随机信号与系统习题解答及仿真程序集

Suiji xinhao yu xitong xiti jieda
Ji Fangzhen Chengxuji

潘仲明　编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

随机信号与系统
习题解答及仿真程序集

潘仲明　编著

国防工業出版社

·北京·

内 容 简 介

本书是研究生教材《随机信号与系统》的配套参考书，由概率与随机过程导论、多维高斯过程、参数估计理论、数学模型辨识、谱估计与小波分析、最优滤波与状态估计等六章组成。每章由三部分组成：第一部分列出了教材《随机信号与系统》的主要知识点，这部分内容可作为工具书或课堂笔记使用；第二部分给出了习题解答和 MATLAB /Simulink 算法实现与系统仿真程序；第三部分补充了部分基本概念习题和相关数学公式证明。在培养初学者习惯性地应用正确的数学方法去分析和解决工程实际问题方面，本书必将起到抛砖引玉的作用。

本书作为国防科技大学的研究生 MOOC 课程（Massive Open Online Courses）和国际一流研究生课程体系建设教材，可供从事工程测试、目标探测、无损检测、系统辨识、装备故障诊断、过程控制和随机信号处理等技术专题研究的研究生、教师和科技人员进修参考。

图书在版编目（CIP）数据

随机信号与系统习题解答及仿真程序集/潘仲明编著. —北京：国防工业出版社，2014. 5
ISBN 978-7-118-09453-4

Ⅰ. ①随… Ⅱ. ①潘… Ⅲ. ①随机信号 - 信号理论②随机信号 - 信号分析 Ⅳ. ①TN911. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 082665 号

※

国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048）
北京嘉恒彩色印刷有限责任公司
新华书店经售

*

开本 710 × 1000 1/16 **印张** 16 **字数** 332 千字
2014 年 5 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—2500 册 **定价** 40. 00 元

国防书店：（010）88540777 发行邮购：（010）88540776
发行传真：（010）88540755 发行业务：（010）88540717

前　言

目前，国内许多高校都为工科专业研究生开设了“随机信号与系统”这一数学技术课程。作为本科生课程“信号、系统与控制基础”的后续课程，“随机信号与系统”这门课程的定位有两个方面：其一，定位为应用概率与随机过程理论及其他常用数学工具来解决工程测试、微弱信号检测和系统辨识问题的方法论课程。通过课程学习，使学员熟练掌握信号检测与参数估计、时间序列建模、谱估计与小波分析、自适应滤波与状态估计理论等专题所涉及的数学知识、数学方法和数学工具，培养学员的科学思维能力和对数学的持续兴趣。其二，定位为培养工科研究生创新能力的专业技术理论课程。通过课程学习，使学员粗略了解与本课程相关的技术理论的发展动态，透彻理解“随机信号与系统”的基本概念和基本理论方法，熟练应用 MATLAB/ Simulink 软件工具来编写各种算法程序和系统仿真程序。本课程的总要求是：通过课堂讲授和课外作业，使学员初步具备应用正确的数学方法从实际问题中凝炼并解决科学问题的能力。为此，作者在《随机信号与系统》教材中，不仅编配了演绎计算和公式证明方面的习题，同时也编配了大量的算法实现与系统仿真习题，以进一步激发学员的创新思维、创新意识和创新观念。

十来年的教学实践表明，一些基础好的研究生基本上能够独立完成本教材编配的课外作业，但也有部分研究生面对一些习题总感到无从下手，或者即便完成了这些习题，也不知道答案是否正确，因此，历届研究生都希望有一本习题解答与仿真程序集以供学习参考。考虑到作者所在单位每学期选修本课程的研究生仅有二三十人，任课教师完全可以通过课外答疑或课堂讲评作业的方式来解决这一问题，故而一直未着手进行这项工作。2013 年初，本课程被列入国防科技大学第一批研究生 MOOC 课程(Massive Open Oline Courses)建设计划；原教材《随机信号分析与参数估计理论》的修订版——《随机信号与系统》作为国防科技大学的国际一流研究生课程体系建设教材，被推荐为“庆祝国防科技大学六十周年华诞系列专著”，由国防工业出版社出版。这样一来，使用本教材的学员就不仅仅局限于作者所在单位，选修本课程的人数也必然随之大幅度增加，原先的教学模式将不再适合于这种可能出现的情况。为了帮助初学者系统地掌握随机信号与系统学科的基本理论方法与技术手段，帮助任课教师克服教学过程中可能遇到的困难，作者编写了《随机信号与系统习题解答及仿真程序集》，作为研究生教材《随机信号与系统》的配套参考书。

