张量分析概要及演算

余天庆　熊　睿　编著

清华大学出版社

余天庆　熊　睿　编著

张量分析概要及演算

清华大学出版社

内容简介

本书概要地讲述了《张量分析及在力学中的应用》的各章内容之精华，并给出了该书的全部习题全解。全书共分9章，第1、2章介绍张量的基础知识，第3～6章介绍张量代数、张量分析和黎曼空间的曲率，第7、8章介绍张量分析在弹性力学和损伤力学中的应用，第9章介绍Matlab/Mathematica在矩阵和张量演算中的应用。本书可作为大学数学、物理、力学、天文、航空、航天、土木、水利、交通、信息和管理学科的研究生和高年级大学生的参考教材，也可供相关专业的研究人员、工程技术人员和青年教师自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

张量分析概要及演算/余天庆，熊睿编著. --北京：清华大学出版社，2014

ISBN 978-7-302-35655-4

Ⅰ. ①张… Ⅱ. ①余… ②熊… Ⅲ. ①张量分析－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O183.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第053006号

责任编辑：佟丽霞 赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：赵丽敏
责任印制：宋 林

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市金元印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　　**印　　张**：10.25　　**字　　数**：205千字
版　　次：2014年6月第1版　　**印　　次**：2014年6月第1次印刷
印　　数：1～2500
定　　价：25.00元

产品编号：050411-01

前　　言

“张量分析”是数学、物理和力学等相关专业的重要课程之一，也是相关专业硕士研究生的必修课程。

为了帮助读者更好地学习这门课程，熟练掌握张量的知识，我们根据多年的教学经验在编撰《张量分析及应用》修订版《张量分析及在力学中的应用》的同时，编撰了《张量分析概要及演算》一书。本书作为《张量分析及在力学中的应用》的姊妹篇，旨在使广大读者更有针对性地理解有关张量的基本概念，快速掌握基本知识，熟练掌握基本解题方法与解题技巧，进而为更好地将张量这一数学工具运用到不同的专业领域打下良好基础。

在笔者执教张量分析这门课的二十多年中，通过教学跟踪调查，发现不论是部属大学还是省属大学的研究生和部分专业的高年级本科生，在学习张量的过程中亟需一本配套教材，而本书很好地契合了他们的数学基础水平和专业知识储备情况，满足了他们的迫切需求。

本书作为一本配套教材具有以下特点：

(1) 理论严谨、条理清晰、讲解用语得当；

(2) 起点和理论高度适宜于教学研究型、研究型大学；

(3) 用知识概要和习题全解的形式讲解了张量分析在弹性力学和损伤力学中的应用；

(4) 增添了计算机(Matlab/Mathematica)解题方法。

考虑到张量分析这门课程的特点，我们在内容上做了以下独特安排：

课程路线图　从张量的整体知识体系出发，对各个章节在全书中的位置、重要程

度，以及与其他章节之间的内在关系作了清晰明了的阐述，使学生迅速辨明学习方向和重点。

知识点概要 集中概念，总结性质和定理，使知识系统得以清晰展现，便于掌握，帮助读者完善自己的张量体系。

习题演算 给出了《张量分析及在力学中的应用》各章习题的答案。利用给出的详细解答过程疏通知识点的来龙去脉，从而帮助读者迅速定位解题方法来源，更好地帮助读者做到融会贯通。

硕士研究生熊睿参与了本书的修订工作，全书由余天庆统稿和审定。清华大学出版社编辑佟丽霞女士给予了很大的支持，在此一并表示感谢。

同行老师和学生们对本书撰写提供的宝贵意见和建议，对本书的撰写工作起到了积极作用，在此表示衷心感谢。还希望今后读者给予更多的支持和关心。

由于作者水平有限，书中定有不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2014年4月

清华大学出版社 教学资源支持

尊敬的老师：您好！

为了您更好地开展教学工作，提高教学质量，我们将通过两种方式为您提供与教材配套的教学资源。

方式一：请您登录清华大学出版社教师服务网：http://www.wqbook.com/teacher 清华大学教师服务网是隶属于清华大学出版社数字出版网“文泉书局”的频道之一，将为各位老师提供高效便捷的免费索取样书、电子课件、申报教材选题意向、清华社各学科教材展示、试读等服务。

