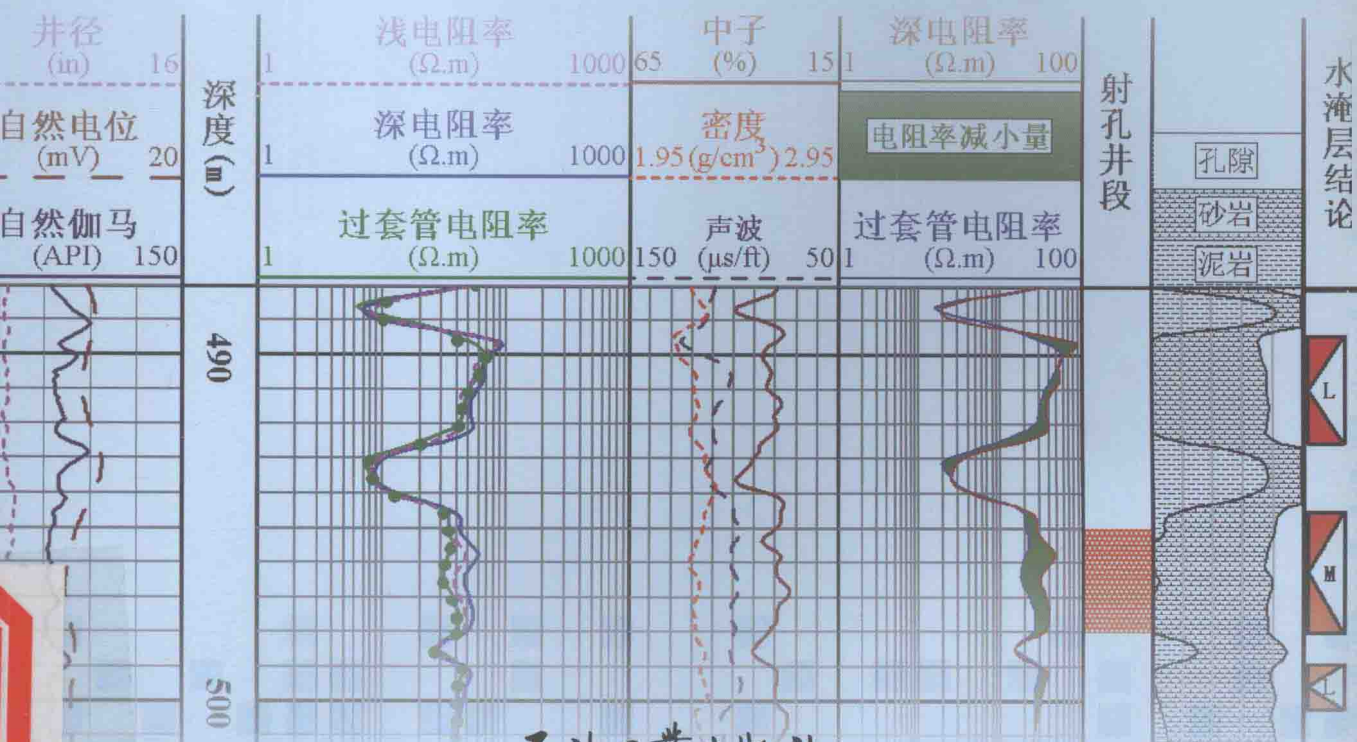


FORMATION RESISTIVITY LOG THROUGH CASING

过套管地层电阻率测井

匡立春 孙中春 周继宏 罗兴平 编著



石油工业出版社

过套管地层电阻率测井

匡立春 孙中春 周继宏 罗兴平 编著

石油工业出版社

内 容 提 要

本书较系统地介绍了过套管地层电阻率测井的基本理论、基本方法、仪器的测量原理、资料的处理方法以及过套管地层电阻率测井资料在石油勘探和开发中的应用。

本书适合从事油气勘探和开发的测井、地质及油藏工作者参考使用，也可作为高等院校相关专业师生的参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

过套管地层电阻率测井 / 匡立春等编著 .

