拓展知识技能

解剖经典题型

荟萃解题方法

提升思维品质

基础篇

高校自主招生考试直通车

数学（高一）

张雪明　编著

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

高校自主招生考试
直通车

基础篇·数学(高一)

张雪明 编著

上海交通大學出版社

内容提要

本书有 28 个专题组成，对高一学习阶段的数学知识点及思维方法进行较为详尽的梳理和必要的拓展. 每个专题有知识要点、例题和练习组成. 书末附有练习答案和较为详尽的解析.

本书对高中生参加高校自主招生考试、高考及高中阶段的各类考试都有参考价值. 对高中生数学学科的分析问题，思维方式，提高解题能力，从而在高校自主招生考试、高考和高中阶段各类考试中取得优异的成绩.

图书在版编目(CIP)数据

高校自主招生考试直通车. 基础篇. 数学. 高一 / 张雪明编著. —上海：上海交通大学出版社，2013
ISBN 978-7-313-10572-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①中学数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 266158 号

高校自主招生考试直通车基础篇·数学(高一)

编　　著：张雪明
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印　　制：上海交大印务有限公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×960 mm　1/16　　印　　张：16.5
字　　数：292 千字
版　　次：2013 年 12 月第 1 版　　印　　次：2013 年 12 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-10572-1/G
定　　价：39.00 元

前言

“高校自主招生考试直通车·数学系列”有《高校自主招生考试直通车基础篇·数学(高一)》(以下简称《基础篇·数学(高一)》)、《高校自主招生考试直通车基础篇·数学(高二)》(以下简称《基础篇·数学(高二)》)和《高校自主招生考试直通车·数学》(以下简称《直通车·数学》).

《基础篇·数学(高一)》和《基础篇·数学(高二)》这两本书在于知识拓展,重视积累;而《直通车·数学》在于实战演练,重视冲刺.

《基础篇·数学(高一)》和《基础篇·数学(高二)》具有特点:

系统性——保证课程的自身逻辑完整.

丰富性——对课本中已有的内容一般不再重复阐述,但依据自主招生考试和高考的要求,对于拓展知识要求到位、齐全.

匹配性——内容结构尽可能与高中各时段的教学内容相匹配.

《直通车·数学》具有特点:

权威性——选题全部是考试真题,所以可以保证内容的导向不会出现偏差.

全面性——对国内主要考试联盟的试题积累齐全.

实践性——奠基篇的分类按实际考试的现实情况划分,便于读者把握考试重点难点;分类篇按考试年份提供真卷,便于读者进行必要的模拟演练.

时效性——根据需要及时改版,逐年把最新的内容添加进去.

高一读者已有知识储备偏少,可能会在学习中遇到因知识缺漏而无法解决的数学问题,虽然在问题编排中注意了这个问题,但估计依然在所难免,如果发生了这样的情况,没事,你只需要跳过去.

对属于中学教材的拓展性内容,由于自主招生的试题难度普遍较高,选配的练习题难度也比较高,所以为了方便读者学习,一般配有比较详细的解答;对自主招生涉及的高等数学内容往往考查比较简单,提供的练习也相对容易,为了不增加篇

幅,一般只配有简单的答案.

自主招生考试与普通高考并不相悖,只是在命题的重点、角度、指向、能力要求的层次等方面有所不同罢了.数学各部分的内容都是相通的,适当地拓展学习,对你数学学科水平,包括应试能力的提高大有好处.即便你的数学基础不是很好,也可以使用本书,前提是你必须有足够的学习激情和接受挑战的勇气!

另外,本书也适合作为重点高中的各种提高班,如理科班、创新班的教材.

