

上海大学出版社

2006年上海大学博士学位论文 27



可积系统与非等谱 孤子方程的求解

● 作者：孙业朋

● 专业：计算数学

● 导师：陈登远



上海大学出版社

2006年上海大学博士学位论文 27



可积系统与非等谱 孤子方程的求解

●作者：孙业朋

● 专业：计算数学

● 导师：陈登远



贵阳学院图书馆



199888100

上海大学图书馆

2006 年上海大学博士学位论文

图书在版编目(CIP)数据

2006 年上海大学博士学位论文. 第 1 辑/博士学位论文编辑部编. —上海: 上海大学出版社, 2009. 12

ISBN 978 - 7 - 81118 - 511 - 9

I. 2... II. 博... III. 博士—学位论文—汇编—上海市—2006 IV. G643.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 162521 号



2006 年上海大学博士学位论文 ——第 1 辑

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路 99 号 邮政编码 200444)

(<http://www.shangdapress.com> 发行热线 66135110)

出版人: 姚铁军

*

南京展望文化发展有限公司排版

上海华业装潢印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本 890 × 1240 1/32 印张 264.75 字数 7 376 千

2009 年 12 月第 1 版 2009 年 12 月第 1 次印刷

印数: 1—400

ISBN 978 - 7 - 81118 - 511 - 9/G · 513 定价: 1000.00 元(50 册)

Shanghai University Doctoral Dissertation (2006)

上海大学

Integrable Systems and Solutions to Noniospectral Soliton Equations

答辩委员会名单:

主任: 姚嘉 **Candidate:** Sun Ye - peng

200030

委员: 范忠 **Major:** Computational Mathematics

200433

委员: 范忠 **Supervisor:** Chen Dengyuan

200060

李志成 教授, 华东师范大学

200444

马和平 教授, 上海大学

茅德康 教授, 上海大学

200444

导师: 陈登远 教授, 上海大学

200444

Shanghai University Press

• Shanghai •

答辩委员会评语 上海大学

本论文经答辩委员会全体委员审查,确认符合上海大学博士学位论文质量要求.

答辩委员会名单:

- 主任:楼森岳 教授,上海交通大学 200030
- 委员:范恩贵 教授,复旦大学 200433
- 李志斌 教授,华东师范大学 200062
- 马和平 教授,上海大学 200444
- 茅德康 教授,上海大学 200444
- 导师:陈登远 教授,上海大学 200444

综观全文,这是一篇涉及面广、内容丰富、结果有意义的博士学位论文。论文表达清楚、书写规范,所得结论正确。作者针对孤立子理论中几个重要方面进行了细致而深入的研究,取得了一系列富有创新性的研究成果。攻读博期间,该生和同学在国内外重要学术刊物上发表了十余篇SCI论文,表现出很强的科研能力。从论文可以看出,作者具有宽广的知识面,扎实的基础知识和专业知识,以及具有独立从事科研工作的能力,答辩中能正确回答

学大商工

合符人商,查审员委朴全会员委辑答登文研本

来要量测文研外学士研学大商工

评阅人名单:

曾云波	教授,清华大学	100084
胡星标	教授,中科院计算数学所	100080
范恩贵	教授,复旦大学	200433

评议人名单:

周子翔	教授,复旦大学	200433
徐西祥	教授,山东科技大学	266510

答辩委员会对论文的评语

孙业朋同学的博士论文“可积系统与非等谱孤子方程的求解”,选题属于孤立子理论的前沿,是当前可积系统与非线性科学研究领域的重要课题。

论文研究的主要内容包括:孤子方程族的生成及其 Hamilton 结构,可积性,守恒律,谱问题的非线性化,孤子方程的严格解等.论文的主要创新点有:引入新的谱问题和 Loop 代数并导出一族具有双 Hamilton 结构的孤子方程,利用双非线性化技巧将谱问题非线性化为完全可积的有限维 Hamilton 系统;研究了三类离散谱问题,利用非线性化方法生成了新的有限维可积 Hamilton 系统与可积辛映射;利用 Hirota 方法和 Wronskian 技巧求得了非等谱 AKNS 方程的 N -孤子解与双 Wronskian 解;求得修正 Vakhnenko 方程和修正 BS 方程的新解;推广了 KP 系统约束并获得多元非等谱 AKNS 方程族。

