

全国高职高专教育规划教材

# 应用高等数学

主编 胡桐春

 高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育规划教材

# 应用高等数学

Yingyong Gaodeng Shuxue

主 编 胡桐春

副主编 胡大京 潘晓萍 余绵樟



高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 内容提要

本书是根据教育部制定的《高职高专教育数学课程教学基本要求》、教育部[2006]16号文件关于培养高职高专学生成为高技能应用型人才的目标要求,以及结合最新的课程改革基本理念和多年的教学实践而编写的。

全书共分三篇,由基础模块、专业模块和实践模块组成,主要内容有函数、极限与连续,导数、微分及其应用,积分及其应用,线性代数及其应用,概率统计,积分变换,离散数学, MATLAB数学实验与数学建模等;每章的趣味阅读材料是本章内容的拓展或者数学文化的展示,展现了数学知识的魅力与奥妙;每节后配有练习题,每章后配有复习题A组(基础层次)和复习题B组(提高层次),书后附有习题参考答案及常用数表。

本书可作为高等职业院校工科类及经济类各专业的数学教材,也可供成人教育相关专业的读者学习参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学/胡桐春主编. —北京: 高等教育出版社, 2011.9  
ISBN 978-7-04-033187-5

I. ①应… II. ①胡… III. ①高等数学-高等职业教育-教材  
IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 165619 号

策划编辑 王玲玲      责任编辑 王玲玲      封面设计 杨立新      版式设计 王艳红  
插图绘制 黄建英      责任校对 姜国萍      责任印制 胡晓旭

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100120  
印 刷 北京东光印刷厂  
开 本 787mm×1092mm 1/16  
印 张 19.25  
字 数 470千字  
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
版 次 2011年9月第1版  
印 次 2011年9月第1次印刷  
定 价 34.20元(含光盘)

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物料号 33187-00

# 《应用高等数学》编审委员会

(按姓氏笔画排序)

王桂云 任红民 余绵樟 张帆 陈利鹏 胡桐春  
胡大京 郑锡陆 高永久 斯彩英 潘厚勇 潘晓萍

# 前 言

根据教育部制定的《高职高专教育数学课程教学基本要求》及教育部[2006]16号文件关于培养高职高专学生成为高技能应用型人才的目标要求,我们编写了本书。

在编写过程中,我们吸收了现有高职高专各种数学教材的优点,密切结合当前高职高专教学改革的实际,旨在编写出具有自身特色的高职高专教材。

本书具有以下特色:

1. 以“必需、够用”为原则,进行“模块化”、“分层次”的教学内容设计,叙述通俗易懂,深入浅出,体现了高职教育特色。

2. 注重各专业培养目标对数学基础知识的需求和学生可持续发展的需要。根据不同专业需要与不同生源的情况选择与整合数学知识。

3. 将数学建模思想、数学实验方法融入教材之中,以体现高职高专教学实践性的特点。

4. 采用“问题驱动”,充分体现数学知识的“问题的产生——问题的分析——问题的解决——实际中的应用”的思想过程,有利于学生了解知识的来龙去脉,激发学习兴趣;增加适合高职高专教育的数学应用实例,加强数学与生活 and 专业的联系,有利于培养学生的数学应用意识、应用能力。

5. 弱化理论推导,强化直观描述。注重数学概念的直观解释和数学思想方法的渗透。对某些定理及其证明的表述力求自然、简明。书中大量的图表,有助于学生更好地掌握数学知识。

6. 每节后配有练习题,每章后配有复习题 A 组(基础层次)和复习题 B 组(提高层次),便于数学方法的训练。

7. 开辟趣味阅读。每章的趣味阅读材料是本章内容的拓展或者数学文化的展示,展现了数学的魅力和奥妙,可以提高学生学习的兴趣,为终身学习和后续发展奠定基础。

另外,本书中带有“\*”的内容,学习者可根据实际需要选学。

全书内容分基础模块、专业模块和实践模块三篇,主要包括:微积分、线性代数、概率统计、积分变换、离散数学和 MATLAB 数学实验与数学建模等。其内容涵盖了高职高专院校工科类及经济类相关专业所必需的数学知识以及如何利用这些知识解决实际问题的数学思想方法。本书的各模块及其内容组合可供相关专业根据其教学需要自行选用。

