Yan Yuan
燕园教育

2015 考研专家指导丛书

考研数学
标准模拟试卷与精解
数学一

超值赠送

- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

◎ 清华大学 王 欢
◎ 北京大学 王德军 主编
◎ 首都师范大学 童 武

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

Yan Yuan
燕园教育

2015 考研专家指导丛书

考研数学标准模拟试卷与精解

数学一

超值赠送

- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

清华大学 王欢
北京大学 王德军 主编
首都师范大学 章武

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教育出版中心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学标准模拟试卷与精解. 数学一 / 王欢主编 .
—2 版. —北京 : 中国石化出版社, 2014. 2
ISBN 978-7-5114-2567-6

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 019690 号

中国石化出版社出版发行

地址:北京市东城区安定门外大街 58 号
邮编:100011　电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京富泰印刷有限责任公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787 × 1092 毫米 16 开本 10.25 印张 258 千字
2014 年 3 月第 2 版　2014 年 3 月第 1 次印刷
定价: 28.00 元　(赠送 MP3 光盘)

前　　言

中国加入 WTO 之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高水平人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制定的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。

本套丛书包括：

《考研数学标准模拟试卷精解数学一》

《考研数学标准模拟试卷精解数学二》

《考研数学标准模拟试卷精解数学三》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　98 考点全突破数学一》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　70 考点全突破数学二》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　102 考点全突破数学三》

《阅卷人精讲考研数学高等数学高分强化版》

《阅卷人精讲考研数学线性代数高分强化版》

《阅卷人精讲考研数学概率论与数理统计高分强化版》

《阅卷人点拨考研数学历届真题 15 天突破　数学一》

《阅卷人点拨考研数学历届真题 15 天突破　数学二》

《阅卷人点拨考研数学历届真题 15 天突破　数学三》

《考研数学主观题 23 天突破 500 题　数学一》

《考研数学主观题 13 天突破 500 题　数学二》

《考研数学主观题 22 天突破 500 题　数学三》

《考研数学客观题 26 天突破 1500 题　数学一》

目　录

模拟试卷(一)

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 设函数$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，$x_0 \neq 0$ 是函数$f(x)$ 的极大值点，则(　　).

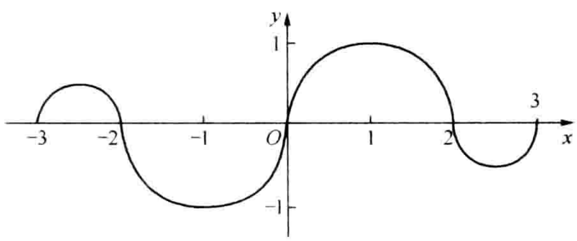
(A) x_0 必是函数$f(x)$ 的驻点　　(B) $-x_0$ 必是函数 $-f(-x)$ 的最小值点

(C) $-x_0$ 必是函数 $-f(-x)$ 的极小值点　　(D) 对一切 x_0 都有$f(x) \leqslant f(x_0)$

2. 如下图，连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$ 、$[2,3]$ 上图形分别是直径为1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0]$，$[0,2]$ 上的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周，设 $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$，则下列结论正确的是 (　　).

(A) $F(3) = -\dfrac{3}{4}F(-2)$　　(B) $F(3) = \dfrac{5}{4}F(2)$

(C) $F(-3) = \dfrac{3}{4}F(2)$　　(D) $F(-3) = -\dfrac{5}{4}F(-2)$



3. 设 $p_n = \dfrac{a_n + |a_n|}{2}, q_n = \dfrac{a_n - |a_n|}{2}, n = 1,2,\cdots$，则下列命题正确的是 (　　).

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定

4. 具有特解 $y_1 = e^{-x}, y_2 = 2xe^{-x}, y_3 = 3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是 (　　).