方式二：请您完整填写如下教辅申请表，加盖公章后传真给我们，我们将会为您提供与教材配套的教学资源。

主教材名				
作者			ISBN	
申请教辅资料				
申请使用单位	（学校）　　（院系） (课程名称) （学期）采用本教材　　册			
主讲教师	姓名		电话	
	通信地址		邮编	
	e-mail		MSN/QQ	
声明	保证本材料只用于我校相关课程教学，不用本材料进行商业活动			
您对本书的意见		系/院主任：________（签字） （系 / 院办公室章） ____年____月____日		

编辑联系方式：　100084　北京市海淀区双清路学研大厦

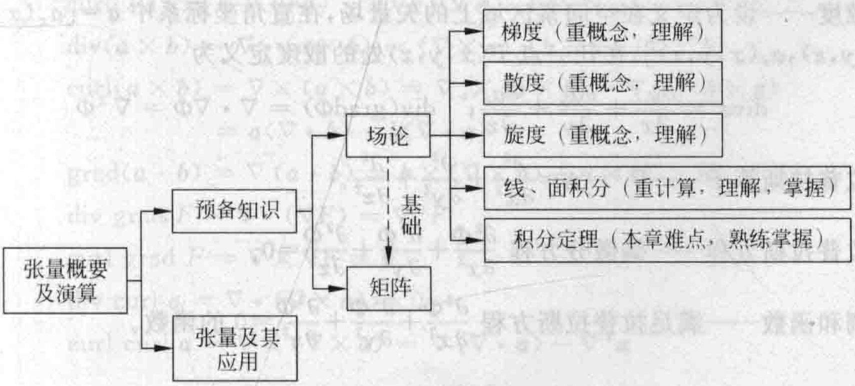
清华大学出版社理工分社　　佟丽霞

电话：010-62770175-4156　　邮箱：tonglx@tup.tsinghua.edu.cn

目录

第1章 场论

课程路线图



1.1 纯量场的梯度

知识点概要

标量场——如果空间里的每一点都对应着每个物理量的一个确定的值，则称在此空间中存在着该物理量的场。如果物理量是纯数量，则称这个场是标量场。

矢量场——如果物理量是矢量，则称这个场是矢量场。

梯度——若在标量场 $\Phi(P)$ 中的一点 P 处，存在这样的矢量 $\boldsymbol{G}$，其方向为函数 $\Phi(P)$ 在点 P 处变化率最大的方向，其模是这个最大变化率的数值，则称矢量 $\boldsymbol{G}$ 为函数 $\Phi(P)$ 在点 P 处的梯度，记作 $\mathrm{grad}\Phi$，即 $\mathrm{grad}\Phi=\boldsymbol{G}$。

哈密顿算子 ∇ ——∇ 既是一个微分运算符号，同时又应当作矢量看待。

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},\quad \mathrm{grad}\Phi=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi=\nabla\Phi$$

方向导数——点 P 与单位矢量 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 给定时，过点 P 沿 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 的方向作直线。在 l 上取与点 P 邻近的一点 Q，令 $\overline{PQ}=S$，当 $Q\to P$ 时，比例式 $\dfrac{\Delta\Phi}{S}=\dfrac{\Phi(Q)-\Phi(P)}{\overline{PQ}}$ 的极限为函数 $\Phi(P)$ 在点 P 处沿 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 的方向导数。

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S}=\mathrm{grad}\Phi\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}S}=\nabla\Phi\cdot\boldsymbol{a}$$

1.2 矢量场的散度

知识点概要

散度——设为定义在空间某区域上的矢量场，在直角坐标系中 $\boldsymbol{a}=[a_x(x,y,z),a_y(x,y,z),a_z(x,y,z)]$，在任一点 $P(x,y,z)$ 处的散度定义为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z};\quad \mathrm{div}(\mathrm{grad}\Phi)=\nabla\cdot\nabla\Phi=\nabla^2\Phi$$