与本书相配套的辅助教材《应用高等数学练习册》供学生课外作业使用。本书还配有光盘,供学生自主性学习使用。以上这些辅助教材和软件,相信定能成为使用者得心应手的朋友。

全书由胡桐春(杭州科技职业技术学院)任主编,胡大京(浙江交通职业技术学院)、潘晓萍(杭州科技职业技术学院)、余绵樟(杭州科技职业技术学院)任副主编。具体编写分工如下:第 1 章由张帆(湖州职业技术学院)、余绵樟编写,第 2 章由胡桐春编写,第 3 章由余绵樟、陈利鹏(杭州科技职业技术学院)编写,第 4 章由高永久(杭州科技职业技术学院)编写,第 5 章由潘晓萍编写,第 6 章由陈利鹏、胡大京编写,第 7 章由任红民编写,第 8 章由潘厚勇(杭州科技职业技

术学院)编写。参与本书编写、讨论和审稿工作的还有浙江交通职业技术学院的郑锡陆、斯彩英、王桂云和杭州科技职业技术学院的葛建国、许也平以及江苏农林职业技术学院的陈智豪等。书中图形由潘厚勇负责最后修改。全书由胡桐春负责最后定稿。

浙江大学博士生导师刘祥官教授、浙江传媒学院孙永平教授、杭州科技职业技术学院资深专家陈柏松督导在本书编写过程中对本书进行了认真的审核,并提出许多宝贵的意见和建议;杭州科技职业技术学院科研处长任红民教授参加编写并仔细审阅了部分稿件。另外,本书在编写过程中还得到了杭州科技职业技术学院、浙江交通职业技术学院和湖州职业技术学院的大力支持,高等教育出版社编辑也为本书编写和出版提供了帮助,在此一并表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,错误和不当之处在所难免,恳请广大读者批评指正。

编者

2011年5月

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

# 目 录

## 第一篇 基础模块

|                              |    |                                    |    |
|------------------------------|----|------------------------------------|----|
| <b>第 1 章 函数、极限与连续</b> .....  | 3  | 2.1.1 变化率问题举例 .....                | 34 |
| <b>1.1 函数</b> .....          | 3  | 2.1.2 导数的定义 .....                  | 36 |
| 1.1.1 常量与变量 .....            | 3  | 2.1.3 根据定义求导数举例 .....              | 37 |
| 1.1.2 函数的定义 .....            | 3  | 2.1.4 可导与连续的关系 .....               | 38 |
| 1.1.3 函数的几种特性 .....          | 7  | 2.1.5 导数的意义 .....                  | 38 |
| 1.1.4 基本初等函数 .....           | 9  | <b>练习题 2.1</b> .....               | 40 |
| 1.1.5 复合函数和初等函数 .....        | 13 | <b>2.2 导数的运算</b> .....             | 40 |
| <b>练习题 1.1</b> .....         | 14 | 2.2.1 基本初等函数的导数公式 .....            | 40 |
| <b>1.2 极限的概念</b> .....       | 14 | 2.2.2 导数的四则运算法则 .....              | 41 |
| 1.2.1 数列的极限 .....            | 15 | 2.2.3 复合函数的求导法则 .....              | 42 |
| 1.2.2 函数的极限 .....            | 16 | 2.2.4 隐函数的求导法则 .....               | 43 |
| 1.2.3 无穷小量与无穷大量 .....        | 19 | <b>练习题 2.2</b> .....               | 44 |
| <b>练习题 1.2</b> .....         | 21 | <b>2.3 高阶导数</b> .....              | 44 |
| <b>1.3 极限的运算</b> .....       | 21 | <b>练习题 2.3</b> .....               | 45 |
| 1.3.1 极限的四则运算法则 .....        | 21 | <b>2.4 导数的应用</b> .....             | 46 |
| 1.3.2 两个重要极限 .....           | 23 | 2.4.1 中值定理 .....                   | 46 |
| 1.3.3 无穷小量的比较 .....          | 25 | 2.4.2 洛必达法则 .....                  | 47 |
| <b>练习题 1.3</b> .....         | 26 | 2.4.3 函数的单调性 .....                 | 49 |
| <b>1.4 函数的连续性</b> .....      | 27 | 2.4.4 函数的极值 .....                  | 51 |
| 1.4.1 函数连续的概念 .....          | 27 | 2.4.5 函数的最值及应用 .....               | 53 |
| 1.4.2 函数的间断 .....            | 28 | <b>练习题 2.4</b> .....               | 55 |
| 1.4.3 初等函数的连续性 .....         | 29 | <b>2.5 微分及其应用</b> .....            | 55 |
| 1.4.4 闭区间上连续函数的性质 .....      | 30 | 2.5.1 微分的定义 .....                  | 55 |
| <b>练习题 1.4</b> .....         | 31 | 2.5.2 微分的几何意义 .....                | 56 |
| <b>趣味阅读(一) 连续复利的计算</b> ..... | 31 | 2.5.3 基本初等函数的微分公式与微分<br>运算法则 ..... | 57 |
| <b>复习题一 A 组(基础层次)</b> .....  | 32 | 2.5.4 微分在近似计算中的应用 .....            | 58 |
| <b>复习题一 B 组(提高层次)</b> .....  | 33 | <b>练习题 2.5</b> .....               | 59 |
| <b>第 2 章 导数、微分及其应用</b> ..... | 34 | <b>2.6 多元函数的偏导数与极值</b> .....       | 59 |
| 2.1 导数的概念 .....              | 34 |                                    |    |