本书由概率与随机过程导论、多维高斯过程、参数估计理论、数学模型辨识、谱

估计与小波分析、最优滤波与状态估计等六章组成。每章包含三部分内容:第一部分是知识要点;第二部分是习题解答和基于 MATLAB /Simulink 的算法实现与系统仿真程序;第三部分是补充习题。在第一部分中,列出了《随机信号与系统》各章的主要知识点,对书中存在的疏漏或笔误之处,在此均一一予以补充或更正,故这部分内容既可视为本课程的课堂笔记,又可视为教材的注释与校勘;在第二部分中,尽量采用 MATLAB /Simulink 中的基本语句而不是功能函数来编写算法实现与系统仿真程序,同时这些程序都是未经优化的原始程序,以便于初学者能够直观地了解基于 MATLAB/Simulink 软件工具的各种算法和系统仿真程序的实现步骤,进而更快地掌握 MATLAB/Simulink 的编程方法;在第三部分中,补充了教材《随机信号与系统》各章所涉及的基本概念、演绎计算和数学公式证明。补充这部分习题的主要目的是:引导初学者复习相关的数学基础知识,积极主动地思考教材中各种理论方法的具体含义,同时也为授课教师出期末试题提供更多的选择。

作者建议,将学生在课外时间完成的 MATLAB/Simulink 算法实现和系统仿真程序计入期末考试成绩,占总成绩 40%;期末卷面(基本概念、演绎计算和公式证明)成绩占总成绩 60%。不言而喻,在《随机信号与系统习题解答及仿真程序集》出版之后,必将影响任课教师评定学生学习成绩的客观性。然而,倘若任课教师在批改计算机仿真作业时,不仅考查算法实现与系统仿真程序的正确性,同时也考查这些程序是否符合通用的软件规范,是否结合具体问题对程序的运行条件和运行结果进行必要的讨论,是否指出原算法的优缺点和进一步研究的路径等,那么公正地给出各个学生的学习成绩并非一件难事。

在近十年来国内高校的硕博士毕业论文中,数学公式与实验验证环节完全脱节已经成为一种普遍存在的奇特现象。作者希望,在训练初学者习惯性地应用正确的数学方法去分析和解决工程实际问题方面,本书的习题解答、算法实现与系统仿真程序能够起到抛砖引玉的作用;在数学与工程技术之间,本套教材能够架设起一条坚固的“桥梁”而不是虚幻的“彩虹”。最后,引用《随机信号与系统》前言来表达作者编著本书的初衷:

使初学者初步具备从自然科学和工程技术描述的复杂系统中,提炼出简练而又符合现实的随机信号模型或随机系统模型的能力,进而选用恰当的信号分析与最优估计算法,来更好地解决工程测试、信号检测和系统辨识等实际问题。

作 者

2014 年 3 月 10 日

于国防科技大学

目　录

第一章　概率与随机过程导论

本章复习概率与随机过程的基本理论，重点复习随机变量及其函数的概率密度、随机变量矩和特征函数的计算方法、随机变量不相关、正交与独立性的基本概念、随机信号相关函数和功率谱密度的估计、线性系统对随机信号的响应等内容。

1.1　基本知识点

概率论的基本内容包括：随机事件和随机变量的基本概念、随机变量及其函数的概率分布、随机变量的数学期望、矩和特征函数；随机过程理论的基本内容包括：平稳随机过程、各态历经过程、总体相关函数、样本相关函数、功率谱密度。

1.1.1　概率论

概率论是分析随机现象统计规律性的一门应用数学学科。从概率的观点出发，可把工程上存在的各种现象分为两类：一类称作确定性现象，它是指在一定条件下必然发生或必然不发生的现象；另一类称为随机现象，它指的是在一定条件下可能发生、也可能不发生的现象。尽管应用概率论来分析工程问题所得到的结果是否与物理现实相吻合，是无法被“证明”的，但却是可以接受的。

