波谱分析基础

郑治真 编

地震出版社

波谱分析基础

郑治真 编

地震出版社

1983

内 容 简 介

波谱分析在信号的数字处理中占有很重要的地位。本书是波谱分析的基础读物，比较系统地介绍了波谱分析的基础知识，并以地震波为例说明它的实际应用。

本书可供地震科技人员和大专院校地震专业师生参考。其中大部分内容对有关学科的科技人员也有参考价值。

波谱分析基础

郑治真 编

地震出版社 出版

北京复兴路 63 号

朝阳区展望印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

850×1168 1/32 $9^{3}/_{4}$ 印张 242千字

1983年2月第一版 1983年2月第二次印刷

统一书号：13180·54 定价：1.30元

印数：9201—12,200

前　　言

波谱分析是无线电、光学、原子物理、地球物理等各个学科中资料处理的重要工具之一。近十年来，波谱分析在地震学中获得日益广泛的应用，它不但在前兆资料研究中不可缺少，而且在地震震源参数和地球介质性质研究中起着重要作用。为了在地震研究中普及波谱分析，特地编写了这本书。本书的主要对象是一般地震科技人员和大学生。书中首先介绍了傅里叶变换的基础知识，特别是从分布的概念介绍了波谱分析中起着重要作用的脉冲函数及脉冲函数的傅里叶变换，其次介绍了波谱数字化计算中的一系列问题，如窗函数、高频混淆、数字化误差、离散谱的频率极限、连续函数的波谱与其有限长度离散样本波谱之间关系等。本书其余几章里介绍了滤波器原理，特别介绍了因果系统函数的性质和因果系统脉冲响应的计算方法，在此基础上讨论了数字滤波器的设计和应用。书中还介绍了功率谱分析和计算波谱的快速傅里叶变换方法。最后较详细地介绍了地震震源波谱理论，其中包括爆破源波谱、布龙模式的波谱、兰德尔的震源波谱理论、有限移动源波谱和一般位错源的波谱理论。笔者在编写过程中力求做到既介绍波谱分析中必要的基础理论，又注意这些理论在实际谱分析中的应用；既介绍连续函数的波谱，又注意连续函数的谱与离散数字序列谱之间的关系。由于笔者水平所限，难免有不妥和错误之处，恳请读者提出批评指正。

本书编写过程中，胡祚春同志提供了一些有益的资料，刘元壮同志绘制了全部插图，笔者表示衷心感谢。中国科学院计算中心的魏公毅和王振华同志审阅了本书原稿，并提出了宝贵的意见，在此一并致谢。

笔　者

目　　录

第一章　傅里叶级数

傅里叶级数是波谱分析的最基础知识。早期的波谱分析就是采用傅里叶级数法，称为调和分析。即使是现在，一些简单的资料处理中也还在采用。随着电子计算机的发展，调和分析已被傅里叶变换所代替，但作为基础知识，还是有必要予以介绍的。

§1.1　以 2π 为周期的函数的傅里叶级数展开

设所研究的函数 $f(t)$ 为 t 的周期函数，其周期为 2π，即

$$f(t+2\pi)=f(t). \tag{1.1}$$

要把函数 $f(t)$ 展开为级数形式，必须选取一定的基本函数族，在傅里叶展开中采用一系列三角函数为基本函数族

$$\left.\begin{matrix} 1,\ \cos t,\ \cos 2t,\ \cos 3t,\cdots \\ \sin t,\ \sin 2t,\ \sin 3t,\cdots \end{matrix}\right\} \tag{1.2}$$

如果函数 $f(t)$ 能展开为

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt), \tag{1.3}$$

这个级数称为函数 $f(t)$ 的傅里叶级数，a_0，a_k，b_k 叫做傅里叶系数。这一节里就讨论以 2π 为周期的函数的傅里叶级数展开问题。

首先指出，基本函数族中的函数是两两正交的，即

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\sin nt\ \ dt=0, \\ &\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\cos nt\ \ dt=0,(k,n\text{ 为任意整数},k\neq n) \\ &\int_{-\pi}^{\pi}\sin kt\sin nt\ \ dt=0. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

为了考虑傅里叶级数的展开问题，先在(1.3)式中取 前 $n+1$ 项和

$$a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt), \tag{1.5}$$

如果用它做为$f(t)$的近似表示式，必定有误差

$$\varepsilon(t)=f(t)-\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\cos kt+\sum_{k=1}^{n}b_k\sin kt\right). \tag{1.6}$$

我们希望$\varepsilon(t)$在一个周期中的平均越小越好，采用"平方平均误差"的方法：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varepsilon(t)]^2dt,$$