|                          |    |                          |     |
|--------------------------|----|--------------------------|-----|
| 2.6.1 多元函数的偏导数 .....     | 59 | 3.2.1 定积分的概念和性质 .....    | 77  |
| 2.6.2 多元函数的极值 .....      | 62 | 3.2.2 定积分的计算 .....       | 82  |
| 练习题 2.6 .....            | 63 | 3.2.3 定积分的应用 .....       | 85  |
| 趣味阅读(二) 一年中哪一天白天         |    | 练习题 3.2 .....            | 90  |
| 最“长” .....               | 63 | <b>3.3 反常积分</b> .....    | 91  |
| 复习题二 A 组(基础层次) .....     | 65 | 练习题 3.3 .....            | 93  |
| 复习题二 B 组(提高层次) .....     | 66 | <b>3.4 常微分方程</b> .....   | 93  |
| <b>第 3 章 积分及其应用 常微分</b>  |    | 3.4.1 微分方程的基本概念 .....    | 93  |
| <b>方程</b> .....          | 67 | 3.4.2 可分离变量的微分方程 .....   | 95  |
| <b>3.1 不定积分</b> .....    | 67 | 3.4.3 一阶线性微分方程 .....     | 97  |
| 3.1.1 不定积分的概念和性质 .....   | 67 | 3.4.4 二阶常系数线性微分方程 .....  | 98  |
| 3.1.2 换元积分法 .....        | 71 | 练习题 3.4 .....            | 102 |
| 3.1.3 分部积分法 .....        | 75 | 趣味阅读(三) 微积分与万有引力定律 ..... | 102 |
| 练习题 3.1 .....            | 76 | 复习题三 A 组(基础层次) .....     | 104 |
| <b>3.2 定积分及其应用</b> ..... | 77 | 复习题三 B 组(提高层次) .....     | 105 |