一、随机事件的概率

概率论与随机实验密切相关，每个实验都可由一至三个元素组成的集合 $\{\Omega,\Sigma,P\}$（Probability space）来定义。其中：

第一个子集 Ω 表示基本事件的集合（Sample description space），子集中的元素是每次实验中可能发生的某一结果；

第二个子集 Σ 表示复合事件的集合（σ - field of events），每个事件在实验中是否发生依赖于实验的执行情况，带有随机性；

第三个元素 P 是定义事件 $A\in\Sigma$ 上的一个实值函数 $P(A)$，它给集合 Σ 中的每一个随机事件都指定了一个概率，用于表示可能发生该随机事件的测度（Probability measure）。

随机事件（Random events）：在随机实验中，每一个可能出现的结果，称为随机事件。

定理 1 -1（概率论公理，Axiomatic definition of probability）：设随机实验的样本空间为 Ω，且赋予 $A\in\Sigma$ 一个实数值 $P(A)$。$\forall k,m\in Z$（整数域），若该实数满足

下式：

$$\begin{cases} P(\Omega) = 1; \quad P(A) \geqslant 0; & A \in \Sigma \\ P(\cup A_k) = \sum P(A_k), A_k \in \Sigma \text{ 且 } A_k A_l = \Phi, & (k \neq l) \end{cases} \tag{A1 - 1}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

条件概率(Conditional probability)：设两个事件 $A, B \in \Sigma$，且 $P(A) > 0$，则在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率为

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \tag{A1 - 2}$$

条件概率与前面定义的基本概率具有相同的性质：

$$\begin{cases} P(\Omega \mid A) = 1; \quad P(B \mid A) \geqslant 0; & A, B \in \Sigma \\ P(\cup B_k \mid A) = \sum P(B_k \mid A), B_k \in \Sigma \text{ 且 } B_k B_m = \Phi, & (k \neq m) \end{cases} \tag{A1 - 3}$$

其中 $k, m \in Z$。

独立事件(Independence events)：在随机实验 $\{\Omega, \Sigma, P\}$ 中，$\forall A, B \in \Sigma$，若有

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{A1 - 4}$$

则称这两个事件互相独立(或统计独立)。

定义：在随机实验 $\{\Omega, \Sigma, P\}$ 中，对于一组事件 $A_k (k = 1, 2, \cdots, n) \in \Sigma$，如果满足

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega \quad \text{且} \quad A_k \cap A_m = \Phi, \quad (k \neq m; k, m \leqslant n)$$

则称 $A_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ 为 Ω 的一个划分。

定理 1 - 2(全概率公式, Total probability theorem)：在随机实验 $\{\Omega, \Sigma, P\}$ 中，设一组事件 $A_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ 为 Ω 的一个划分，则 $\forall B \in \Sigma$，都有

$$B = \Omega \cup B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k B; \quad A_k B \cap A_l B = \Phi \quad (k \neq l) \tag{A1 - 5}$$

如果进一步假设 $P(A_k) > 0$，就有

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B \mid A_k) \tag{A1 - 6}$$

并称之为全概率公式。

定理 1 - 3(贝叶斯公式, Bayes' theorem)：在随机实验 $\{\Omega, \Sigma, P\}$ 中，设一组事件 $A_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(A_k) > 0$。若已知 $P(A_k)$ 和 $P(B \mid A_k)$，且 $\forall B \in \Sigma$，都有 $P(B) > 0$，则下式成立：

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k B)}{P(B)} = \frac{P(A_k) P(B \mid A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B \mid A_k)} \tag{A1 - 7}$$

二、概率分布函数与概率密度函数

随机变量(Random variables):设随机实验的样本空间为$\Omega=\{\zeta\}$,如果对于每一个样本点ζ都有一个实数X_ζ与之对应,则称$X(\zeta)$为随机变量。

概率分布函数(Probability distribution function, PDF):设$X(\zeta)$是随机变量,x为任意实数,则称函数$P_X(x)$是X的一元(概率)分布函数,记为

$$P_X(x)=P\{\xi:X\leqslant x\}=P(X\leqslant x),\quad -\infty<x<\infty \tag{A1-8}$$