拉普拉斯算子——$\nabla^2=\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$。

拉普拉斯方程——偏微分方程 $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$。

调和函数——满足拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$ 的函数。

1.3 矢量场的旋度

知识点概要

矢量场的旋度——$\mathrm{curl}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}$$

1.4 关于梯度、散度、旋度的公式

知识点概要

设 F、G 为标量场，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为矢量场，并设它们连续且存在二阶偏导数，则有如下公式成立：

$$\mathrm{grad}(F+G)=\nabla(F+G)=\nabla F+\nabla G$$
$$\mathrm{grad}(FG)=\nabla(FG)=G\nabla F+F\nabla G$$
$$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b}$$
$$\mathrm{curl}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\times\boldsymbol{a}+\nabla\times\boldsymbol{b}$$
$$\mathrm{div}(F\boldsymbol{a})=\nabla\cdot(F\boldsymbol{a})=(\nabla F)\cdot\boldsymbol{a}+F(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$$
$$\mathrm{curl}(F\boldsymbol{a})=\nabla\times(F\boldsymbol{a})=(\nabla F)\times\boldsymbol{a}+F(\nabla\times\boldsymbol{a})$$
$$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})$$
$$\begin{aligned}\mathrm{curl}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\nabla_{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-\nabla_{b}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\\&=\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\end{aligned}$$
$$\mathrm{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})$$
$$\mathrm{div\ grad}\ F=\nabla\cdot(\nabla F)=\nabla^2F$$
$$\mathrm{curl\ grad}\ F=\nabla\times\nabla F=\boldsymbol{0}$$
$$\mathrm{div\ curl}\ \boldsymbol{a}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$$
$$\mathrm{curl\ curl}\ \boldsymbol{a}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a}$$

1.5 梯度、散度、旋度定义的不变性

知识点概要

不变性——标量场的梯度($\mathrm{grad}\Phi$)、矢量场的散度($\mathrm{div}\boldsymbol{a}$)与正交坐标系的选择无关，矢量场的旋度($\mathrm{curl}\boldsymbol{a}$)与右手系的正交坐标系的取法无关。

正交变换——点 P 在两共原点 O 的坐标系中的坐标为(x_1,x_2,x_3)和$(\overline{x_1},\overline{x_2},$

$\overline{x_3}$)。$\begin{cases}\overline{x_1}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ \overline{x_2}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ \overline{x_3}=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{cases}$，式中 a_{ij} 中的下标 $i,j=1,2,3$ 分别表示 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3$ 轴与 x_1,x_2,x_3 轴之间的方向余弦。也称纯旋转变换。

仿射变换——如果两坐标系不共原点，且旧坐标系($x_1x_2x_3$)的原点 O 在新坐标系 ($\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3$)中的坐标为($\bar{c}_1,\bar{c}_2,\bar{c}_3$)时，点 P 在两坐标系中的坐标为 (x_1,x_2,x_3)和($\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3}$)。$\begin{cases}\bar{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\bar{c}_1\\ \bar{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\bar{c}_2\\ \bar{x}_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\bar{c}_3\end{cases}$，式中 a_{ij} 中的下标 $i,j=1,2,3$ 分别表示 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3$ 轴与 x_1,x_2,x_3 轴之间的方向余弦。也称平移加旋转变换。

纯旋转变换——也称正交变换，如：

$$\begin{cases}\bar{\boldsymbol{e}}_1=(\bar{\boldsymbol{e}}_1\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1+(\bar{\boldsymbol{e}}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2+(\bar{\boldsymbol{e}}_1\cdot\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3\\ \quad=a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{12}\boldsymbol{e}_2+a_{13}\boldsymbol{e}_3\\ \bar{\boldsymbol{e}}_2=(\bar{\boldsymbol{e}}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1+(\bar{\boldsymbol{e}}_2\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2+(\bar{\boldsymbol{e}}_2\cdot\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3\\ \quad=a_{21}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2+a_{23}\boldsymbol{e}_3\\ \bar{\boldsymbol{e}}_3=(\bar{\boldsymbol{e}}_3\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1+(\bar{\boldsymbol{e}}_3\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2+(\bar{\boldsymbol{e}}_3\cdot\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3\\ \quad=a_{31}\boldsymbol{e}_1+a_{32}\boldsymbol{e}_2+a_{33}\boldsymbol{e}_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1=(\boldsymbol{e}_1\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_1)\bar{\boldsymbol{e}}_1+(\boldsymbol{e}_1\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_2)\bar{\boldsymbol{e}}_2+(\boldsymbol{e}_1\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_3)\bar{\boldsymbol{e}}_3\\ \quad=a_{11}\bar{\boldsymbol{e}}_1+a_{21}\bar{\boldsymbol{e}}_2+a_{31}\bar{\boldsymbol{e}}_3\\ \boldsymbol{e}_2=(\boldsymbol{e}_2\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_1)\bar{\boldsymbol{e}}_1+(\boldsymbol{e}_2\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_2)\bar{\boldsymbol{e}}_2+(\boldsymbol{e}_2\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_3)\bar{\boldsymbol{e}}_3\\ \quad=a_{12}\bar{\boldsymbol{e}}_1+a_{22}\bar{\boldsymbol{e}}_2+a_{32}\bar{\boldsymbol{e}}_3\\ \boldsymbol{e}_3=(\boldsymbol{e}_3\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_1)\bar{\boldsymbol{e}}_1+(\boldsymbol{e}_3\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_2)\bar{\boldsymbol{e}}_2+(\boldsymbol{e}_3\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_3)\bar{\boldsymbol{e}}_3\\ \quad=a_{13}\bar{\boldsymbol{e}}_1+a_{23}\bar{\boldsymbol{e}}_2+a_{33}\bar{\boldsymbol{e}}_3\end{cases}$$