## 第二篇 专业模块

|                             |     |                                |     |
|-----------------------------|-----|--------------------------------|-----|
| <b>第 4 章 线性代数及其应用</b> ..... | 109 | 练习题 4.4 .....                  | 147 |
| <b>4.1 行列式与矩阵</b> .....     | 109 | 趣味阅读(四) 千年世界名题“百钱买百鸡”          |     |
| *4.1.1 行列式 .....            | 109 | 问题 .....                       | 149 |
| 4.1.2 矩阵的概念 .....           | 114 | 复习题四 A 组(基础层次) .....           | 152 |
| 4.1.3 矩阵的运算 .....           | 116 | 复习题四 B 组(提高层次) .....           | 153 |
| 练习题 4.1 .....               | 124 | <b>第 5 章 概率统计</b> .....        | 155 |
| <b>4.2 矩阵的初等变换</b> .....    | 124 | <b>5.1 随机事件与概率</b> .....       | 155 |
| 4.2.1 初等变换的概念 .....         | 124 | 5.1.1 随机事件及其表达 .....           | 155 |
| 4.2.2 矩阵的秩 .....            | 126 | 5.1.2 随机事件的概率 .....            | 158 |
| 4.2.3 可逆矩阵与逆矩阵 .....        | 127 | 练习题 5.1 .....                  | 163 |
| 练习题 4.2 .....               | 130 | <b>5.2 随机变量的分布及其数字特征</b> ..... | 164 |
| <b>4.3 线性方程组</b> .....      | 131 | 5.2.1 随机变量及其分布 .....           | 164 |
| 4.3.1 线性方程组的概念 .....        | 131 | 5.2.2 随机变量的数字特征 .....          | 167 |
| 4.3.2 线性方程组的解法 .....        | 133 | 练习题 5.2 .....                  | 170 |
| 4.3.3 线性方程组解的判定 .....       | 135 | <b>5.3 数理统计初步</b> .....        | 170 |
| 练习题 4.3 .....               | 139 | 5.3.1 样本、统计量与抽样分布 .....        | 170 |
| * <b>4.4 线性规划</b> .....     | 139 | 5.3.2 参数估计 .....               | 171 |
| 4.4.1 线性规划问题的数学模型 .....     | 140 | 5.3.3 假设检验 .....               | 173 |
| 4.4.2 线性规划问题的图解法 .....      | 142 | 练习题 5.3 .....                  | 174 |
| 4.4.3 线性规划问题的计算机求解 .....    | 143 | 趣味阅读(五) 趣味无穷的概率 .....          | 174 |

|   |     |                       |     |
|---|-----|-----------------------|-----|
| 复习题五 A 组(基础层次) .....                        | 176 | 7.1.2 集合的概念 .....     | 201 |
| 复习题五 B 组(提高层次) .....                        | 177 | 7.1.3 集合的运算 .....     | 202 |
| <b>第 6 章 积分变换</b> .....                     | 178 | 7.1.4 关系的概念 .....     | 204 |
| <b>6.1 傅里叶变换</b> .....                      | 178 | 7.1.5 关系的性质 .....     | 205 |
| 6.1.1 傅里叶级数 .....                           | 178 | 练习题 7.1 .....         | 208 |
| 6.1.2 傅里叶积分与傅里叶变换 .....                     | 180 | <b>7.2 数理逻辑</b> ..... | 209 |
| 6.1.3 单位脉冲函数( $\delta$ 函数)及其傅里<br>叶变换 ..... | 183 | 7.2.1 苏格拉底三段论 .....   | 209 |
| 6.1.4 傅里叶变换的性质 .....                        | 185 | 7.2.2 命题逻辑 .....      | 209 |
| 练习题 6.1 .....                               | 188 | 7.2.3 谓词逻辑 .....      | 215 |
| <b>6.2 拉普拉斯变换</b> .....                     | 188 | 练习题 7.2 .....         | 218 |
| 6.2.1 拉普拉斯变换的基本概念 .....                     | 188 | <b>7.3 图论</b> .....   | 219 |
| 6.2.2 拉普拉斯变换的基本性质 .....                     | 190 | 7.3.1 哥尼斯堡七桥问题 .....  | 219 |
| 6.2.3 拉普拉斯逆变换 .....                         | 194 | 7.3.2 图的基本概念 .....    | 219 |
| 6.2.4 拉普拉斯变换的应用举例 .....                     | 194 | 7.3.3 图的矩阵表示 .....    | 222 |
| 练习题 6.2 .....                               | 196 | 7.3.4 欧拉图 .....       | 222 |
| 趣味阅读(六) 刑事侦查中时间的推断 ..                       | 196 | 7.3.5 哈密顿图 .....      | 223 |
| 复习题六 A 组(基础层次) .....                        | 197 | 7.3.6 树 .....         | 224 |
| 复习题六 B 组(提高层次) .....                        | 198 | 练习题 7.3 .....         | 227 |
| <b>第 7 章 离散数学</b> .....                     | 200 | 趣味阅读(七) 悖论的魅力 .....   | 227 |
| 7.1 集合与关系 .....                             | 200 | 复习题七 A 组(基础层次) .....  | 229 |
| 7.1.1 有限集合的计数问题 .....                       | 200 | 复习题七 B 组(提高层次) .....  | 229 |