式中,X表示基本事件$\zeta\in\Omega$的实值函数$X(\zeta)$;$X\leqslant x$表示事件$A=\{\zeta:X(\zeta)\leqslant x\}\in\Sigma$;数值$P_X(x)$表示赋予事件$A$的概率,即$P_X(x)=P(A)$。

由于概率分布函数的值就是对应事件的概率,根据定理1-1,必有

$$\begin{cases}P_X(-\infty)=P(\{\zeta:X\leqslant-\infty\})=P(\Phi)=0\\ P_X(+\infty)=P(\{\zeta:X\leqslant+\infty\})=P(\Omega)=1\\ P_X(x+\mathrm{d}x)=P(\{\zeta:X\leqslant x\}\cup\{\zeta:x<X\leqslant x+\mathrm{d}x\})\\ \qquad\qquad=P(\{\zeta:X\leqslant x\})+P(\{\zeta:x<X\leqslant x+\mathrm{d}x\})\geqslant P_X(x)\end{cases} \tag{A1-9}$$

由式(A1-9)可见,分布函数是单调不减的函数,且有$0\leqslant P_X(x)\leqslant 1$。随机变量取某一数值的概率,或在某个区间上取值的概率,都可以用分布函数来表示。例如

$$\begin{cases}P(\{\zeta:X=x\})=P_X(x)-P_X(x^-)\\ P(\{\zeta:X>x\})=1-P_X(x)\\ P(\{\zeta:x_0\leqslant X\leqslant x_1\})=P_X(x_1)-P_X(x_0^-)\\ P(\{\zeta:x_0<X<x_1\})=P_X(x_1^-)-P_X(x_0)\end{cases}$$

式中,上标“-”表示从数轴的左边趋于某一数值。

概率密度函数(Probability density function, pdf):设$P_X(x)$是连续随机变量X的分布函数,若存在非负可积的函数$p_X(x)$,使得

$$P_X(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}p_X(u)\,\mathrm{d}u \tag{A1-10}$$

则称$p_X(x)$为X的一元概率密度函数,简称密度函数。

显然,密度函数$p_X(x)$满足下列条件:

$$p_X(x)\geqslant 0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}p_X(x)\,\mathrm{d}x=1$$

且可导出如下关系:

$$P(a<X\leqslant b)=P_X(b)-P_X(a)=\int_a^b p_X(x)\,\mathrm{d}x \tag{A1-11}$$

式中,a和b为任意常数。

联合概率分布函数(Joint distribution function):设 $X(\zeta)$ 和 $Y(\zeta)$ 是两个随机变量,x 和 y 为任意实数,如果

$$P_{XY}(x,-\infty)=P_{XY}(-\infty,y)=0;\quad P_{XY}(+\infty,+\infty)=1$$

则称函数 $P_{XY}(x,y)$ 为二元联合概率分布函数,简称二元分布函数,记为

$$\begin{aligned}P_{XY}(x,y)&=P(\{\zeta:X\leqslant x\},\{\zeta:Y\leqslant y\})\\&=P(X\leqslant x,Y\leqslant y)\end{aligned}\tag{A1-12}$$

联合概率密度函数(Joint probabilisty density function):设 $P_{XY}(x,y)$ 是连续随机变量 X 和 Y 的分布函数,x 和 y 为任意实数,如果存在非负可积函数 $p_{XY}(x,y)$,使得

$$p_{XY}(x,y)=\frac{\partial^2 P_{XY}(x,y)}{\partial x\partial y}\tag{A1-13}$$

或者,对于任意常数 a,b,c 和 d,下式成立:

$$P(a<X\leqslant b,c<Y\leqslant d)=\int_a^b\int_c^d p_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

则称 $p_{XY}(x,y)$ 为二元联合概率密度函数,简称二元密度函数。

边缘分布函数(Marginal distribution function)**与密度函数**:连续随机变量 X 和 Y 的边缘分布函数规定为

$$\begin{cases}P_X(x)=P_{XY}(x,+\infty)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}p_{XY}(u,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u\\P_Y(y)=P_{XY}(+\infty,y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty}p_{XY}(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{cases}\tag{A1-14}$$