(A) $y''' - y'' - y' + y = 0$　　(B) $y''' + y'' - y' - y = 0$

(C) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$　　(D) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 仅有零解的充分条件是 (　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性无关　　(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关　　(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，$\boldsymbol{A}^T$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则对于线性方程组(Ⅰ) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 和(Ⅱ) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 必有(　　)

(A)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，但(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解

(B)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解

(C)(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解，(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解

(D)(Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解，但(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解

7. 设二维随机变量 X 和 Y 相互独立，其概率分布为

m	-1	1	m	-1	1
$P\{X=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$P\{Y=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则下列式子正确的是(　　).

(A) $X=Y$　　(B) $P\{X=Y\}=0$　　(C) $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$　　(D) $P\{X=Y\}=1$

8. 设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则随机变量 $U=X+Y$ 与 $V=X-Y$ 不相关的充分必要条件为(　　)

(A) $E(X)=E(Y)$　　(B) $E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$　　(D) $E(X^2)+[E(X)]^2=E(Y^2)+[E(Y)]^2$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. 已知 $f(x)$ 是微分方程 $xf'(x)-f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ 满足 $f(1)=0$ 的特解，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

10. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$ ________.

11. 设函数 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $b_3=$ ________.

12. 设 $f(u,v)$ 是二元可微函数 $z=f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

13. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为________.

14. 设随机变量 $X_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2)$ 独立同分布，$E(X_{ij})=2$，则行列式

$$Y=\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix}$$

的数学期望 $E(Y)=$ ________.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 11 分)

设 $\Sigma:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1(z\geqslant 0)$. 点 $P(x,y,z)\in\Sigma$，π 为曲面 Σ 在点 P 处的切平面，$\mathrm{d}(x,y,z)$

为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{d(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

16.（本题满分 10 分）

计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 所围成的立体.

17.（本题满分 10 分）

某湖泊水量为 V，每年排入湖泊中内含污染物 A 的污水量为 $\frac{V}{6}$，流入湖泊内不含 A 的水量为 $\frac{V}{6}$，流出湖的水量为 $\frac{V}{3}$. 设 2010 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$，超过国家规定指标，为了治理污染，从 2011 年初开始，限定排入湖中含 A 污水的浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$，问至多经过多少年，湖中污染物 A 的含量降到 m_0 以内(设湖中 A 的浓度是均匀的)?

18.（本题满分 9 分）

将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并指出其收敛区间.

19.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$（A 为常数）.

（Ⅰ）证明 $\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_{0}^{a}g(x)\mathrm{d}x$;

（Ⅱ）利用(Ⅰ)的结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x\mathrm{d}x$.

20.（本题满分 11 分）

已知齐次线性方程组（Ⅰ）$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1+3x_2+5x_3=0,\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$ 和（Ⅱ）$\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0,\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$ 同解，求 a,b,c 的值.

21.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\quad(b>0)$，

其中二次矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12.

（Ⅰ）求 a,b 的值;

（Ⅱ）利用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换对应的正交矩阵.

22.（本题满分 11 分）

两台同样自动记录仪，每台无故障工作的时间服从参数为 5 的指数分布；首先开动其中一台，当其发生故障时，停用而另一台自动开动.

试求两台记录仪无故障工作的总时间 T 的概率密度 $f(t)$、数学期望和方差.

23.（本题满分 11 分）

某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩（百分制）近似正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上的占考生总数的 2.3%，试求考生的外语成绩在 60 分到 84 分之间的概率，如下表：

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$①	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

①指标准正态分布函数.

模拟试卷（一）参考答案与解析

一、选择题

1.【考点提示】函数的极值

【解题分析】因为“函数 $f(x)$ 的极值点不一定是函数 $f(x)$ 的驻点”，如 $f(x)=3-|x-1|$ 在 $x_0=1$ 点处取得极大值 $f(1)=3$，但 $x_0=1$ 点还并不是函数 $f(x)$ 的驻点.（A）不对.又“函数 $f(x)$ 的极值点不一定是函数 $f(x)$ 的最值点”，如 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$，因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内没有最大值，但却在 $x_0=1$ 点处取得极大值 $f(1)=3$．而当 $x>4$ 时，都有 $f(x)>f(x_0)$．（D）不对，至于（B），我们在否定（D）时，实际上已经得到结论了．仍然可举（D）中用过的例子为反例．因此选（C）.