### 第三篇 实践模块

|  |     |  |     |
|--|-----|--|-----|
| <b>第 8 章 MATLAB 数学实验与数学<br/>建模</b> ..... | 233 | 8.3.1 二维曲线的绘制 .....                        | 241 |
| <b>8.1 MATLAB 入门</b> .....               | 233 | 8.3.2 三维参量曲线的绘制 .....                      | 246 |
| 8.1.1 MATLAB 简介 .....                    | 233 | 8.3.3 三维网格图的绘制 .....                       | 248 |
| 8.1.2 常量、变量与函数 .....                     | 234 | 练习题 8.3 .....                              | 249 |
| 8.1.3 一维数组(向量)的创建 .....                  | 236 | <b>8.4 实验三 微积分问题的 MATLAB<br/>求解</b> .....  | 249 |
| 练习题 8.1 .....                            | 237 | 8.4.1 求极限 .....                            | 249 |
| <b>8.2 实验一 MATLAB 基本运算</b> .....         | 237 | 8.4.2 求导数 .....                            | 250 |
| 8.2.1 算术运算 .....                         | 237 | 8.4.3 求极值 .....                            | 251 |
| 8.2.2 代数式运算 .....                        | 238 | 8.4.4 求积分 .....                            | 252 |
| 8.2.3 解方程和方程组 .....                      | 240 | 练习题 8.4 .....                              | 253 |
| 练习题 8.2 .....                            | 241 | <b>8.5 实验四 积分变换问题的 MATLAB<br/>求解</b> ..... | 254 |
| <b>8.3 实验二 MATLAB 图形处理</b> .....         | 241 |  |     |

|   |     |                                    |     |
|---|-----|------------------------------------|-----|
| 8.5.1 常微分方程 .....                           | 254 | 8.7.2 随机变量的数字特征——数学期望<br>与方差 ..... | 265 |
| 8.5.2 拉普拉斯(Laplace)变换 .....                 | 255 | 8.7.3 样本均值、方差和标准差 .....            | 268 |
| 8.5.3 傅里叶(Fourier)变换 .....                  | 256 | 8.7.4 参数估计与区间估计 .....              | 268 |
| 练习题 8.5 .....                               | 256 | 练习题 8.7 .....                      | 269 |
| <b>8.6 实验五 线性代数问题的 MATLAB</b>               |     | <b>8.8 数学建模初探</b> .....            | 269 |
| 求解 .....                                    | 256 | 8.8.1 数学模型与数学建模 .....              | 269 |
| 8.6.1 矩阵及其代数运算 .....                        | 256 | 8.8.2 数学建模案例 .....                 | 270 |
| 8.6.2 逆矩阵与矩阵方程 .....                        | 259 | 练习题 8.8 .....                      | 273 |
| 8.6.3 线性方程组的求解 .....                        | 260 | <b>趣味阅读(八) 人、狗、鸡、米过河问题</b> .....   | 273 |
| 练习题 8.6 .....                               | 263 | <b>复习题八 A 组(基础层次)</b> .....        | 274 |
| <b>8.7 实验六 概率统计问题的 MATLAB</b>               |     | <b>复习题八 B 组(提高层次)</b> .....        | 275 |
| 求解 .....                                    | 263 |                                    |     |
| 8.7.1 几种常用的概率分布 .....                       | 263 |                                    |     |
| <b>附录 I 标准正态分布表</b> .....                   |     |                                    |     |
|   |     |                                    | 276 |
| <b>附录 II t 分布表</b> .....                    |     |                                    |     |
|   |     |                                    | 277 |
| <b>附录 III <math>\chi^2</math> 分布表</b> ..... |     |                                    |     |
|   |     |                                    | 279 |
| <b>习题参考答案</b> .....                         |     |                                    |     |
|   |     |                                    | 280 |
| <b>参考文献</b> .....                           |     |                                    |     |
|   |     |                                    | 295 |