由此可得到一元边缘密度函数的计算公式,即

$$\begin{cases}p_X(x)=\dfrac{\mathrm{d}P_X(x)}{\mathrm{d}x}=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}p_{XY}(x,v)\,\mathrm{d}v\\p_Y(y)=\dfrac{\mathrm{d}P_Y(y)}{\mathrm{d}y}=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}p_{XY}(u,y)\,\mathrm{d}u\end{cases}\tag{A1-15}$$

随机变量的条件概率(Marginal density function):设连续随机变量 X 和 Y 的二元密度函数为 $p(x,y)$,当 $X=x$ 时,$Y\leqslant y$ 的条件概率密度函数可表示为

$$p(y\mid x)=\frac{p(x,y)}{p(x)}\tag{A1-16}$$

注意,这里用同一个符号 $p(\cdot)$ 表示了三个不同随机变量的函数。只要不会发生混淆,可采用这种省略下标的符号来表示概率密度函数或概率分布函数。

分布律(Distribution rule):设随机变量 X 取各个可能值 $x_k(k=1,2,\cdots)$ 的概率为

$$P(X=x_k)=p_k,\qquad(k=1,2,\cdots)\tag{A1-17}$$

根据概率论公理，p_k 满足下列两个条件：

$$p_k \geqslant 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

通常将式(A1－17)称为随机变量 X 的分布律。分布律还可用下式表示：

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix} \qquad \text{(A1 - 18)}$$

二项式分布(Binomial distribution)：若随机变量 X 的分布函数为

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \qquad (k = 0,1,\cdots,n) \qquad \text{(A1 - 19)}$$

其中 p 为事件 $A = \{\zeta : X = k\}$ 出现的概率，则称 X 服从参数为 n,p 的二项式分布，记为 $X \sim B(n,p)$。二项式分布的系数由下式给出：

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \overset{\text{def}}{=} \binom{n}{k} \qquad (0! = 1)$$

在独立实验序列中，事件 A 在每次实验中出现的概率为 p，不出现的概率为$q = 1 - p$，则在 n 次实验中事件 A 恰好出现 k 次的概率可用式(A1－19)来表示。特别的，当 $n = 1$ 时，二项式分布变为(0－1)分布，即

$$P(X = k) = p^k (1 - p)^{n-k} \qquad (k = 0,1) \qquad \text{(A1 - 20)}$$

定理1－4(泊松定理，Poisson Law)：设参数 $\lambda > 0$，当正整数 n 很大时，令 $np = \lambda$，就有

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (k = 1,2,\cdots,n)$$

从泊松定理可以引出一个近似式，当 n 很大、p 很小，且 $np = \lambda$ 大小适中时，可得到一个很有用的近似公式：

$$C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (k = 1,2,\cdots) \qquad \text{(A1 - 21)}$$

当 $n \geqslant 100$，$np \leqslant 10$ 时，近似效果很好；当 $n \geqslant 20$，$np \leqslant 5$ 时，近似效果也是可以接受的。

泊松分布(Poisson distribution)：对于任意的参数 $\lambda > 0$，如果随机变量 X 的分布律为

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (k = 0,1,\cdots) \qquad \text{(A1 - 22)}$$

则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X \sim P(\lambda)$。

标准正态(高斯)分布(Standard normal distribution)：若随机变量 X 的密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad \text{(A1 - 23)}$$

则称 X 服从标准正态分布，或称标准高斯（Gaussian）分布，记为 $X\sim N(0,1)$。

正态（高斯）分布（Normal distribution）：若随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \qquad (A1-24)$$

则称 X 服从正态分布，或高斯分布，记为 $X\sim N(\mu_x,\sigma_x)$。

均匀分布（Uniform distribution）：若随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \qquad (A1-25)$$

则称 X 服从均匀分布，记为 $X\sim U(a,b)$。

指数分布（Exponential distribution）：对于任意的参数 $\lambda>0$，若随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases} \qquad (A1-26)$$

则称 X 服从指数分布，记为 $X\sim E(\lambda)$。

威布尔分布（Weibull distribution）：若随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{t_0}(x-r)^{n-1}\exp\left[-\dfrac{(x-r)^n}{t_0}\right], & x\geqslant r\\ 0, & x<r\end{cases} \qquad (A1-27)$$