1.6 线积分与面积分

知识点概要

线积分——矢函数 $\boldsymbol{a}$ 沿有向曲线的线积分为

$$\int_l \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_l \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s=\int_a^b\left(a_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+a_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+a_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s$$

切平面——假定曲面 S 上 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{r}_u$、$\boldsymbol{r}_v$ 在曲面上任一点处是线性无关的，过 P 点由 $\boldsymbol{r}_u$、$\boldsymbol{r}_v$ 决定的平面叫做曲面在 P 点的切平面。

法矢量——与切平面垂直的矢量 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$，法向单位矢量是 $\dfrac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$。

有向曲面——为了区分曲面的两侧，常常取定其中的一侧作为曲面的正侧，并规定曲面的法线单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 指向正侧；如果曲面是封闭的，则按习惯总是取其外侧为正侧。这种取定了正侧的曲面称为有向曲面。

曲面面元——$\mathrm{d}S=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sqrt{\boldsymbol{r}_u^2\boldsymbol{r}_v^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$。

曲面面积——$S=\iint\limits_D|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_D\sqrt{\boldsymbol{r}_u^2\boldsymbol{r}_v^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$。

面积分——矢量场 $\boldsymbol{a}$ 与曲面 S 的法线单位矢量场 $\boldsymbol{n}$ 的内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$ 是标量，这个标量场在 S 上的面积分

$$\iint\limits_S\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint\limits_D\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_D\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

（D 是对应于曲面 S 的 uv 平面上的区域）

注意：当曲面 S 用 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 给定时，以曲线坐标 (u,v) 表示的法线单位矢量 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v/|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|$ 与给出 S 的方向的法线单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 一致，则

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$$

由于

$$\mathrm{d}S=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_S\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S&=\iint\limits_D\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\iint\limits_D\left\{a_x\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}+a_y\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u}\\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\iint\limits_D\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned}$$

1.7 积分定理

知识点概要

平面上的格林定理——如果在区域 D 与它的边界∂D上，P，Q，$\frac{\partial P}{\partial y}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}$连续，则

$$\int_{\partial D}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

斯托克斯定理——如果在区域 D 与它的边界∂D上，P，Q，$\frac{\partial P}{\partial y}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}$连续，则

$$\int_{\partial S}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}S=\iint_S(\mathrm{curl}\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

或

$$\int_{\partial S}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z)=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

可见，平面上的格林定理是斯托克斯定理的特殊情况。

高斯散度定理——$\iint_S\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_V\mathrm{div}\boldsymbol{a}\mathrm{d}V$

或

$$\iint_S(P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

习题演算

1.1 设 $\Phi(x,y,z)=3x^2y-y^3z^3$，试求在点 $P(1,-2,1)$的$\nabla\Phi$（即 $\mathrm{grad}\Phi$）。