综观全文,这是一篇涉及面广、内容丰富、结果有意义的博士学位论文.论文表达清楚、书写规范、所得结论正确.作者针对孤立子理论中几个重要方面进行了细致而深入的研究,取得了一系列富有创新性的研究成果.攻博期间,孙业朋同学在国内重要学术刊物上发表了 10 余篇 SCI 论文,表现出很强的科研能力.从论文可以看出,作者具有宽广的知识面,扎实的基础知识和专业知识以及具有独立从事科研工作的能力.答辩中能正确回答

问题。

答辩委员会经过认真审议并经过无记名投票,全票通过孙业朋同学的博士学位论文答辩,并一致认为这是一篇优秀博士学位论文。建议授予孙业朋同学理学博士学位。

答辩委员会表决结果

经答辩委员会表决,一致同意通过孙业朋同学的博士学位论文答辩,并建议授予理学博士学位。

答辩委员会主任:楼森岳

2006年5月30日

摘 要

本文研究的主要内容包括:孤子方程族的生成和 Lie 群结构方程, Hamilton 结构, Liouville 可积性, 无穷守恒律, Lax 对与共轭 Lax 对的双非线性化及可积辛映射与有限维 Hamilton 系统, 孤子方程的扩展可积模型. 利用 Hirota 方法, Wronskian 技巧来研究一些等谱与非等谱孤子方程的多孤子解. 利用 $(2+1)$ 维孤子系统的对称约束生成 $(1+1)$ 维的孤子方程, 并应用 Gateaux 导数与泛函导数的关系得到位势对称约束的完全形式.

在第二章中, 首先从所建立的新谱问题出发导出一族 Lax 可积的孤子方程, 并研究它的双 Hamilton 结构与 Liouville 可积性. 应用 Lax 对与共轭 Lax 对的双非线性化方法生成新的可积辛映射与有限维 Hamilton 系统. 由此利用可换流的对合解给出孤子方程族解的对合表示. 最后构造新的 Loop 代数 $\tilde{G}$, 得到该方程族的扩展可积模型.

第三章主要研究三个离散的等谱问题. 首先从第一离散的谱问题导出一类晶格孤子方程, 并证明它具有离散的 Hamilton 结构与 Liouville 可积性. 通过双非线性化方法生成新的有限维 Hamilton 可积系统与可积辛映射, 并给出它的无穷守恒律. 其次, 构造新的代数系统, 导出与 Lotka-Volterra 格相关的离散方程族, 并研究它的可积性与可积耦合. 最后从第三谱问题出发导出离散孤子方程的正负族, 并求出位势函数和特征函数的对称约束, 由 Lax 对的非线性化产生新的可积辛映射与有限维

Hamilton 系统.

第四章首先从 Lie 群结构方程导出非等谱 AKNS 方程族. 通过选取 Loop 代数建立非等谱 AKNS 方程族的扩展可积模型. 利用 Hirota 方法获得非等谱 AKNS 方程的双线性导数方程, 并给出 N -孤子解的表达式. 应用 Wronskian 技巧证明非等谱 AKNS 方程具有双 Wronskian 解. 通过约化获得非等谱 Schrödinger 方程与它的 N -孤子解和 Wronskian 解. 最后建立非等谱 AKNS 方程的广义双 Wronskian 解. 其所用的技术可推广到其他非等谱方程.

第五章对 Hirota 方法作直接地推广. 以修正 Vakhnenko 方程为例, 求得 Hirota 形式的新解. 对于 Wronskian 技巧, 引入对参数的求导, 以修正 Bogoyavlenskii-Schiff 方程为例, 得到广义的新 Wronskian 解.

第六章主要研究 $(2+1)$ 维孤子系统的位势约束问题. 通过高维孤子系统的位势约束生成低维的孤子方程族. 首先由 KP 系统的对称约束生成了 AKNS 方程族, 并给出其隐形表示. 进而推广 KP 系统的约束, 且求得多元的非等谱 AKNS 方程族. 对于 MKP 系统, 通过位势约束生成非等谱 Schrödinger 方程族, 并证明它具有隐形表示. 利用 Gateaux 导数与泛函导数的关系, 得到 KP 系统、MKP 系统对称约束的完全形式.