北京 : 石油工业出版社, 2013.5

ISBN 978-7-5021-9532-8

I . 过…

II . 匡…

III . 电阻率测井

IV . P631.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 048004 号

出版发行 : 石油工业出版社

(北京安定门外安华里 2 区 1 号 100011)

网 址 : <http://www.petropub.com.cn>

编辑部 : (010) 64523736 发行部 : (010) 64523620

经 销 : 全国新华书店

印 刷 : 北京中石油彩色印刷有限责任公司

2013 年 6 月第 1 版 2013 年 6 月第 1 次印刷

787×1092 毫米 开本 : 1/16 印张 : 11.5

字数 : 281 千字

定价 : 85.00 元

(如出现印装质量问题, 我社发行部负责调换)

版权所有, 翻印必究

前言

在裸眼井中,电阻率测井是发现和评价油气层不可或缺的方法。如果在套管井中也能进行电阻率测井,将对储层重新评价、油藏开发的动态监测及油藏剩余油气资源的评价等诸多方面有重要意义。直到十几年前过套管地层电阻率测井仪正式投入油田服务以前,在套管井中测量地层的电阻率还一直是个梦想。过套管地层电阻率测井是一种新的测井方法,它突破了金属套管的制约,能在普通的套管井中测量地层的电阻率。

二十多年来,国内外关于过套管地层电阻率测井技术的研究,无论是理论、方法、仪器研发方面,还是资料处理与解释方法和地质应用方面,都十分活跃。有关过套管地层电阻率测井技术的文献资料散见于专利文献、学术期刊、研究报告和技术资料中。

本书是产、学、研结合的产物。新疆油田公司孙中春在担任中国石油天然气集团公司“过套管地层电阻率测井技术研究及推广应用”项目测井解释岗位技术专家的三年期间(2009—2011),针对过套管地层电阻率测井在新疆油田的应用问题,组织新疆油田公司与长江大学的有关研究人员共同研究。长江大学周继宏负责过套管地层电阻率测井资料的处理和解释方法研究。新疆油田公司罗兴平负责过套管地层电阻率测井资料的地质应用研究。理论密切联系实际,大学和油田优势互补。本书展现了作者三年来的研究成果,主要体现在:过套管地层电阻率测井资料的预处理方法及环境影响校正方法,推广过套管地层电阻率测井技术应用到探井的流体识别。

本书的撰写历时近三年,由匡立春、孙中春策划、组织撰写。2010年1月确定编写提纲,落实编写人;2011年6月申报出版计划;2012年10月,完成全部书稿。全书共分为五章,第一章、第三章、第四章由周继宏编写,第二章由孙中春编写,第五章由匡立春、罗兴平编写,罗兴平负责全书统稿。

在本书的撰写过程中得到了众多单位和个人的支持与帮助。提供资料的单位和个人主要有:中国石油新疆油田公司(王晓光、范小秦)、中国石油西部钻探测井公司(陈斌、姜涛)、中国石油集团测井有限公司(秦民君、刘东明)及吐哈事业部、吐哈油田鄯善采油厂、武汉海阔科技有限公司。新疆油田公司勘探开发研究院潘拓、王振林、樊海涛、王刚和张全等人参与了过套管地层电阻率测井资料及其相关资料的收集和整理。长江大学研究生姜明亮、王雷和袁瑞参与了书稿的整理及图件绘制。同时,还得到了新疆油田公司勘探开发研

究院、长江大学地球物理与石油资源学院及石油工业出版社等单位许多专家同行的支持和帮助，作者对他们表示衷心的感谢！另外，还有许多单位和个人未能一一提及，在此，作者向他们表示真诚的歉意！

由于作者水平所限，错误之处请读者不吝指正！

2012 年 10 月

CONTENTS 目录

第一章 过套管地层电阻率测井的基本理论与基本原理	(1)
第一节 套管井中的电场	(1)
第二节 过套管地层电阻率测井的基本原理	(14)
第二章 过套管地层电阻率测井仪器的测量方法	(28)
第一节 单极供电测量方法	(28)
第二节 双极供电测量方法	(34)
第三节 仪器的探测特性分析	(49)
第三章 过套管地层电阻率测井资料预处理	(53)
第一节 过套管地层电阻率测井资料特点	(53)
第二节 测量值选点方法	(55)
第三节 数据插值方法	(61)
第四节 深度校正方法	(66)
第四章 过套管地层电阻率测井资料的环境校正	(70)
第一节 测井资料的主要影响因素及其分析方法	(70)
第二节 套管的影响分析与套管接箍校正方法	(77)
第三节 水泥环的影响分析与校正方法	(85)
第四节 围岩的影响与校正方法	(95)
第五节 仪器的 K 因子影响与校正方法	(99)
第五章 过套管地层电阻率测井资料的应用	(104)
第一节 油层注水开发过程中电阻率的变化特征	(105)
第二节 水淹层识别与剩余油饱和度评价	(115)
第三节 油层动用情况与油水界面变化监测	(135)
第四节 油藏剩余油分布研究	(143)
第五节 套管井储层流体识别方法探究	(148)
参考文献	(175)