编　者

目录

§ *01* 命题与逻辑联结词 /001

§ *02* 容斥原理 /008

§ *03* 绝对值 /014

§ *04* 多项式 /021

§ *05* 复数三角式及指数式 /026

§ *06* 无理不等式 /031

§ *07* 绝对不等式 /035

§ *08* 重要不等式 /039

§ *09* 方程 /049

§ *10* 整除与同余 /060

§ *11* 不定方程 /065

§ *12* 初等函数 /072

§ *13* 特殊函数 /082

§ *14* 三角变换 /089

§ *15* 三角形的边角关系 /098

§ *16* 线性递归数列 /107

§17 数列求和 /113

§18 数学归纳法 /123

§19 数学哲学方法——化归 /132

§20 数学哲学方法——类比 /139

§21 数学哲学方法——抽象 /153

§22 数学哲学方法——概括 /162

§23 数学哲学方法——归纳 /170

§24 数学哲学方法——演绎 /177

§25 数学哲学方法——分析 /184

§26 数学哲学方法——综合 /193

§27 数学哲学方法——递推 /199

§28 数学哲学方法——迭代 /205

练习答案与解析 /211

§01 命题与逻辑联结词

一、要点

1. 命题

能够判断真假的陈述句叫做命题，正确的命题叫做真命题，错误的命题叫做假命题.

“若 p，则 q”形式的命题中 p 叫做命题的条件，q 叫做命题的结论.

2. 四种命题

(1) 原命题：一个命题的本身称之为原命题.

(2) 逆命题：将原命题的条件和结论颠倒的新命题.

(3) 否命题：将原命题的条件和结论全否定的新命题，但不改变条件和结论的顺序.

(4) 逆否命题：将原命题的条件和结论颠倒，然后再将条件和结论全否定的新命题.

3. 命题的否定

命题的否定是只将命题的结论否定的新命题，这与否命题不同.

4. 四种命题及命题否定的真假性关系

原命题和逆否命题等价，否命题和逆命题等价，命题的否定与原命题的真假性相反.

5. 命题中的逻辑联结词

简单的逻辑联结词包括：或、且、非.

1) 或

用联结词“或”把 p 与 q 联结起来称为一个新命题，记作 $p \vee q$，读作“p 或 q”.

命题 $p \vee q$ 的真假的判定：一真必真.

p	q	$p \vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

2) 且

用联结词“且”把 p 与 q 联结起来称为一个新命题,记作 $p \wedge q$,读作“p 且 q”.

命题 $p \wedge q$ 的真假的判定:一假必假.

p	q	$p \wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

3) 非

对于一个命题 p 如果仅将它的结论否定,就得到一个新命题,记作 $\neg p$,读作“非 p”.

命题 $\neg p$ 的真假的判定:真假相对.

p	$\neg p$
真	假
假	真

二、例题

例 1 非空集合 A, B 满足 $A \subsetneqq B$,在此条件下给出以下四个命题:

① 任取 $x \in A$,则 $x \in B$ 是必然事件;

② 若 $x \notin A$,则 $x \in B$ 是不可能事件;

③ 任取 $x \in B$,则 $x \in A$ 是随机事件;

④ 若 $x \notin B$,则 $x \notin A$ 是必然事件.

上述命题中真命题的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解析 由 $A \subsetneqq B$ 可知存在 $x_0 \in B$ 而 $x_0 \notin A$,所以,“若 $x \notin A$,则 $x \in B$ 是

不可能事件”是假命题；命题①，③，④都是真命题．答案为 C．

例 2 给出下列四个命题：

① 任取 $x\in\mathbf{R}$，$\sin x+\cos x\leqslant 1$ 是必然事件；

② 任取 $x\in\mathbf{R}$，$\sin x+\cos x\leqslant -1$ 是不可能事件；

③ 任取 $x\in\mathbf{R}$，$\sin x+\cos x<2$ 是随机事件．

其中正确命题的个数是(　　)．

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解析 由 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 得 $-\sqrt{2}\leqslant\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$，所以，$\sin x+\cos x\leqslant 1$ 不是必然事件；$\sin x+\cos x\leqslant -1$ 不是不可能事件；$\sin x+\cos x<2$ 是必然事件，上述三个命题中没有正确命题，答案为 A．