则有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}[\varepsilon(t)]^2dt&=\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)-\sum_{k=0}^{n}a_k\cos kt-\sum_{k=1}^{n}b_k\sin kt\right|^2dt\\&=\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)]^2dt+\sum_{k=0}^{n}a_k^2\int_{-\pi}^{\pi}(\cos kt)^2dt-\\&\quad-\sum_{k=0}^{n}2a_k\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\int_{-\pi}^{\pi}(\sin kt)^2dt-\\&\quad-\sum_{k=1}^{n}2b_k\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt.\end{aligned} \tag{1.7}$$

(1.7)式中利用了正交性(1.4)式。

要用(1.5)式做为$f(t)$的近似表示式，必定希望$\int_{-\pi}^{\pi}[\varepsilon(t)]^2dt$尽可能小，而由（1.7）式看出，$\int_{-\pi}^{\pi}[\varepsilon(t)]^2dt$的大小依赖于$a_k$与$b_k$，所以我们要求$a_k$、$b_k$满足下面条件：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial a_k}\int_{-\pi}^{\pi}[\varepsilon(t)]^2dt=0,\ (k=0,1,2,\cdots,n)\\&\frac{\partial}{\partial b_k}\int_{-\pi}^{\pi}[\varepsilon(t)]^2dt=0.\ (k=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

从而得到

$$\left.\begin{aligned}&2a_k\int_{-\pi}^{\pi}(\cos kt)^2dt-2\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt=0,\ (k=0,1,2,\cdots,n)\\&2b_k\int_{-\pi}^{\pi}(\sin kt)^2dt-2\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt=0,\ (k=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\right\}$$

即

$$\left.\begin{aligned}&a_k=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt\Big/\int_{-\pi}^{\pi}(\cos kt)^2dt,\ (k=0,1,2,\cdots,n)\\&b_k=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt\Big/\int_{-\pi}^{\pi}(\sin kt)^2dt.\ (k=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\right\}\tag{1.9}$$

(1.9)式就是我们确定系数 a_k，b_k 的公式。把(1.9)式代入(1.7)式中得到

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}[\varepsilon(t)]^2dt=&\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)]^2dt-\sum_{k=0}^{n}a_k^2\int_{-\pi}^{\pi}(\cos kt)^2dt-\\&-\sum_{k=1}^{n}b_k^2\int_{-\pi}^{\pi}(\sin kt)^2dt.\end{aligned}\tag{1.10}$$

由(1.10)式看出，随着 n 的增大，$\int_{-\pi}^{\pi}[\varepsilon(t)]^2dt$ 越来越小，如果 $n\to\infty$，$\int_{-\pi}^{\pi}[\varepsilon(t)]^2dt\to 0$，那末(1.10)式就给出了 $f(t)$的在“平均收敛”意义下的傅里叶级数展开式

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos kt+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kt.\tag{1.11}$$

如果函数$f(t)$能够展开为傅里叶级数，则其系数为

$$\left.\begin{aligned}&a_k=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt\Big/\int_{-\pi}^{\pi}(\cos kt)^2dt,\ (k=0,1,2,\cdots)\\&b_k=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt\Big/\int_{-\pi}^{\pi}(\sin kt)^2dt.\ (k=1,2,\cdots)\end{aligned}\right\}$$

但是有

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}(\cos 0t)^2dt=2\pi,\\&\int_{-\pi}^{\pi}(\cos kt)^2dt=\pi,\ (k\neq 0)\\&\int_{-\pi}^{\pi}(\sin kt)^2dt=\pi,\ (k\neq 0)\end{aligned}\right\}\tag{1.12}$$

所以 a_0，a_k，b_k计算公式为

$$\left.\begin{aligned}&a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)\,d\xi,\\&a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)\cos k\xi\ d\xi,\\&b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)\sin k\xi\ d\xi.\end{aligned}\right\}\tag{1.13}$$

为了方便起见，常把 a_0 和 a_k 合并为

$$a_k=\frac{1}{\pi\delta_k}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)\cos k\xi\ d\xi,\quad \delta_k=\begin{cases}2,(k=0)\\1.(k\neq 0)\end{cases}$$