第一章 过套管地层电阻率测井的基本理论与基本原理

早在 1939 年，苏联科学家 L. M. Alpin 就提出了过套管地层电阻率测井的初步设想，并申请了专利。半个世纪之后，美国卡罗拉多矿业学院地球物理系 A. A. Kaufman 教授提出了一种在套管井中测量地层电阻率的方法，并申请了专利（专利于 1989 年获得批准）。1990 年，他发表了套管井中电场分析的研究成果。他通过分析直流电源在套管井中产生的电场，认为电场可分为三个场区：近场区、中场区和远场区。其中，中场区是测量地层电阻率的理想区域，套管可类比于传输线。1993 年，他又提出了过套管地层电阻率测井基本理论——传输线模型及基本测井原理。本章以 Kaufman 等的理论研究成果为基础，介绍了过套管地层电阻率测井的基本理论与基本原理。

第一节 套管井中的电场

套管井中的电场分析是过套管地层电阻率测井的理论基础。为了便于理解，本节采用循序渐进的方法对套管井中的电场进行了分析。首先，将套管简化为无限长的圆柱导体，分析其电场的分布特征；然后，分析实际条件下套管井中的电场分布特征。

一、地层中无限长圆柱状良导体的电场特性

为了讨论方便，简化套管井模型。将金属套管简化为一个无限长的圆柱状良导体，如图 1-1-1 所示。

设圆柱体的半径为 a ，电阻率为 ρ_1 ，电导率为 σ_1 ；圆柱体周围地层的电阻率为 ρ_2 ，电导率为 σ_2 。供电电极 A 位于圆柱体的轴线上，并将此轴线设为 z 轴。由于轴的对称性，引入柱坐标系 (r, φ, z) ，设供电电极 A 位于坐标原点。由此，距 A 电极为 r 处电场中的电位 U 可表达为：

$$E = -\text{grad}U \quad (1-1-1a)$$

或

$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad (1-1-1b)$$

式中 E_z ——电场强度的垂直分量；

E_r ——电场强度的水平分量。

由于轴对称性，电位 U 仅与坐标 r 和 z 有关，并且关于平面 $z=0$ 对称，即：

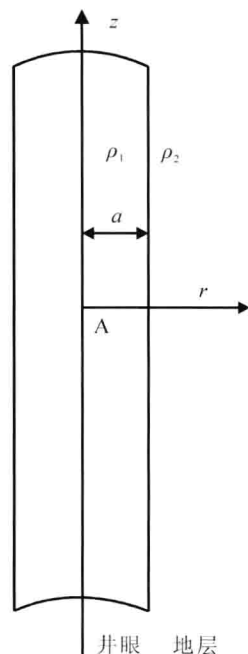


图 1-1-1 简化的套管井模型

$$U(r, z) = U(r, -z) \quad (1-1-2)$$

要满足库仑定律, 电位 U 必须满足以下条件:

(1) 圆柱体和地层中的电位 U 满足柱坐标下的拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (1-1-3)$$

(2) 在供电电极附近, 电位 U 趋向于由一个点电荷引起的电位, 即:

$$U \rightarrow \frac{\rho_1 I_0}{4\pi R} \quad (1-1-4)$$

式中 I_0 ——供电电极 A 流出的恒定电流;

R ——供电电极到观察点之间的距离。

(3) 在远离供电电极处, 即 $R \rightarrow \infty$ 时, 电位趋近于 0, 即:

$$U \rightarrow \frac{\rho_2 I_0}{4\pi R} \rightarrow 0 \quad (1-1-5)$$

(4) 在圆柱体和地层界面上, 电位 U 和电流密度 J_r 的法向分量为连续函数, 即:

$$\begin{cases} U_1 = U_2 \\ \sigma_1 \frac{\partial U_1}{\partial r} = \sigma_2 \frac{\partial U_2}{\partial r} \end{cases} \quad (1-1-6)$$

式中 U_1 ——圆柱体的电位;

U_2 ——地层中的电位;

σ_1 ——圆柱体的电导率;