例 3 对于集合 A，B，下列四个命题中正确的是(　　)．

A. “A 不是 B 的子集”的充要条件是“对任意 $x\in A$ 都有 $x\notin B$”

B. “A 不是 B 的子集”的充要条件是“$A\cap B=\varnothing$”

C. “A 不是 B 的子集”的充要条件是“B 不是 A 的子集”

D. “A 不是 B 的子集”的充要条件是“存在 $x\in A$，使得 $x\notin B$”

解析 由于 A 不是 B 的子集，则至少存在一个 $x_0\in A$ 有 $x_0\notin B$，并不要求对任意的 $x\in A$ 有 $x\notin B$，但是，对任意 $x\in A$ 都有 $x\notin B$，则 A 一定不是 B 的子集，所以，“对任意 $x\in A$ 都有 $x\notin B$”是“A 不是 B 的子集”的充分不必要条件．

若 A 不是 B 的子集，不一定有 $A\cap B=\varnothing$，例如 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{2, 3\}$，反之，当 $A\cap B=\varnothing$ 时，不一定能推出 A 不是 B 的子集，例如 $A=\varnothing$，则 A 必是 B 的子集，所以，“$A\cap B=\varnothing$”是“A 不是 B 的子集”的既不充分也不必要条件．

由 A 不是 B 的子集不一定能推出 B 不是 A 的子集，例如 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{2, 3\}$，反之亦然，所以，“B 不是 A 的子集”是“A 不是 B 的子集”的既不充分也不必要条件．

根据子集的概念可知“存在 $x\in A$，使得 $x\notin B$”是“A 不是 B 的子集”的充要条件．所以，答案为 D．

例 4 已知 p 是 r 的充分不必要条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件，那么 p 是 q 的(　　)．

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解析 由 p 是 r 的充分不必要条件可知 $p\Rightarrow r$，但 $r\nRightarrow p$　①，

“s 是 r 的必要条件”知 $r\Rightarrow s$　②，

“q 是 s 的必要条件”可得 $s\Rightarrow q$　③，

由式①，式②，式③可知 $p\Rightarrow q$，从而 p 是 q 的充分条件，假设“p 是 q 的必要条件”则 $q\Rightarrow p$，再由 $r\Rightarrow s$，$s\Rightarrow p$，可得 $r\Rightarrow p$，这与式①相矛盾，从而 $q\not\Rightarrow p$，因此 p 是 q 的充分不必要条件，故选 A.

例 5　已知命题 p:$\forall x\in\mathbf{R}$, $\sin x\leqslant 1$，则(　　).

A. $\neg p$:$\exists x\in\mathbf{R}$, $\sin x\geqslant 1$　　B. $\neg p$:$\forall x\in\mathbf{R}$, $\sin x\geqslant 1$

C. $\neg p$:$\exists x\in\mathbf{R}$, $\sin x>1$　　D. $\neg p$:$\forall x\in\mathbf{R}$, $\sin x>1$

解析　命题 p 是全称命题，全称命题的否定是特称命题，故选 C.

注　全称命题 p:$\forall x\in M$, $p(x)$；它的否定 $\neg p$:$\exists x_0\in M$, $\neg p(x_0)$.

例 6　下列 4 个命题：

p_1:$\exists x\in(0,+\infty)$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^x$

p_2:$\exists x\in(0,1)$, $\log_{\frac{1}{2}}x>\log_{\frac{1}{3}}x$

p_3:$\forall x\in(0,+\infty)$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\log_{\frac{1}{2}}x$

p_4:$\forall x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x<\log_{\frac{1}{3}}x$

其中的真命题是(　　).