此外还需提一下，上述的积分中，不一定要从 $-\pi$ 到$+\pi$，可以从任意 c 值积分到 $c+2\pi$。

§1.2 狄里希利定理

上节的讨论中，是在 $f(t)$如果能展开为傅里叶级数的条件下推导了傅里叶系数的表示式。什么函数可以展开为傅里叶级数呢？狄里希利定理给出了这个问题的答案。

狄里希利定理 若函数 $f(t)$ 以 2π 为周期，且在每个周期里满足条件：(1)或者处处连续，或者有有限个第一类间断点；(2)具有有限个极大值或极小值。那末函数 $f(t)$可以展开为傅里叶级数，级数的数值为

$$\begin{cases}f(t), & (\text{在}f(t)\text{的连续点处})\\\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]. & (\text{在第一类间断点处})\end{cases}\tag{1.14}$$

其中 $f(t+0)$和 $f(t-0)$为函数 $f(t)$ 在间断点处的右极限和左极限。

关于函数 $f(t)$能否展开为傅里叶级数，有几种不同的定理，我们这里只给出在“平均收敛”意义下的狄里希利定理，且不予以证明(菲赫金哥尔茨，1957)。

§1.3 例

这一节里给出三个以 2π 为周期的函数的傅里叶级数展开的例子。在举例之前，先考虑几种特殊情形。

若 $f(t)$ 为偶函数，由傅里叶系数表示式 (1.13) 式可见 $b_k=0$，所以偶函数的傅里叶级数只含有余弦项

$$\left.\begin{aligned}&f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kt,\\&a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\xi)\cos k\xi\,d\xi,\ (k\neq0)\\&a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(\xi)d\xi.\end{aligned}\right\}\tag{1.15}$$

若 $f(t)$为奇函数，由(1.13)式看出 $a_k=0$，奇函数的傅里叶级数展开中只含有正弦项：

$$\left.\begin{aligned}&f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kt,\\&b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\xi)\sin k\xi\,d\xi.\end{aligned}\right\}\tag{1.16}$$

若 $f(t)$的前半周期与后半周期满足下面关系：

$$f(t)=-f(t+\pi),$$

根据(1.13)式可算出，$a_0=a_{2k}=b_{2k}=0$，只有奇数项系数 a_{2k+1}，b_{2k+1} 不为零，其级数展开式为

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}[a_{2k+1}\cos(2k+1)t+b_{2k+1}\sin(2k+1)t].\tag{1.17}$$

例 1
$$E(t)=\begin{cases}E_0\sin t, & [2m\pi\leqslant t\leqslant(2m+1)\pi]\\ 0. & (\text{其它})\end{cases} \tag{1.18}$$

$E(t)$的形状如图 1.1。其中 E_0 为常数。

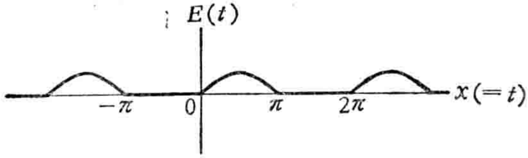

图 1.1　$E(t)$形状

按照(1.13)式计算系数 a_k，b_k：

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}E(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}E_0\sin\xi\,d\xi=\frac{E_0}{\pi},$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}E(\xi)\cos k\xi\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}E_0\sin\xi\cos k\xi\,d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{E_0}{2}[\sin(k+1)\xi+\sin(1-k)\xi]d\xi;$$

对 a_k 的进一步计算需考虑 $k=1$ 和 $k\neq1$ 两种情况：

$$a_1=\frac{E_0}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin 2\xi\,d\xi=0,$$

$$a_k=\frac{E_0}{2\pi}\int_0^{\pi}[\sin(1+k)\xi+\sin(1-k)\xi]d\xi$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2E_0}{\pi(1-k^2)}, & (k\text{ 为偶数})\\ 0; & (k\text{ 为奇数})\end{cases}$$

对 b_k 有

$$b_1=\frac{E_0}{2\pi}\int_0^{\pi}[1-\cos 2\xi]d\xi=\frac{E_0}{2},$$

$$b_k=\frac{E_0}{2\pi}\int_0^{\pi}[\cos(1-k)\xi-\cos(1+k)\xi]d\xi=0;$$

因此傅里叶级数为

$$E(t)=\frac{E_0}{\pi}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2E_0}{[1-(2j)^2]}\cos 2jt+\frac{E_0}{2}\sin t.$$

例 2
$$f(t)=\begin{cases}1, & [2m\pi<t<(2m+1)\pi] \\ -1. & [(2m-1)\pi<t<2m\pi]\end{cases} \tag{1.19}$$
这是无线电中的矩形波(见图 1.2)。