2.【考点提示】定积分的几何意义

【解题分析】$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的大小与曲线 $f(x)$ 与 x 轴所围面积的大小有关．因为

$$F(3)=\frac{1}{2}\times\pi\times1^2-\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\pi,\quad F(-3)=\frac{3}{8}\pi,$$

$$F(2)=F(-2)=\frac{1}{2}\times\pi\times1^2=\frac{\pi}{2},\quad F(-3)=\frac{3}{4}F(2),$$

故应选（C）.

3.【考点提示】条件收敛、绝对收敛

【解题分析】本题考查条件收敛与绝对收敛的定义，由题设，

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛时，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-|a_n|)$ 都发散，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都发散，因而可排除（A）、（C）；

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛时，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 都收敛，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-|a_n|)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)$ 都收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 也都收敛．综上，选（B）.

4.【考点提示】微分方程

【解题分析】由题设条件，可知该微分方程存在的特征根为$\lambda_1=-1,\lambda_2=-1,\lambda_3=1$，即特征方程为$(\lambda+1)^2(\lambda-1)=0$，展开得$\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=0$，因此所求微分方程必为$y'''+y''-y'-y=0$，

所以选(B).

5.【考点提示】由齐次线性方程组的解判定定理即可得正确选项

【解题分析】由解的判定定理知$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$仅有零解$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r=n$，即$\boldsymbol{A}$的$n$个列向量线性无关，故应选(A).

6.【考点提示】线性方程组的解

【解题分析】若$\boldsymbol{x}_i$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解，即$\boldsymbol{Ax}_i=\boldsymbol{0}$，显然$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}_i=\boldsymbol{0}$；

若$\boldsymbol{x}_i$是$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解，即$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}_i=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}_i=\boldsymbol{0}$，即$(\boldsymbol{Ax}_i)^T(\boldsymbol{Ax}_i)=\boldsymbol{0}$.

若$\boldsymbol{Ax}_i\neq\boldsymbol{0}$，不妨设$\boldsymbol{Ax}_i=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T,b_1\neq0$，则$(\boldsymbol{Ax}_i)^T(\boldsymbol{Ax}_i)=b_1^2+\sum\limits_{i=2}^{n}b_i^2>0$，

与$(\boldsymbol{Ax}_i)^T(\boldsymbol{Ax}_i)=\boldsymbol{0}$矛盾，因而$\boldsymbol{Ax}_i=\boldsymbol{0}$，即(Ⅰ)、(Ⅱ)同解. 故应选(B).

7.【考点提示】关键是正确分解事件$\{X=Y\}$

【解题分析】由X与Y相互独立知$P\{X=Y\}=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=1\}=$

$P\{X=-1\}\cdot P\{X=-1\}+P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

故应选(C).

8.【考点提示】二维随机变量的正态分布

【解题分析】因为U与V不相关的充要条件是$\mathrm{cov}(U,V)=0$

即$\mathrm{cov}(X+Y,X-Y)=\mathrm{cov}(X,X)-\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{cov}(Y,X)-\mathrm{cov}(Y,Y)$

$=D(X)-D(Y)=E(X^2)-E^2(X)-[E(Y^2)-E^2(Y)]=0$

故(B)正确.

二、填空题

9.【考点提示】微分方程的特解

【解题分析】因为$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=xf(x)\big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=f(1)-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$

将$xf'(x)-f(x)=\sqrt{2x-x^2}$及$f(1)=0$代入得$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1[f(x)+\sqrt{2x-x^2}]\mathrm{d}x$

即$2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{4}\cdot\pi\cdot1^2=-\dfrac{\pi}{4}$

故$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\pi/8$.

10.【考点提示】数列的极限

【解题分析】原式$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\dfrac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}}=2$.