A. p_1, p_3　　B. p_1, p_4

C. p_2, p_3　　D. p_2, p_4

解析　取 $x=\frac{1}{2}$，则 $\log_{\frac{1}{2}}x=1$, $\log_{\frac{1}{3}}x=\log_3 2<1$, p_2 正确.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 时，$\left(\frac{1}{2}\right)^x<1$，而 $\log_{\frac{1}{3}}x>1$. p_4 正确. 故选 D.

例 7　分别指出下列各题中构成的“$p\vee q$”，“$p\wedge q$”，“$\neg p$”形式的复合命题，并指出真假.

(1) p:3 是 13 的约数；q:3 是方程 $x^2-4x+3=0$ 的解.

(2) p:相似三角形的对应边相等；q:相似三角形对应角相等.

(3) p:$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}$; q:$\{0\}\in\mathbf{N}$.

(4) p:{矩形}$\supsetneqq${正方形}；q:{圆内接四边形}$\supsetneqq${矩形}.

解析 (1)“$p \vee q$”:3是13的约数或是方程$x^2-4x+3=0$的解;
“$p \wedge q$”:3是13的约数且是方程$x^2-4x+3=0$的解;“$\neg p$”:3不是13的约数.
由p假q真,得“$p \vee q$”为真,“$p \wedge q$”为假,“$\neg p$”为真.
(2)“$p \vee q$”:相似三角形的对应边相等或对应角相等;
“$p \wedge q$”:相似三角形的对应边相等且对应角相等;
“$\neg p$”:相似三角形的对应边不一定相等.
由p假q真,得“$p \vee q$”为真,“$p \wedge q$”为假,“$\neg p$”为真.
(3)“$p \vee q$”:$\mathbf{N} \subsetneqq \mathbf{Z}$或$\{0\} \in \mathbf{N}$;
“$p \wedge q$”:$\mathbf{N} \subsetneqq \mathbf{Z}$且$\{0\} \in \mathbf{N}$;
“$\neg p$”:$\mathbf{N} \not\subseteq \mathbf{N}$或$N=\mathbf{Z}$.
由p真q假,得“$p \vee q$”为真,“$p \wedge q$”为假,“$\neg p$”为假.
(4)“$p \vee q$”:{矩形}$\supsetneqq${正方形}或{圆内接四边形}$\supsetneqq${矩形};
“$p \wedge q$”:{矩形}$\supsetneqq${正方形}且{圆内接四边形}$\supsetneqq${矩形};
“$\neg p$”:{矩形}={正方形}或{矩形}$\not\supseteq${正方形}.
由p真q真,得“$p \vee q$”为真,“$p \vee q$”为真,“$\neg p$”为假.

例8 某人要在一张3×3的表格

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

中填入9个数(填的数有正有负),他要使得表中任意一行的三个数之和为正,而任意一列的三个数之和为负,求证:他一定不能写出满足要求的数表.

解析 若此人能写出满足要求的数表,则由$a_{11}+a_{12}+a_{13}>0$, $a_{21}+a_{22}+a_{23}>0$, $a_{31}+a_{32}+a_{33}>0$可得数表中的九个数之和为正;同时,又有$a_{11}+a_{21}+a_{31}<0$, $a_{12}+a_{22}+a_{32}<0$, $a_{13}+a_{23}+a_{33}<0$,则数表中的九个数之和为负,矛盾,所以,此人一定不能写出满足要求的数表.

例9 (南京大学) 有式子$(a+b)^2+3a+2b=(c+d)^2+3c+2d$,
证明:(1) $a=c$, $b=d$的充要条件是$a+b=c+d$;
(2) 若$a, b, c, d \in \mathbf{N}^*$,则上式成立的充要条件是$a=c$, $b=d$.

证明 (1) 由$a=c$, $b=d$得到$a+b=c+d$是显然的;反之由$a+b=c+d$,代入上式可得$a=c$,于是又有$b=d$.因此,$a=c$, $b=d$的充要条件是$a+b=c+d$.

(2) 充分性是显然的,下面证必要性.