# 第一篇

---

## 基础模块



# 第 1 章 函数、极限与连续

微积分是高等数学的核心. 函数是微积分的研究对象, 极限是微积分的研究工具. 微积分是通过极限方法来研究函数的分析性质(连续性、可导性、可积性等)和分析运算(极限运算、微分运算、积分运算等). 本章将在复习和加深函数有关知识的基础上, 着重讨论函数的极限和函数的连续性等问题.

## 1.1 函 数

### 1.1.1 常量与变量

在观察自然现象或技术的过程中, 会遇到各种量, 一般可分为两类: 一类是指在过程中数值保持不变的量, 称为**常量**, 如圆的周长公式  $C = 2\pi R$  中的  $2$  和  $\pi$  都是常量, 常量可以是字母也可以是数值. 另一类是指在过程中数值不断发生变化的量, 称为**变量**, 如圆的周长公式  $C = 2\pi R$  中的  $R$  和  $C$ .

### 1.1.2 函数的定义

[引例 1.1] 某电视台应某广告公司特约播放甲、乙两部连续剧. 经调查, 播放甲连续剧平均每集有收视观众 30 万人次, 播放乙连续剧平均每集有收视观众 25 万人次, 公司要求电视台每周共播 8 集.

(1) 设一周内甲连续剧播放  $x$  集, 甲、乙两部连续剧收视观众的人次总和为  $y$  万人次, 请找出  $x$  和  $y$  之间的关系.

(2) 已知电视台每周只能为该公司提供不超过 360 min 的播放时间, 并且播放甲连续剧每集需 55 min, 播放乙连续剧每集需 40 min, 求电视台每周应播放甲、乙两部连续剧各多少集, 才能使每周收看甲、乙连续剧的观众的人次总和最大, 并求出这个最大值.

**分析** (1) 设一周内甲连续剧播  $x$  集, 则乙播  $8 - x$  集. 故

$$y = 30x + 25(8 - x) = 5x + 200;$$

(2) 由  $55x + 40(8 - x) \leq 360$  得  $x \leq \frac{8}{3}$ . 又  $y = 5x + 200$  随  $x$  增大而增大, 注意到  $x$  为自然数, 故当  $x = 2$  时,  $y$  有最大值  $5 \times 2 + 200 = 210$  (万人次), 此时  $8 - x = 6$ .

所以, 电视台每周应播放甲连续剧 2 集, 乙连续剧 6 集, 能使每周收视观众的人次总和最大,

最大值是 210 万人次.

[引例 1.2] 试结合某年个人所得税税率表分析某人月收入与所得税之间的关系. 如表 1-1 所示.

表 1-1

| 级数 | 全月应纳税所得额(月收入(扣除三险一金后)-3 500 元) | 税率(%) | 速算扣除数(元) |
|----|--------------------------------|-------|----------|
| 1  | 不超过 1 500 元                    | 3     | 0        |
| 2  | 超过 1 500 元至 4 500 元            | 10    | 105      |
| 3  | 超过 4 500 元至 9 000 元            | 20    | 555      |
| 4  | 超过 9 000 元至 35 000 元           | 25    | 1 005    |
| 5  | 超过 35 000 元至 55 000 元          | 30    | 2 755    |
| 6  | 超过 55 000 元至 80 000 元          | 35    | 5 505    |
| 7  | 超过 80 000 元                    | 45    | 13 505   |

提示: 应纳个人所得税税额 = 应纳税所得额 × 适用税率 - 速算扣除数.