11.【考点提示】傅里叶级数

【解题分析】$b_3=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin3x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin3x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi x\sin3x\mathrm{d}x=$

$2\int_0^{\pi} x\sin 3x\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3}.$

12.【考点提示】求偏导数

【解题分析】已知 $z = f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}f'_1 + \frac{1}{y}f'_2$，$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}f'_1 - \frac{x}{y^2}f'_2$，

于是 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{x}f'_1 + \frac{x}{y}f'_2 + \frac{y}{x}f'_1 - \frac{x}{y}f'_2 = 0.$

13.【考点提示】二次型的秩

【解题分析】由题设，

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 + x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3, \end{aligned}$$

则该二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$，由初等行变换可将 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，

则 $r(\boldsymbol{A}) = 2$，所以二次型的秩为 2.

14.【考点提示】行列式的定义、数学期望

【解题分析】由题设，根据行列式的定义和数学期望的性质，有

$$E(Y) = E\Big[\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(-1)^{r(i_1,i_2,\cdots,i_n)}X_{1i_1}X_{2i_2}\cdots X_{ni_n}\Big] = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(-1)^{r(i_1,i_2,\cdots,i_n)}E(X_{1i_1})\cdot E(X_{2i_2})\cdots E(X_{ni_n})$$

$$= \begin{vmatrix} E(X_{11}) & E(X_{12}) & \cdots & E(X_{1n}) \\ E(X_{21}) & E(X_{22}) & \cdots & E(X_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(X_{n1}) & E(X_{n2}) & \cdots & E(X_{nn}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

三、解答题

15.【考点提示】曲面积分

【解题分析】平面 π 的方程为 $\frac{x}{2}X + \frac{y}{2}Y + zZ = 1$，$\mathrm{d}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2}}$，

由 $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}}$，得 $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}\sigma = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}}}\mathrm{d}\sigma$，

所以 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\mathrm{d}(x,y,z)}\mathrm{d}S = \frac{1}{4}\iint\limits_{D}(4 - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{2}.$

16.【考点提示】求旋转曲面的方程

【解题分析】由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的旋转面方程是 $x^2 + y^2 = 2z$.

于是，Ω 是由旋转抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 4$ 所围成，

曲面与平面的交线是 $x^2 + y^2 = 8, z = 4$.

选用柱坐标变换，令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ 并选取先 rz 后 θ 的积分顺序，

极角为 θ 的半平面与 Ω 相截得 $D(\theta)$，

于是 $\Omega: 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, (r,z) \in D(\theta), D(\theta): 0 \leqslant z \leqslant 4, 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2z}.$

即 $\Omega: 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z \leqslant 4, 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2z}.$

因此 $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 dz \int_0^{\sqrt{2z}} (r^2 + z) r dr = 2\pi \int_0^4 \left[\left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2 z}{2} \right) \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{2z}} \right] dz = 4\pi \int_0^4 z^2 dz = \frac{256}{3}\pi.$

17. 【考点提示】微积分的应用

【解题分析】设从 2011 年初开始，第 t 年湖中污染物 A 的总量为 m，则浓度为 $\frac{m}{V}$，任取时间元素 $[t, t+dt]$，排入湖中污染物 A 的含量为 $\frac{m_0}{V} \times \frac{V}{6} \times dt = \frac{m_0}{6} dt$，流出湖的污染物 A 的含量为 $\frac{m}{V} \times \frac{V}{3} \times dt = \frac{m}{3} dt$，则在此时间元素内污染物 A 的改变量为

$dm = \left(\frac{m_0}{6} - \frac{m}{3} \right) dt$，解得 $m = \frac{m_0}{2} - Ce^{-\frac{t}{3}}$，又由 $m(0) = 5m$，得 $C = -\frac{9m_0}{2}$,

于是 $m = \frac{m_0}{2}(1 + 9e^{-\frac{t}{3}})$，令 $m = m_0$，得 $t = 6\ln 3$,

即至多经过 7 年湖中污染物 A 的含量不超过 m_0.