① 当$a+b=c+d$时,由(1)小题结论可知:$a=c$, $b=d$,即必要性成立.

② 当 $a+b>c+d$ 时,有 $a-c>d-b$,设 $a-c=d-b+p\ (p\geqslant 1)$,

由上式得 $(a+b+1)^2+a=(c+d+1)^2+c$,

$(a+b-c-d)(a+b+c+d+2)+a-c=0$,

$[(a-c)-(d-b)](a+b+c+d+2)+a-c=0$,

$(a-c)(a+b+c+d+2)+a-c=(d-b)(a+b+c+d+2)=(a-c-p)(a+b+c+d+2)$,

$(a-c)=-p(a+b+c+d+2)$, $(a-c)+p(a+b+c+d+2)=0$,

$(1+p)a+pb+(p-1)c+pd+2p=0$. 这与 $p\geqslant 1$ 以及 $a, b, c, d\in \mathbf{N}^*$ 相矛盾,于是 $a+b>c+d$ 不能成立.

③ 与②一样可以证明:$a+b<c+d$ 也不能成立.

综合①,②,③可知:这里的必要性成立.

例 10 在数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 中, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是等比数列. 对于任意正整数 n, a_n、c_n、b_n 都依次成等差数列,且 $c_1\neq 0$. 证明:"数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 公比相等"是"数列 $\{c_n\}$ 成等比数列"的充要条件.

证明 充分性:设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 公比都是 q,则 $a_n=a_1q^{n-1}$, $b_n=b_1q^{n-1}$, $c_n=\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)=\dfrac{1}{2}(a_1+b_1)q^{n-1}=c_1q^{n-1}$,又 $c_1\neq 0$,所以数列 $\{c_n\}$ 是公比为 q 的等比数列.

必要性:若数列 $\{c_n\}$ 为等比数列,设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 的公比分别为 p, q, r,则

$$\begin{cases}2c_1=a_1+b_1 & ①,\\ 2c_1r=a_1p+b_1q & ②,\\ 2c_1r^2=a_1p^2+b_1q^2 & ③,\end{cases}$$

将式①乘以式③得 $4c_1^2r^2=a_1^2p^2+a_1b_1(p^2+q^2)+b_1^2q^2$,将式②两边平方得 $4c_1^2r^2=a_1^2p^2+2a_1b_1pq+b_1^2q^2$,于是有 $p^2+q^2=2pq$,即 $p=q$,所以 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 公比相等.

所以,"数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 公比相等"是"数列 $\{c_n\}$ 成等比数列"的充要条件.

三、练习

1. 与命题"若 $a\notin M$,则 $b\notin M$",等价的命题是( ).

A. 若 $b\in M$,则 $a\notin M$　　B. 若 $b\notin M$,则 $a\in M$

C. 若 $b\in M$,则 $a\in M$　　D. 若 $a\notin M$,则 $b\in M$

2. 设 $f(x)$ 是定义在正整数集上的函数,且 $f(x)$ 满足:"当 $f(k)\geqslant k^2$ 成立时,总可

以推出 $f(k+1) \geqslant (k+1)^2$ 成立”,那么,下列命题总成立的是(　　).

A. 若 $f(3) \geqslant 9$ 成立,则当 $k \geqslant 1$ 时,均有 $f(k) \geqslant k^2$ 成立

B. 若 $f(5) \geqslant 25$ 成立,则当 $k \leqslant 5$ 时,均有 $f(k) \geqslant k^2$ 成立

C. 若 $f(7) < 49$ 成立,则当 $k \geqslant 8$ 时,均有 $f(k) < k^2$ 成立

D. 若 $f(4) = 25$ 成立,则当 $k \geqslant 4$ 时,均有 $f(k) \geqslant k^2$ 成立

3. 已知命题 p:所有有理数都是实数;命题 q:正数的对数都是负数. 则下列命题中为真命题的是(　　).

