒兩句就在台上泣不成聲，史蒂芬當時一定還不知道，喬弗瑞老師給了他多大的啟發。這是讓我最感動的一幕，一個老師有這樣的學生，夫復何求？

平庸的老師背誦，負責的老師講解，優秀的老師示範，偉大的老師啟發。對教育工作者而言，這真是一句非常好的話。

（本文作者為高雄大學應用數學系教授）

推薦

另一種師生情緣

張海潮

這本書《學微積分，也學人生》是作者史蒂芬·史特格茲將他和他的高中老師喬弗瑞 30 幾年來的通信整理而成的。喬弗瑞老師是作者高中的微積分老師，雖然他的微積分程度不是很好，但是熱心教學，願意與學生分享成功或失敗的經驗。他對教學的敬業與忠誠感染了他所教過的每一個學生，作者正是其中之一。

從作者轉載的信件看來，大部分時候是喬弗瑞老師向作者提出一個微積分的問題，這些問題通常來自他教學上的需要或是自學時碰到的困難。作者在回信時會幫忙解題並且提出進一步的看法，而喬弗瑞老師總是虛心受教，經常在下一封信中表達由衷的謝意和得到解答的喜悅。

這似乎是倒過來的狀況：高中老師向過去的學生請教問題，而學生也不厭其煩地把更精進的學問告訴老師。

我在讀這本書時，常常想起小川洋子寫的《博士熱愛

的算式》，這兩本書都是從真摯的感情中穿插重要的數學。但是小川的書虛擬的成分較大，不若史特格茲這本書，所有人物都是作者的老師、朋友及親人。此外，本書在書信中討論的問題非常實際，大部分是微積分的經典問題，值得讀者仔細品嚐。

由於現行的高中生在高三的時候已經學了微積分，所以高中生和高中老師在閱讀本書時應該會覺得十分親切，即使是不曾學過微積分的讀者，也能感受到喬弗瑞老師活到老學到老的精神，以及作者對老師的大方和體諒。不知道在台灣是不是也能看到這樣的師生關係？

（本文作者為台大數學系教授）

譯序

微積分中的人生意義

經典數學教科書《非線性動力學與混沌》(*Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*)的作者、同時也是享譽國際的數學家史特格茲，擅長剖析深奧的數學概念，讓天資不如他那麼優秀的研究生在他的導引下也能一窺數學的堂奧，甚至登堂入室。只可惜「非線性動力學」與「混沌」畢竟過於專業，一般讀者無緣由書中領略他的闡述功力。不過，好消息是，讀者手上這本《學微積分，也學人生》書裡，史特格茲把主題限定在現代數學的基礎學科微積分上，而大多數讀者可能已經修過、正在修習或即將要修習這門課。

透過史特格茲與其高中微積分老師喬弗瑞先生 30 餘年來的書信選輯，加上他深入淺出的串場說明，讀者除了能領略到他超凡的解說功力，也可以深刻體會到兩人對微

積分所投注的熱情，以及微積分這門美妙學科本身的基礎性、實用性與趣味性。

史特格茲和一般微積分科普書的作者很不一樣，他不會刻意選擇一些非常簡單的題材，將它們說得天花亂墜，讓讀者讀完書後自以為功力大增，直到在學校的正式考試中鎩羽而歸，才知道被科普書作者灌了迷湯。史特格茲所做的是，將一些能讓兩位微積分高手（一位知名數學教授和他的微積分老師）感興趣並願意花時間在書信中深入討論的微積分問題，原汁原味地呈現在讀者面前，並邀請讀者與他們一起來思考。譯者個人以為，這樣的做法將會為科普界注入一股向上提升的新動力，讓科普書未來也可以被當成大學課程的補充教材或進階題庫來使用。

一般人對微積分常有以下的反應：「我微積分讀得很辛苦，但人生還不是過得好好的，而且我的不少朋友也都有同感。」言下之意是：微積分難，友誼不難，而人生超簡單。但在這一點上，本書作者的認知似乎剛好相反。兩位微積分高手所討論的微積分問題雖然有些難度，但是這些問題大多能在他們一、兩次的書信往返之間就解決；相較之下，兩人的朋友關係則需要他們花上 2、30 年的時間才從師生關係慢慢發展出來——從一開始純粹討論數學問題，到試探性地詢問及分享近況，以至於最終卸下身分的

防衛，讓對方看見自己的軟弱，並從朋友的角度彼此提供安慰；而在面對書中所提到的生、老、病、死等人生難題時，史特格茲和他的老師更是只能如同激流中的泛舟客，被動地學習隨波起舞，並且試著接受或享受各自的人生。

在本書中，史特格茲無意將友誼或人生看成一個微積分問題，去做精確的分析；相反地，他選擇利用微積分中的一些基礎概念（連續、追逐、相對、無理、隨機、無限、極限、混沌、下坡、分歧等）來隱喻或明喻真實的人生。隨著書中微積分問題一個接一個被解決，作者和他恩師人生中的問題也同時一個個被揭開、被碰觸、被撫癒。在作者的坦白與率真的襯托下，這些類比幾乎就像鏡像般清晰。然而，鏡子兩側畢竟仍是性質截然不同的事物：解開微積分之謎是一種樂趣，但解開人生之謎反而讓人生變得無趣。

且讓我們放下心中定見，好好享受一趟兼具理性與感性、既要追根究底又要學習釋然的嶄新閱讀過程。

學微積分，也學人生
The Calculus of Friendship

目 錄

導讀 優秀老師示範，偉大老師啟發／游森棚	002
推薦 另一種師生情緣／張海潮	005
譯序 微積分中的人生意義	007
前言	012
連續性 (1974-75)	017
追逐 (1976)	025
相對論 (1977)	031
無理數 (1978-79)	045
移位 (1980-89)	059
餐墊紙上的證明 (1989.3)	071
和尚與山 (1989-90)	109
隨機 (1990-91)	127
無限與極限 (1991)	141

混沌 (1992-95)	159
慶祝 (1996-99)	169
最快走下坡之路 (2000-03)	173
分歧 (2004)	187
海龍公式 (2005- 目前)	203
致謝	222
延伸閱讀	225
參考文獻	232
數學問題總整理	235