分析 设某人月收入(扣除三险一金后)为  $x$ , 所得税为  $y$ , 则  $x$  与  $y$  的关系为

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq 3\,500, \\ (x - 3\,500) \times 3\%, & 3\,500 < x \leq 5\,000, \\ (x - 3\,500) \times 10\% - 105, & 5\,000 < x \leq 8\,000, \\ (x - 3\,500) \times 20\% - 555, & 8\,000 < x \leq 12\,500, \\ (x - 3\,500) \times 25\% - 1\,005, & 12\,500 < x \leq 38\,500, \\ (x - 3\,500) \times 30\% - 2\,755, & 38\,500 < x \leq 58\,500, \\ (x - 3\,500) \times 35\% - 5\,505, & 58\,500 < x \leq 83\,500, \\ (x - 3\,500) \times 45\% - 13\,505, & x > 83\,500. \end{cases}$$

## 1. 定义

**定义 1.1** 设  $x$  和  $y$  是两个变量,  $D$  是非空数集. 若对于  $D$  中的每一个数  $x$ , 按照一定的对应法则  $f$ , 都有唯一确定的数  $y$  与之对应, 则称  $y$  是定义在数集  $D$  上的  $x$  的函数, 记作  $y = f(x)$ ,  $x \in D$ . 其中  $D$  称为函数的定义域,  $x$  称为自变量,  $y$  称为函数(或因变量).

当自变量  $x$  取数  $x_0 \in D$  时, 通过对应法则  $f$  与  $x_0$  对应的因变量  $y$  的值称为函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处的函数值, 记作  $f(x_0)$  或  $y|_{x=x_0}$ ; 当  $x$  取遍  $D$  内的各个数值时, 对应的  $y$  取值的全体组成的数集称为函数的值域, 记作  $M$ .

## 2. 函数的表示法

函数通常有三种表示法:

(1) 公式法: 用数学式子表示函数, 也称解析法. 其优点是便于理论推导和计算. 如一次函数  $y = kx + b$ , 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  等.

(2) **表格法**:以表格形式表示函数.其优点是所求函数值易查得.如三角函数表、对数表、国内生产总值表等.

(3) **图像法**:用图形表示函数.其优点形象直观,可看到函数的变化趋势.如我国人口出生率变化曲线等.

**例 1** 设某种练习本的单价是 2 元,买  $x(x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$  本这样的练习本需  $y$  元,试用三种表示法来表示函数  $y=f(x)$ .

**解** (1) 解析法: $y=2x, x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

(2) 表格法:买练习本的数量  $x$  与所需钱  $y$  的关系,如表 1-2 所示.

表 1-2

|         |   |   |   |   |    |    |
|---------|---|---|---|---|----|----|
| $x$ (本) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  |
| $y$ (元) | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |

(3) 图像法:如图 1-1 所示.

[说明] 三种表示法各有所长,如三角函数、三角函数表、三角函数图像,都是表示三角函数,起到互补的作用.

**例 2** (1) 设函数  $f(x) = x^3 - 2x + 3$ ,求  $f(1)$  和  $f(x^2)$ ;

(2) 设  $f(x+1) = x^2 - x + 1$ ,求  $f(x-1)$ .

**解** (1)  $f(x)$  的对应法则可表示为  $f(\quad) = (\quad)^3 - 2(\quad) + 3$ ,故

$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 + 3 = 2;$$

$$\begin{aligned} f(x^2) &= (x^2)^3 - 2 \cdot x^2 + 3 \\ &= x^6 - 2x^2 + 3. \end{aligned}$$

(2) 令  $x+1=t$ ,则  $x=t-1$ , $f(t) = (t-1)^2 - (t-1) + 1 = t^2 - 3t + 3$ .故

$$f(x-1) = (x-1)^2 - 3(x-1) + 3 = x^2 - 5x + 7.$$

**例 3** 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \frac{1}{1 - \sqrt{1+x}}; \quad (2) y = \sqrt{16-x^2} + \ln(x+1).$$

**解** (1) 要使函数有意义,须有

$$\begin{cases} 1+x \geq 0, \\ 1 - \sqrt{1+x} \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x \neq 0, \end{cases}$$

故函数的定义域为  $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$ .