A. $(\neg p) \vee q$　　B. $p \wedge q$　　C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$　　D. $(\neg p) \vee (\neg q)$

4. (中国科学技术大学)　命题“若 $x^2+y^2>2$,则 $|x|>1$ 或 $|y|>1$”的否命题是________.

5. 中学数学中存在许多关系,比如“相等关系”、“平行关系”等,如果集合 A 中元素之间的一个关系“~”满足以下三个条件:

(1) 自反性:对于任意 $a \in A$,都有 $a \sim a$;

(2) 对称性:对于 $a, b \in A$,若 $a \sim b$,则有 $b \sim a$;

(3) 传递性:对于 $a, b, c \in A$,若 $a \sim b$, $b \sim c$,则有 $a \sim c$,

则称“~”是集合 A 的一个等价关系,例如:“数的相等”是等价关系,而“直线的平行”不是等价关系(自反性不成立),请你再列出三个等价关系:________.

6. 命题“存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, $2^{x_0} \leqslant 0$”的否定是(　　).

A. 不存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, $2^{x_0} > 0$　　B. 存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, $2^{x_0} \geqslant 0$

C. 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $2^x \leqslant 0$　　D. 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $2^x > 0$

7. 用量词符号表达下列命题,同时写出其否定形式并分别判断其真假.

(1) 有些梯形对角线相等;(2) 所有的方程都不是不等式.

8. 如果系数 a_1, b_1, c_1 和 a_2, b_2, c_2 都是非零常数的方程 $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ 和 $a_2x^2+b_2x+c_2=0$,其解集分别是 A 和 B,求证:“$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$”是“$A=B$”的充要条件.

9. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, $a, b \in \mathbf{R}$. 写出命题“若 $a+b>0$,则 $f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b)$”的逆命题,并判断其真假. 若所写命题是真命题,给出证明;若所写命题是假命题,给出反例.

10. (浙江大学)　已知 $a \geqslant \dfrac{1}{2}$, $f(x)=-a^2x^2+ax+c$,求证对于任意 $x \in [0, 1]$,使 $f(x) \leqslant 1$ 成立的充要条件是 $c \leqslant \dfrac{3}{4}$.

§02 容斥原理

一、要点

1. 集合元素的特性

无序性：一个集合中，每个元素的地位都是相同的，元素之间是无序的.

互异性：一个集合中，任何两个元素都认为是不相同的，即每个元素只能出现一次.

确定性：给定一个集合，任给一个元素，该元素或者属于或者不属于该集合，二者必居其一.

2. 集合的类划分

把一个集合 M 分成若干个非空子集：A_1，A_2，…，A_n. 如果满足：

(1) $A_i \cap A_j = \varnothing\ (1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$；

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = M$.

那么称这些子集的全体为集合 M 的一个 n 划分，其中每一个子集叫做集合 M 的一个类.

3. 最小数原理

最小数原理Ⅰ：设 M 是正整数集的一个非空子集，则 M 中必有最小数.

最小数原理Ⅱ：设 M 是实数集的一个有限的非空子集，则 M 中必有最小数.

推论：设 M 是实数集的一个有限非空子集，则 M 中必有最大数.

4. 子集与推出关系

记 $M = \{x \mid p(x)\ 成立\}$，$N = \{x \mid q(x)\ 成立\}$.

(1) 若 $M \subseteq N$，则 p 是 q 的充分条件；

(2) 若 $N \subseteq M$，则 p 是 q 的必要条件.

5. 容斥原理

X 是一个有限集，则 X 内所含的全部元素的个数用 $\mathrm{card}(X)$ 表示.

如果 A, B, C 是任意的三个有限集，那么

(1) $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$；

(2) $\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(B\cap C)-\mathrm{card}(A\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$；

(3) $\mathrm{card}(A\cap B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cup B)$；

(4) 若 $B\subsetneqq A$，则 $\mathrm{card}(B)=\mathrm{card}(A)-\mathrm{card}(C_AB)$；

(5) $\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=\mathrm{card}(A\cup B\cup C)-\mathrm{card}(A)-\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(C)+\mathrm{card}(A\cap B)+\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap C)$.