18. 【考点提示】幂级数，函数的展开

【解题分析】$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4} = \frac{1}{(x-4)(x+1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} \right)$

$$= -\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-1}{3}} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-1}{2}} = -\frac{1}{15} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{3} \right)^n - \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^n}.$$

其中，第一个幂级数的收敛区间为 $|x-1| < 3$，第二个幂级数的收敛区间为 $|x-1| < 2$，故幂级数的收敛区间为 $|x-1| < 2$，即 $-1 < x < 3$.

19. 【考点提示】对称区间上的定积分 $\int_{-a}^{a} F(x) dx$ 一般分解为 $\int_{-a}^{a} F(x) dx = \int_{-a}^{0} F(x) dx + \int_0^a F(x) dx$，再对第一个积分作变换 $x = -t$ 即可

【解题分析】(Ⅰ) $\int_{-a}^{a} f(x) g(x) dx = \int_{-a}^{0} f(x) g(x) dx + \int_0^a f(x) g(x) dx$,

又 $\int_{-a}^{0} f(x) g(x) dx \xlongequal{x=-t} \int_a^0 f(-t) g(-t) d(-t) = \int_0^a f(-t) g(t) dt = \int_0^a f(-x) g(x) dx$,

因此 $\int_{-a}^{a} f(x) g(x) dx = \int_0^a f(-x) g(x) dx + \int_0^a f(x) g(x) dx$

$$= \int_0^a [f(-x) + f(x)] g(x) dx = A \int_0^a g(x) dx.$$

(Ⅱ) 取 $f(x) = \arctan e^x$，$g(x) = |\sin x|$，$a = \frac{\pi}{2}$，则 $f(x)$，$g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，由 $(\arctan e^x + \arctan e^{-x})' = \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^x + \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot (-e^{-x}) = 0$,

知 $\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}$ 为常数，取 $x=0$ 得，$\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}=\arctan 1+\arctan 1=\frac{\pi}{2}$，

所以 $f(x)+f(-x)=\frac{\pi}{2}$，

于是由（Ⅰ）有 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$.

20. **【考点提示】**齐次线性方程组求解

【解题分析】根据题意可知方程组(Ⅱ)中方程组个数 < 未知数个数，从而(Ⅱ)必有无穷多解，所以(Ⅰ)必有无穷多解．所以(Ⅰ)的系数行列式必为0，即 $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{vmatrix}=2-a=0$

$\Rightarrow a=2$.

对（Ⅰ）系数矩阵作初等变换，有 $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，

可得方程组（Ⅰ）的通解为 $k(-1,-1,1)^{T}$，其中 k 为任意常数.

由于 $(-1,-1,1)^{T}$ 是方程组（Ⅱ）的解，故有 $\begin{cases}-1-b+c=0,\\-2-b^{2}+c+1=0.\end{cases}$

解得 $b=1,c=2$，或 $b=0,c=1$.

当 $b=0,c=1$ 时，方程组（Ⅱ）为 $\begin{cases}x_{1}+x_{3}=0,\\2x_{1}+2x_{3}=0,\end{cases}$

其系数矩阵的秩为1，从而（Ⅰ）与（Ⅱ）不同解，故 $b=0,c=1$ 舍去.

当 $a=2,b=1,c=2$ 时（Ⅰ）与（Ⅱ）同解.

21. **【考点提示】**特征值、正交变换、二次型的标准形

【解题分析】（Ⅰ）由题设，二次型 f 相应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{bmatrix}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 的3个特征值为 $\lambda_{1},\lambda_{2},\lambda_{3}$，则由已知条件知 $\lambda_{1}+\lambda_{2}+\lambda_{3}=1$，$\lambda_{1}\lambda_{2}\lambda_{3}=-12$；利用“矩阵特征值之和 = 矩阵主对角线元素之和”及“特征值之积 = 矩阵行列式”两个关系，得

$a=1$ 及 $\begin{vmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{vmatrix}=2(-2-b^{2})=-12$，可求出 $b=2$，即 $a=1,b=2$.