解：$\nabla\Phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{k}\right)(3x^2y-y^3z^2)$

$$=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y-y^3z^2)+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y-y^3z^2)+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}(3x^2y-y^3z^2)$$

$$=6xy\boldsymbol{i}+(3x^2-3y^2z^2)\boldsymbol{j}-2y^3z\boldsymbol{k}$$

$$=-12\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}-16\boldsymbol{k}$$

1.2 设(1)$\Phi=\ln|r|$，(2)$\Phi=\frac{1}{r}$，试求$\nabla\Phi$。

解：(1) $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则

$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\Phi = \ln|\boldsymbol{r}| = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$$

$$\nabla\Phi = \frac{1}{2}\nabla\ln(x^2+y^2+z^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2+z^2)+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2+z^2)+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\ln(x^2+y^2+z^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{i}\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}+\boldsymbol{j}\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}+\boldsymbol{k}\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$= (x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})/(x^2+y^2+z^2)$$

$$= \boldsymbol{r}/r^2$$

(2) $$\nabla\Phi = \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \nabla\left[(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \boldsymbol{i}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2x\right]+\boldsymbol{j}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2y\right]$$

$$+\boldsymbol{k}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2z\right]$$

$$= -\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

1.3　试证 $\nabla r^n = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$。

证明：$$\nabla r^n = \nabla(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^n = \nabla(x^2+y^2+z^2)^{n/2}$$

$$= \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}[(x^2+y^2+z^2)^{n/2}]+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}[(x^2+y^2+z^2)^{n/2}]$$

$$+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}[(x^2+y^2+z^2)^{n/2}]$$

$$= \boldsymbol{i}\left[\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}2x\right]+\boldsymbol{j}\left[\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}2y\right]$$

$$+\boldsymbol{k}\left[\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}2z\right]$$

$$= n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$$

$$= n(r^2)^{\frac{n}{2}-1}\boldsymbol{r}$$

$$= nr^{n-2}\boldsymbol{r}$$

注意，若 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{r}_1$，式中 $\boldsymbol{r}_1$ 是 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量，则 $\nabla r^n = nr^{n-1}\boldsymbol{r}_1$。

1.4　试求 $\nabla(3r^2-4\sqrt{r}+6/\sqrt[3]{r})$。

解：原式 $=(6-2r^{-\frac{3}{2}}-2r^{-\frac{7}{3}})\boldsymbol{r}$。

1.5 试证$\nabla\Phi$垂直于曲面$\Phi(x,y,z)=c$,式中c为常数。

证明:设$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$是曲面上点$P(x,y,z)$的位矢,则$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$在曲面过点$P$的切平面内。

但

$$\mathrm{d}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathrm{d}z=0$$

或

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k})=0$$

即$\nabla\Phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$,所以$\nabla\Phi$垂直于$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,也就垂直于曲面。

1.6 试求曲面$2xz^2-3xy-4x=7$在点$(1,-1,2)$的切平面方程。

解:$\nabla(2xz^2-3xy-4x)=(2z^2-3y-4)\boldsymbol{i}-3x\boldsymbol{j}+4xz\boldsymbol{k}$过点$(1,-1,2)$曲面的法线是$7\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$,过位矢$\boldsymbol{r}_0$的一点并与法线$\boldsymbol{N}$垂直的平面方程$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{N}=0$,所以要求的方程是

$$[(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})-(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})]\cdot(7\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})=0$$
$$7(x-1)-3(y+1)+8(z-2)=0$$

1.7 试求曲面$z=x^2+y^2$在点$(2,-1,5)$的切平面方程与法线方程。

解:$4x-2y-z=5,\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-5}{-1}$

或$x=4t+2,y=-2t-1,z=-t+5$。

1.8 试证Φ的最大变化率(即最大方向导数)的模与方向就是$\nabla\Phi$的模与方向。

证明:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\\&=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}\right)\\&=\nabla\Phi\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\end{aligned}$$

因为$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$是单位矢量,$\nabla\Phi\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$是$\nabla\Phi$沿$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$方向的投影。当$\nabla\Phi$与$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$同方向时,其投影为最大,所以方向导数$\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}$的最大值是$|\nabla\Phi|$,$\nabla\Phi$与$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$同向。

1.9 设$\Phi=axy^2+byz+cz^2x^3$在点$P(1,-2,1)$的梯度$\nabla\Phi$平行于z轴,其模为64,试求常数a、b、c的值。

解:$a=b,b=24,c=-8$。

1.10 试求曲面$x^2+y^2+z^2=9$与$z=x^2+y^2-3$在点$(2,-1,2)$的夹角。

解:两曲面在某点的夹角定义为两曲面过该点法线之间的夹角。过点(2,-1,