二、例题

例 1 证明有理数集是可数的——即排列所有有理数可以和自然数一一对应.

证明 我们按照以下的方法来排列所有的有理数，使之与自然数建立一一对应关系；

把一切非零有理数写成 $\pm\dfrac{m}{n}$ $(m, n\in\mathbf{N}^*)$ 的分数形式，并按如下排序：

(1) 0 排在最前面.

(2) 对于正分数，按照它的分子与分母的和的大小排列，较小的和排在前面，较大的和排在后面. 如果和相等，分子大的排在前面.

(3) 对于负分数，把它紧排在与它的绝对值相等的正分数的后面.

(4) 分数值相等的分数，只保留最前面的一个.

这样，就把全体有理数排成

$0,\dfrac{1}{1},-\dfrac{1}{1},\dfrac{2}{1},-\dfrac{2}{1},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{1},-\dfrac{3}{1},\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{1},-\dfrac{4}{1},\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4},\cdots$ 在这个排列里，每个有理数都有它固定的位置，可以与自然数列建立一一对应关系，因此，有理数集是可数集.

例 2 证明实数集是不可数的.

证明 注意到可数集的无限子集仍是一个可数集，因此要证明实数集是不可

数集,只要证明实数集的某一个无限子集是不可数集就可以了,这里取实数集 **R** 的一个无限子集 $M=\{x \mid 0<x<1\}$.

假定 M 是一个可数集,那么 M 中所有的实数可写成数列的形式:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \cdots$$

将所有的 α_i $(i=1,\ 2,\ \cdots)$ 表示成无限小数:

$$\alpha_1=0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$$
$$\alpha_2=0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$
$$\alpha_3=0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha_n=0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots$$
$$\cdots\cdots$$

现在,再做一个无限小数 $\beta=0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots$ 其中 $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_n\cdots$ 可以从 1 到 8 这八个数字中任意选取,只是要求 $b_1\neq a_{11},\ b_2\neq a_{22},\ b_3\neq a_{33},\ \cdots,\ b_n\neq a_{nn},\cdots$ 于是 $\beta\neq\alpha_1,\ \beta\neq\alpha_2,\ \beta\neq\alpha_3,\ \cdots,\ \beta\neq\alpha_n,\ \cdots$ 所以 $\beta\notin M$. 但是 $\beta=0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots$ 是$(0,\ 1)$中的一个实数,即 $\beta\in M$,矛盾. 所以 $M=\{x \mid 0<x<1\}$ 是不可数集,从而实数集是不可数集.

实数集与有理数集比较,两者都具有稠密性,但完备性却体现了实数集与有理数集的本质区别. 另外,实数集也不再像有理数集那样保持可数集的性质了.

例 3 (中国科学技术大学) 一个平面由红点、蓝点组成,且既有红点又有蓝点. 对于给定任意长 a $(a>0)$,证明:

(1) 平面内存在两个同色点,距离为 a;

(2) 平面内存在两个异色点,距离为 a.

解析 (1) 取一个边长为 a 的正三角形,由抽屉原理,必有两点同色,则这两点即为所求.

(2) 由于平面内既有红点,又有蓝点,所以可以任取一个红点 A 和一个蓝点 B,如图 2.1 所示. 由于平面上所有点均染了两色之一,所以这两点 A, B 可以由若干条长度为 a 的线段相连,这一定可以做到. 由 A, B 异色,则必存在相邻的两点 C, D,使 C, D 异色且 $CD=a$,即 C, D 两点即为所求.

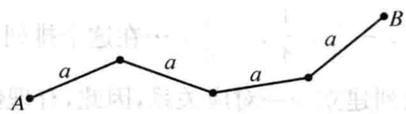

图 2.1