(2) 要使函数有意义,须有

$$\begin{cases} 16-x^2 \geq 0, \\ x+1 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4, \\ x > -1, \end{cases}$$

故函数的定义域为  $(-1, 4]$ .

[注意] 以解析式表示的函数,其定义域是使函数表达式有意义的自变量的一切实数值所

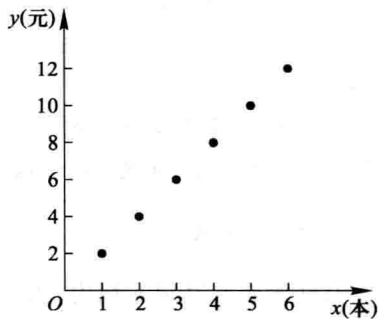


图 1-1



组成的数集. 例如分母不能为零, 偶次根式的被开方式为非负, 对数的真数大于零等.

**例 4** 判断函数  $f(x) = x + 1$  和函数  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  是否为同一函数?

**解**  $f(x)$  的定义域是  $(-\infty, +\infty)$ , 而  $g(x)$  的定义域是  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ , 两者定义域不同, 故它们不是同一函数.

**[注意]** 函数的定义域和对应法则是函数的两大要素, 当且仅当两个函数的定义域和对应法则都分别对应相同时, 才是同一函数.

**例 5** 如图 1-2 所示, 从边长为  $a$  的正三角形铁皮上剪一个矩形, 设矩形的一条边长为  $x$ , 周长为  $P$ , 面积为  $A$ , 试分别将  $P$  和  $A$  表示为  $x$  的函数.

**解** 设矩形另一边长为  $h$ , 则

$$h = \frac{a-x}{2} \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}(a-x)}{2},$$

故  $P = 2(x+h) = (2-\sqrt{3})x + \sqrt{3}a, x \in (0, a);$

$$A = xh = \frac{\sqrt{3}}{2}ax - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2, x \in (0, a).$$

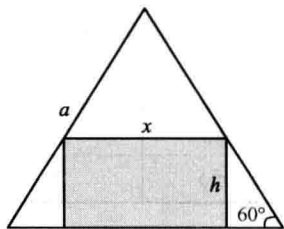


图 1-2

**[说明]** 建立实际问题中的函数关系式, 关键是找到变量之间的依赖关系, 同时注意给出函数的定义域. 实际问题中, 函数的定义域由实际意义确定.

### 3. 分段函数

有些函数在其定义域内, 当自变量在不同的范围内取值时, 要用不同的解析式表示, 这类函数称为分段函数. 如符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

是一个分段函数, 定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 如图 1-3 所示.

**例 6** 设  $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0, \\ 1-x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$  求  $f(0)$ 、 $f\left(\frac{1}{2}\right)$  和  $f(2)$ , 并作出函数的图像.

**解**  $f(0) = 2^0 = 1, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, f(2) = 1$ , 函数图像如图 1-4 所示.

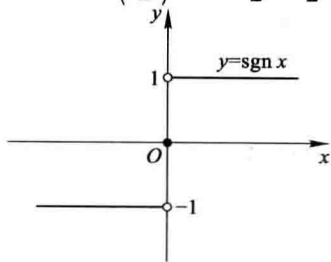


图 1-3

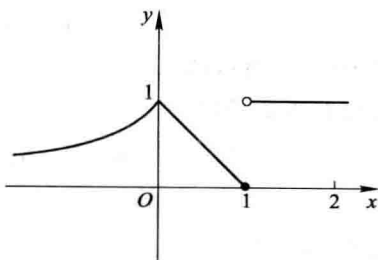


图 1-4