式中，$n>0$，$t_0>0$，r 为任意实数，则称 X 服从威布尔分布，记为 $X\sim W(n,r,t_0)$。

当 $n=1$，$r=0$ 时，威布尔分布变成参数为 $\lambda=1/t_0$ 的指数分布。威布尔分布在工程实践中有广泛的应用，例如，在分析系统可靠性时，它是最常用的分布函数之一。

三、随机变量的独立性

独立变量（Independent random variables）：设二元连续随机变量为 X 和 Y，若对于任意的 x 和 y，都有

$$P(x,y)=P(X\leqslant x,Y\leqslant y)=P(X\leqslant x)\cdot P(Y\leqslant y) \qquad (A1-28)$$

则称随机变量 X 和 Y 相互独立。

定理 1-5 设两个连续随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为 $p(x,y)$，若事件 $\{\xi:x<X\leqslant x+dx\}$ 和 $\{\xi:y<Y\leqslant y+dy\}$ 相互独立，则有

$$p(x,y)=p(x)\cdot p(y) \qquad (A1-29)$$

式中，$p(x)$ 和 $p(y)$ 分别为连续随机变量 X 和 Y 的概率密度函数。

推论：设事件 $\{\xi:x<X\leqslant x+dx\}$ 和 $\{\xi:y<Y\leqslant y+dy\}$ 相互独立，则有

$$p(y\mid x)=p(y) \qquad (A1-30)$$

对于多维随机变量，常用随机变量 $Z_i(i=1,2,\cdots,n)$ 组成的列向量 z 来表示，

相应的 n 维概率分布函数定义为

$$P(\boldsymbol{z}) = P(Z_1 \leqslant z_1, Z_2 \leqslant z_2, \cdots, Z_n \leqslant z_n)$$

式中,$P(\boldsymbol{z})$是实数。n 维列向量 $\boldsymbol{z}$ 的概率密度函数定义为

$$p(\boldsymbol{z}) = \frac{\partial^n P(\boldsymbol{z})}{\partial z_1, \cdots, \partial z_n}$$

在此,$p(\boldsymbol{z})$是标量,它与由 n 个一阶偏微分$\partial P(\boldsymbol{z})/\partial z_i$ 所构成的行向量是不同的。

若将随机列向量 $\boldsymbol{Z}$ 分为两组 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$,则有

$$p(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y};\quad p(\boldsymbol{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

这里的积分是多重积分。如果进一步将条件概率密度定义为

$$p(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})/p(\boldsymbol{x}) \tag{A1 - 31}$$

那么,当随机向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 互相独立时,就有

$$p(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{y}) \tag{A1 - 32}$$

注意,这并不意味着随机向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 中的各个分量之间是相互独立的。

四、随机变量函数的概率密度函数

随机变量函数(Functions of random variable):在随机实验$\{\Omega,\Sigma,P\}$中,设函数

$$Y = h(X)$$

如果 $\forall \zeta \in \Omega, X(\zeta) \in \Sigma$ 的值域是实数集合 R, $\forall x \in \mathrm{R}$,实函数 $h(x)$均为有限值,则 $h[X(\zeta)]$是由 $X(\zeta)$和 $h(x)$共同规定的实数。这个数

$$Y(\zeta) = h[X(\zeta)] \tag{A1 - 33}$$

就是随机变量 Y 的值,并称 Y 为随机变量 X 的函数。因此,$h(X)$的定义域是所有实验结果的集合 Ω,而 $h(x)$的定义域是一实数集合 R。

与随机变量的定义一样,对于给定的实数 y,通常用$\{\zeta:Y(\zeta)\leqslant y\}$表示 $Y(\zeta)\leqslant y$ 的所有事件的集合,其概率就是随机变量 Y 的分布函数:

$$P_Y(y) = P(\{\zeta:Y \leqslant y\}) = P(\{\zeta:h[X(\zeta)] \leqslant y\}) \tag{A1 - 34}$$