关键词 离散孤子方程, 非等谱方程, Hamilton 结构, Lax 可积性, Liouville 可积性, 无穷守恒律, 扩展可积模型, 双非线性化方法, Hirota 方法, Wronskian 技巧, 精确解, $(2+1)$ 维孤子系统, 对称约束

Abstract

The major contents in this dissertation include: the generation of soliton hierarchies of equations and the structure equations of Lie group, Hamiltonian structures, Liouville integrability, infinite conservation laws, binary nonlinearization of Lax pairs and adjoint Lax pairs and integrable symplectic map and finite-dimensional integrable systems, expanded integrable models of soliton equations, multi-soliton solutions of some isospectral and nonisospectral soliton equations are studied by using Hirota method, Wronskian technique, soliton equations in $(1+1)$ dimensions are generated by using symmetry constraints of soliton systems in $(2+1)$ dimensions, completely conditions for symmetry constraints of potentials are constructed by means of the relation of the Gateaux derivative and functional derivative.

In the second chapter, a new isospectral problem is presented and a hierarchy of Lax integrable soliton equations are derived from the spectral problem. It is shown that the hierarchy is completely integrable in the Liouville sense and possesses bi-Hamiltonian structures. The corresponding Lax pairs and adjoint Lax pairs are nonlinearized into finite-dimensional integrable Hamiltonian systems and a new integrable symplectic map. Involutive representations of

solutions of soliton equations is given by involutive solutions of commutative flows. Finally, expanding integrable models of the hierarchy are constructed by using a new Loop algebra $\tilde{G}$.

Three discrete isospectral problems are investigated in the third chapter. Firstly, a family of lattice soliton equations are derived from a discrete isospectral problem. It is verified that the hierarchy possesses discrete Hamiltonian structure and is integrable in the Liouville sense. New finite-dimensional integrable Hamiltonian systems and an integrable symplectic map are generated by binary nonlinearization method. Conservation laws are established. Secondly, a hierarchy of discrete equations associated with Lotka-Volterra are derived from a new algebraic system. Its integrability and integrable couplings are studied. Lastly, positive and negative hierarchies of discrete soliton equations are derived from a spectral problem. An explicit symmetry constraint is proposed. Lax pairs are nonlinearized into a new integrable symplectic map and finite-dimensional Hamiltonian systems.

In the fourth chapter, nonisospectral AKNS equations are derived from the structure equations of Lie group. By taking a Loop algebra, expanded integrable models of nonisospectral AKNS equations are established. The bilinear derivative equations and the N -soliton solutions of the nonisospectral AKNS equation are derived by using Hirota method. It is shown that the nonisospectral AKNS equation possesses the double Wronskian solution through the

Wronskian technique. By reducing, a nonisospectral Schrödinger equation is obtained. The N -soliton and Wronskian solution for the nonisospectral Schrödinger equation are given. Finally, the generalized double Wronskian solution to the nonisospectral AKNS equation is constructed.

The Hirota bilinear method is generalized and investigated in the fifth chapter. The novel multisoliton solutions for the modified Vakhnenko equation are obtained by using Hirota direct method. By derivativating with respect to parameters, the general solutions in Wronskian form to the modified Bogoyavlenskii-Schiff equation are given through a generalized Wronskian procedure.

The sixth chapter is mainly focused on studying symmetry constraints of $(2+1)$ -dimensional soliton systems. Lower dimensional soliton equations are generated by the symmetry constraints of higher dimensional soliton systems. The AKNS equations and their contact representations are constructed by the symmetry constraints of KP systems. The constraints of KP systems are generalized and multi-component nonisospectral AKNS equations are obtained. The nonisospectral Schrödinger equations are derived by the constraints of the MKP systems. It is shown that the nonisospectral Schrödinger equations possess contact representations. The completely conditions of symmetry constraints for KP system and MKP system are obtained through the relation to Gateaux derivatives and functional derivatives.