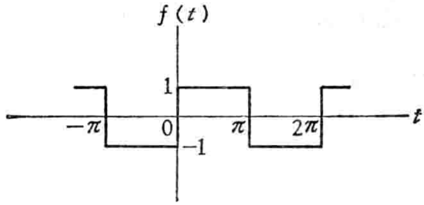

图 1.2 矩形波

$f(t)$为奇函数，只需计算 b_k
$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\ k\xi\ d\xi=\begin{cases}0, & (k\ 为偶数) \\ \dfrac{4}{k\pi}. & (k\ 为奇数)\end{cases}$$
所以矩形波的傅里叶级数为
$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\cdots\right).$$
例 3 锯齿波
$$f(t)=1-\frac{t-2m\pi}{\pi},\ [2m\pi<t<(2m+2)\pi\,(m为整数)] \tag{1.20}$$
$f(t)$为奇函数，只需计算正弦项的系数 b_k
$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(1-\frac{\xi}{\pi}\right)\sin\ k\xi\ d\xi=\frac{2}{k\pi},$$

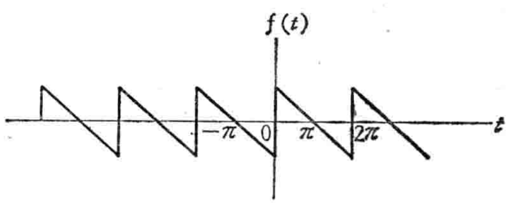

图 1.3 锯齿波

结果为

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1}+\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\sin 3t}{3}+\cdots\right).$$

§1.4 任意周期值的函数的傅里叶级数展开

设所研究的函数 $f(t)$ 以 $2T$ 为周期，即

$$f(t+2T)=f(t). \tag{1.21}$$

采用 x 为新的自变量

$$x=\frac{\pi}{T}t, \tag{1.22}$$

函数 $f(t)=f\left(\frac{T}{\pi}x\right)$ 仍以 2π 为周期，从而可以把 §1.1 的结果推广于任意周期值的函数。取

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x,\ \cdots$$
$$\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \cdots,$$

即

$$1,\ \cos\frac{\pi}{T}t,\ \cos\frac{2\pi}{T}t,\ \cos\frac{3\pi}{T}t,\ \cdots$$
$$\sin\frac{\pi}{T}t,\ \sin\frac{2\pi}{T}t,\ \sin\frac{3\pi}{T}t,\ \cdots,$$

$f(t)$ 的傅里叶级数为

$$f\left(\frac{T}{\pi}x\right)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

即

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{T}t+b_k\sin\frac{k\pi}{T}t\right). \tag{1.23}$$

其傅里叶系数公式为

$$\left.\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{T}{\pi}x\right)dx=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(\xi)\,d\xi\\
a_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{T}{\pi}x\right)\cos kx\,dx=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(\xi)\cos\frac{k\pi}{T}\xi\,d\xi\\
b_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{T}{\pi}x\right)\sin kx\,dx=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(\xi)\sin\frac{k\pi}{T}\xi\,d\xi
\end{aligned}\right\} \tag{1.24}$$

像 §1.3 中讨论的一样，偶函数的傅里叶级数只含有余弦项，奇函数的傅里叶级数只含有正弦项。

§1.5 一定区间上的函数的傅里叶级数展开

在很多情况下，我们所研究的函数 $f(t)$ 只在某个区间上有值，例如在地震记录图中截取 P 波段进行研究，假定 P 波段长度为 $2T$，我们可以把 $f(t)$ 以 $2T$ 为周期延拓出去，然后对延拓的 $f(t)$ 进行傅里叶级数展开。这样就可按 §1.4 方法进行展开。

为了讨论方便，以区间 $(-\pi,\ \pi)$ 上的函数 $f(t)=t$ 为例，展开为傅里叶级数。

要把 $f(t)=t \quad (-\pi<t<\pi)$ 展开为傅里叶级数，首先需把它在整个区间上延拓，其形状如图 1.4，虚线表示延拓部分。这个函数为奇函数，所以只包含正弦项。

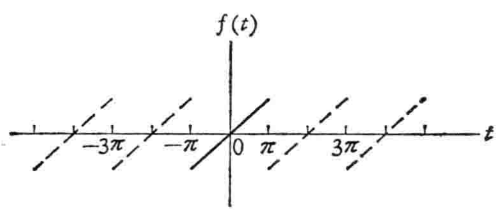

图 1.4 $f(t)=t \quad (-\pi<t<\pi)$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\xi)\sin k\xi\, d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\xi\sin k\xi\, d\xi$$

$$=\frac{2}{k^2\pi}\left[\sin k\xi-k\xi\cos k\xi\right]_0^{\pi}=\frac{2}{k}(-1)^{k+1},$$

结果为

$$f(t)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kt.$$