（Ⅱ）由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$，即 $\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&2-\lambda&0\\2&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=0$，可求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$\lambda_{1}=\lambda_{2}=2,\lambda_{3}=-3$．不难求得对应于 $\lambda_{1}=\lambda_{2}=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_{1}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_{2}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$；

对应于 $\lambda_3=-3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$，对 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 正交规范化，得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\\-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}.$$

令矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{5}}&0&-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$,

则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下，其中 $\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$,

因此二次型的标准形为 $2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

22. **【考点提示】**卷积公式、概率密度、期望、方差

【解题分析】由题设，设先开动的一台记录仪的无故障工作时间为 T_1，后开动的一台记录仪的无故障工作时间为 T_2，则由已知，T_i 的概率密度为 $f_i(x)=\begin{cases}5e^{-5x}, & x\geqslant 0,\\0, & x<0\end{cases}(i=1,2)$,

且显然 T_1 与 T_2 独立.

由于 $T=T_1+T_2$，则由卷积公式可得出当 $t>0$ 时 T 的概率密度，即

$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)f_2(t-x)\mathrm{d}x=\int_0^t 5e^{-5x}\cdot 5e^{-5(t-x)}\mathrm{d}x=25\int_0^t e^{-5t}\mathrm{d}x=25te^{-5t}$,

所以 T 的概率密度为 $f(t)=\begin{cases}25te^{-5t} & t>0\\0 & t\leqslant 0\end{cases}$

又 T_i 服从参数为5的指数分布，则 $E(T_i)=\frac{1}{5}$,$D(T_i)=\frac{1}{25}(i=1,2)$，则 T 的数学期望为

$$E(T)=E(T_1+T_2)=2E(T_1)=\frac{2}{5}$$

T 的方差为 $D(T)=D(T_1+T_2)=2D(T_1)=\frac{2}{25}$.

23. 【考点提示】正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 由数学期望 μ 和方差 σ^2 唯一决定，而 $\mu=72$，因此要计算 $P(60\leqslant X\leqslant 84)$，只要由 $P\{X\geqslant 96\}$ 求出 σ^2 即可

【解题分析】设 X 为考生的外语成绩，由题设知 $X\sim N(72,\sigma^2)$，

且 $P\{X\geqslant 96\}=2.3\%=0.023$，

即 $P\left\{\frac{X-72}{\sigma}\geqslant\frac{96-72}{\sigma}\right\}=P\left\{\frac{X-72}{\sigma}\geqslant\frac{24}{\sigma}\right\}=1-\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)=0.023$，于是得 $\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)=0.977.$

由 $\Phi(x)$ 的数值表知 $\frac{24}{\sigma}=2,\sigma=12$，这样 $X\sim N(72,12^2)$，所求概率为

$P\{60\leqslant X\leqslant 84\}=P\left\{\frac{60-72}{12}\leqslant\frac{X-72}{12}\leqslant\frac{84-72}{12}\right\}=P\left\{-1\leqslant\frac{X-72}{12}\leqslant 1\right\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=2\times 0.841-1=0.682.$

模拟试卷(二)

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则(　　).

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点　　(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点　　(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

2. 设常数 $\lambda>0$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^3+1}}$ (　　).

(A) 发散　　(B) 条件收敛　　(C) 绝对收敛　　(D) 收敛性与 λ 有关

3. 在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线

(A) 只有 1 条　　(B) 只有 2 条　　(C) 至少有 3 条　　(D) 不存在

4. 设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 等于 (　　).

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\,\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶可逆矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$ 的秩为 r_1，则(　　).

(A) $r>r_1$　　(B) $r<r_1$

(C) $r=r_1$　　(D) r 与 r_1 的关系由 C 而定

6. 设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是 (　　).

(A) $\lambda_1=0$　　(B) $\lambda_2=0$　　(C) $\lambda_1\neq 0$　　(D) $\lambda_2\neq 0$

7. 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为 (　　).

(A) $3p(1-p)^2$　　(B) $6p(1-p)^2$

(C) $3p^2(1-p)^2$　　(D) $6p^2(1-p)^2$

8. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随着 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ (　　).

(A) 单调增大　　(B) 单调减小　　(C) 保持不变　　(D) 增减不定

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|} & |x|>c\end{cases}$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$ ________.