Key words discrete soliton equations, nonisospectral equations, Hamiltonian structure, Lax integrability, Liouville integrability, infinite conservation law, expanded integrable model, binary nonlinearization method, Hirota method, Wronskian technique, exact solution, $(2+1)$ dimensional soliton system, symmetry constraint

目 录

第一章 绪论	1
§ 1.1 引言	1
§ 1.2 可积系统	1
§ 1.3 孤立子方程的求解	4
§ 1.4 非等谱方程	9
§ 1.5 论文的主要工作	10
第二章 连续孤子方程族	12
§ 2.1 连续系统的基本概念与符号	12
§ 2.2 非线性孤子方程族及其 Hamilton 结构	16
§ 2.3 对称约束与有限维可积系统	20
§ 2.4 孤子方程族解的对合表示	28
§ 2.5 方程族的扩展可积模型	30
第三章 离散孤子方程族	34
§ 3.1 离散系统的基本概念与符号	34
§ 3.2 一族离散方程与可积辛映射	37
3.2.1 一族可积的离散方程	37
3.2.2 Lax 对的双非线性化与可积辛映射	42
3.2.3 方程族的无穷守恒律	51
§ 3.3 与 Lotka-Volterra 格相关的离散方程族	53
3.3.1 新的代数系统与离散方程族	53
3.3.2 离散 Hamilton 结构与无穷守恒律	56
3.3.3 离散方程族的可积耦合	60

§ 3.4 离散方程的正负族与可积辛映射	63
3.4.1 离散方程的正族	63
3.4.2 离散方程的负族	70
3.4.3 可积辛映射与有限维 Hamilton 系统	74
第四章 非等谱孤子方程的解	83
§ 4.1 双线性导数及其性质	83
§ 4.2 Wronskian 行列式及其性质	84
§ 4.3 非等谱 AKNS 方程族的扩展可积模型	87
§ 4.4 非等谱 AKNS 方程的双线性形式与 N -孤子解	93
§ 4.5 非等谱 AKNS 方程的双 Wronskian 解	98
§ 4.6 非等谱 AKNS 方程的约化	105
§ 4.7 非等谱 AKNS 方程的广义双 Wronskian 解	109
第五章 孤子方程解的新表示	113
§ 5.1 修正 Vakhnenko 方程 Hirota 形式的新解	113
§ 5.2 修正 Bogoyavlenskii-Schiff 方程的新 Wronskian 解	117
5.2.1 mBS 方程的三线性形式与 N -孤子解	117
5.2.2 mBS 方程的新 Wronskian 解	118
第六章 $(2+1)$ 维系统的约束与孤子方程族	126
§ 6.1 KP 系统约束与 AKNS 方程族	126
§ 6.2 KP 系统约束的推广与多元 AKNS 方程族	129
§ 6.3 KP 系统对称约束的完全形式	135
§ 6.4 MKP 系统约束与非线性 Schrödinger 方程族	140
§ 6.5 MKP 系统对称约束的完全形式	146
参考文献	153
致谢	172

第一章 绪 论

§ 1.1 引言

孤立子理论是数学物理领域的重要组成部分. 近几十年来引起国际上数学界和物理学界的充分关注, 研究工作十分活跃, 涉及范围日趋广泛. 这是因为一方面孤立子具有粒子和波的许多性质, 在自然界中具有一定的普遍性. 至今从数值计算、理论分析和物理实验等方面都已得到证实, 并且初步形成比较完整的理论体系, 许多科学领域, 如流体力学、等离子体物理、海上冲击波、超导物理、经典场论和量子场论等等都存在着孤立子以及与孤立子理论密切相关的重要现象, 而且利用孤立子理论已经成功地解释了许多物理上长期用经典理论未能得到解答的问题. 另一方面, 随着孤立子物理问题的深入研究, 孤立子的数学理论也应运而生, 并且对无穷维代数、微分几何、代数几何、拓扑学、动力系统和计算数学等数学分支产生了深远的影响. 因此, 孤立子理论的研究是数学物理领域的重要课题, 也是非线性科学的前沿课题^[1-3].

§ 1.2 可积系统

众所周知, 有限维 Hamilton 系统优美的几何理论已被建立, 其中著名的 Liouville-Arnold 定理给出了 Hamilton 系统可积的一个充分条件. 对于无限维 Hamilton 系统情形要复杂得多, 无穷多个彼此对合的首次积分的存在, 并不足以引出解的显式来. 因此, 对无穷维 Hamilton 可积系统还没有一个确切的定义, 通常采用两种可积性定