其概率密度函数可表示为

$$p_Y(\{h[X(\xi)] \leqslant y\}) = \frac{\mathrm{d}P_Y(y)}{\mathrm{d}y}$$

定理 1 - 6 设一维随机变量 X 的密度函数为 $p_X(x)$,如果随机变量 Y 的取值由单调函数 $h(x)$确定,即 $y = h(x)$,那么随机变量 Y 的密度函数可表示为

$$p_Y(y) = p_X[h^{-1}(y)] \cdot \left|\frac{\mathrm{d}x(y)}{\mathrm{d}y}\right| = \frac{1}{|\mathrm{d}y/\mathrm{d}x|} \cdot p_X[x(y)] \tag{A1 - 35}$$

推论:如果函数 $y = h(x)$不是严格单调的,只要分别考虑 $h(x)$在 x 区间上的

取值，使得在每个子区间 I_m 上 $h(x)$ 都是严格单调的，则可根据式(A1－35)分别计算各个单调子区间 $I_m(m=1,2,\cdots)$ 上的密度函数 $p^{(m)}(y)$，然后对这些密度函数 $p^{(m)}(y)$ 进行求和，就可得到随机变量 Y 的密度函数：

$$p_Y(y) = \sum_m p^{(m)}(y) = \sum_m \frac{1}{|\mathrm{d}y/\mathrm{d}x|_m} \cdot p_X[x_m(y)] \qquad (\text{A1}-36)$$

定理1－7 假设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 均是 n 维随机向量，且二者的取值存在唯一的逆变换 $\boldsymbol{x}=h^{-1}(\boldsymbol{y})$，则有

$$p_Y(\boldsymbol{y}) = \left|\det\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)\right| \cdot p_X[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})] \qquad (\text{A1}-37\text{a})$$

或者

$$p_Y(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{|\det(\partial \boldsymbol{y}/\partial \boldsymbol{x})|} \cdot p_X[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})] \qquad (\text{A1}-37\text{b})$$

其中 $\det(\partial \boldsymbol{x}/\partial \boldsymbol{y})$ [或 $\det(\partial \boldsymbol{y}/\partial \boldsymbol{x})$] 称为变换 $\boldsymbol{y}=h(\boldsymbol{x})$ 的雅可比行列式：

$$\det\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{y}}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

$$\text{或 } \det\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

推论：假设某些或全部的 $\boldsymbol{y}_0$ 值，方程 $\boldsymbol{y}=h(\boldsymbol{x})$ 有多个解 $x_m(m=1,2,\cdots)$，而 $\boldsymbol{x}_0=\{x_m\}$ 是该方程的解集，则包含 $\boldsymbol{x}_0$ 的区域 $\mathrm{d}V_x$ 是由 $\boldsymbol{y}_0$ 处的一个微分增量诱导产生的多个单调子区域所构成的。因此，可先算出方程 $\boldsymbol{y}=h(\boldsymbol{x})$ 对应于某个解 x_m 的各个单调子区域的概率密度 $p^{(m)}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})]$，再计算各个单调子区域的概率密度 $p^{(m)}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})]$ 之和，即可导出类似于式(A1－36)的结果：

$$p(\boldsymbol{y}) = \sum_m p^{(m)}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})] = \sum_m \frac{p[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})]_m}{|\det[(\partial \boldsymbol{y}/\partial \boldsymbol{x})]_m|} \qquad (\text{A1}-38)$$

式中，下标“m”表示当给定 $\boldsymbol{y}$ 值时，方程 $\boldsymbol{y}=h(\boldsymbol{x})$ 的所有解 $x_m(m=1,2,\cdots)$。

在变换 $\boldsymbol{y}=h(\boldsymbol{x})$ 中,可能会出现 $\boldsymbol{y}$ 的维数小于 $\boldsymbol{x}$ 的维数的情况。这时应当选择附加变量 z 补充到 $\boldsymbol{y}$ 中,使 $(\boldsymbol{y},z)$ 的维数与 $\boldsymbol{x}$ 的维数相同,然后,根据边缘函数计算公式求出变量 $\boldsymbol{y}$ 的密度函数,即

$$p(\boldsymbol{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{z} \tag{A1-39}$$

其中,积分是多重的(等于 z 的维数)。

五、数学期望、矩和特征函数

数学期望(Expected value):随机变量 X 的数学期望规定为

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x \tag{A1-40}$$

式中,$p(x)$ 是 X 的概率密度。

式(A1-40)的具体含义是:将落在区间 $(x,x+\mathrm{d}x]$ 中的 $X(\xi)$ 值进行加权求和,权重为

$$P(\{\zeta:x < X \leqslant x+\mathrm{d}x\}) = p(x)\mathrm{d}x$$

表示 $X(\zeta)$ 值落在区间 $(x,x+\mathrm{d}x]$ 中的概率。

当 X 是离散或混合型随机变量时,分布函数不连续。在 $P(x)$ 不连续点 x_i 上的概率密度可表示为

$$p(x_i) = P_i \cdot \delta(x-x_i)$$

故有

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp^C(x)\mathrm{d}x + \sum_i x_i P_i \tag{A1-41}$$

式中

$$p^C(x) = \frac{\mathrm{d}P^C(x)}{\mathrm{d}x}$$

表示分布函数 $P(x)$ 中连续部分的导数。对于离散随机变量的情况,只要令式(A1-41)右边的第一项为零即可。

随机变量 X 的函数 $Y=h(X)$ 的数学期望可表示为

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} yp(y)\mathrm{d}y$$

倘若仅仅对数学期望 $E(Y)$ 感兴趣,还可按下式计算随机变量 Y 期望值,即

$$E[Y] = E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)p(x)\mathrm{d}x \tag{A1-42}$$

原点矩(Moments):设实随机变量 X 的概率密度为 $p(x)$,其 n 阶原点矩(nth moment of X)规定为

$$\mu_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x)\mathrm{d}x \tag{A1-43}$$

一阶矩(First order moment)μ_1 就是随机变量 X 的数学期望,记为 $\mu(X)$;二阶矩(Second order moment)μ_2 称为随机变量 X 的均方值(Mean square value),记为 $\psi^2(X)$,它可视为随机变量 X 的平均功率。

中心矩(Central moments):设实随机变量 X 的分布密度为 $p(x)$,其 n 阶中心矩(n th central moment of X)规定为

$$\gamma_n = E\{[X-\mu(X)]^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty}[x-\mu(X)]^n p(x)\mathrm{d}x \tag{A1-44}$$

特别地,将二阶中心矩(Second order central moment)

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= \gamma_2 = E\{[X-\mu(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - \mu^2(X) \\ &= \psi^2(X) - \mu^2(X) \overset{\text{def}}{=} \sigma^2(X)\end{aligned} \tag{A1-45}$$

称为随机变量 X 的方差(Variance)。通常,将方差的正平方根 $\sigma(X)$ 称为随机变量 X 的标准差(或均方差,Standard deviation)。

$\sigma(X)$ 作为随机变量 X 偏离其数学期望 $\mu(X)$ 的测度,广泛应用于误差分析理论。

混合矩(Joint moment):设两个实随机变量 X 和 Y 的联合密度为 $p(x,y)$,X 和 Y 的 k 阶混合矩(k th joint moment of X and Y)规定为

$$\mu_{mn} = E[X^m Y^n] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^m y^n p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{A1-46}$$

其中 m 和 n 皆为正整数,且有 $m+n=k$。如果 $\mu(X)$ 和 $\mu(Y)$ 分别是 X 和 Y 的期望值,则相应的 k 阶混合中心矩规定为

$$\gamma_{mn} = E\{[X-\mu(X)]^m[Y-\mu(Y)]^n\} \tag{A1-47}$$

(互)协方差(Cross - covariance):设实随机变量 X 和 Y 的期望值分别为 $\mu(X)$ 和 $\mu(Y)$,其二阶混合中心矩(Second order joint central moment)

$$\gamma_{11} = \mathrm{cov}(X,Y) = E\{[X-\mu(X)][Y-\mu(Y)]\} \tag{A1-48}$$

称为 X 和 Y 的(互)协方差函数(Cross - covariance of X and Y),简称协方差。

协方差矩阵(Autocovariance matrices):设 n 维随机实向量 $\boldsymbol{X}=[X_1,\cdots,X_n]^{\mathrm{T}}$ 的数学期望为 $\boldsymbol{\mu}$,则它的二阶中心矩(Second order central moment)

$$\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}) = E[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}] \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{C}_x \tag{A1-49}$$

称为随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的(自)协方差矩阵(Autocovariance matrix of X)。

n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}_x$ 可以写成

$$\boldsymbol{C}_x = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$