σ_2 ——地层电导率。

由唯一性原理可知, 这四个唯一性条件决定了电位 U 及电场强度 E 。运用变量分离法, 考虑到圆柱体表面上的电荷引起的电位为一个有限值, 且关于 z 轴对称, 则拉普拉斯方程的解为:

$$\begin{cases} U_s^{(1)} = \int_0^\infty A_m^{(1)} I_0(mr) \cos(mz) dm & (r \leq a) \\ U_s^{(2)} = \int_0^\infty B_m^{(1)} K_0(mr) \cos(mz) dm & (r \geq a) \end{cases} \quad (1-1-7)$$

式中 $U_s^{(1)}$ ——由圆柱体表面电荷引起的井眼内部的电位;

$U_s^{(2)}$ ——由圆柱体表面电荷引起的井眼外部的电位;

$I_0(mr)$, $K_0(mr)$ ——修正的贝塞尔函数;

$A_m^{(1)}$, $B_m^{(1)}$ ——由电流 I_0 确定的待定系数。

由供电电极表面上的电荷引起的主电场的电位可以写成如下形式 (J. R. Wait, 1982):

$$\frac{\rho_1 I_0}{4\pi R} = \frac{\rho_1 I_0}{4\pi} \left(\frac{2}{\pi} \right) \int_0^\infty K_0(mr) \cos(mz) dm \quad (1-1-8)$$

其中：

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}$$

相应地，就可方便地表示出圆柱体内和地层中电位分别为：

$$\begin{cases} U_1 = \frac{\rho_1 I_0}{2\pi^2} \int_0^\infty [K_0(mr) + A_m I_0(mr)] \cos(mz) dm \\ U_2 = \frac{\rho_2 I_0}{2\pi^2} \int_0^\infty B_m K_0(mr) \cos(mz) dm \end{cases} \quad (1-1-9)$$

无论 A_m 和 B_m 如何取值，式 (1-1-9) 均满足以上四个条件中的 (1)、(2) 和 (3)。由式 (1-1-7) 和式 (1-1-9) 的傅里叶变换，可得：

$$\begin{cases} K_0(ma) + A_m I_0(ma) = \mu B_m K_0(ma), \mu = \rho_2 / \rho_1 \\ K'_0(ma) + A_m I'_0(ma) = B_m K'_0(ma) \end{cases} \quad (1-1-10)$$

式中 $I'_0(ma)$, $K'_0(ma)$ ——修正的贝赛尔函数的一阶导数。

考虑到 $I'_0(ma) = I_1(ma)$ 和 $K'_0(ma) = -K_1(ma)$ ，解这个方程组，得系数 A_m 为：

$$A_m = \frac{(\mu - 1)K_0(ma)K_1(ma)}{I_0(ma)K_1(ma) + \mu I_1(ma)K_0(ma)}$$

当 $r \rightarrow 0$ 时， $I_0(ma) \rightarrow 0$ ，利用下式：

$$I_0(x)K_1(x) + I_1(x)K_0(x) = \frac{1}{x}$$

可得圆柱体中轴的电位表达式为：

$$U_1(\alpha) = \frac{\rho_1 I_0}{4\pi a} \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\mu - 1)K_0(x)K_1(x)}{1 + (\mu - 1)I_1(x)K_0(x)} \cos(\alpha x) dx \right] \quad (1-1-11)$$

式中， $\alpha = z/a$ ，即观察点到供电电极的距离 z 被井眼半径 a 归一化值，称为归一化源距。

由式 (1-1-11) 可得电场强度和电位的二阶导数：

$$E_z = \frac{\rho_1 I_0}{4\pi a^2} \left[\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{\pi} (\mu - 1) \int_0^\infty \frac{x^2 K_0(x)K_1(x)}{1 + (\mu - 1)I_1(x)K_0(x)} \sin(\alpha x) dx \right] \quad (1-1-12)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = \frac{\rho_1 I_0}{4\pi a} \left[\frac{2}{\alpha^3} - \frac{2}{\pi} (\mu - 1) \int_0^\infty \frac{x^3 K_0(x)K_1(x)}{1 + (\mu - 1)I_1(x)K_0(x)} \cos(\alpha x) dx \right] \quad (1-1-13)$$

函数 $(1/C_1) E_z$ 和 $(1/C_2)(\partial^2 U / \partial \alpha^2)$ 的图解结果如图 1-1-2 和图 1-1-3 所示，其中 $C_1 = \rho_1 I_0 / 4\pi a^2$ ， $C_2 = \rho_1 I_0 / 4\pi a$ 。

通过对图解结果的分析，可得出如下结论：

(1) 存在三个场区，即近场区、中场区和远场区。在每一个场区，电场的特性各不相同。

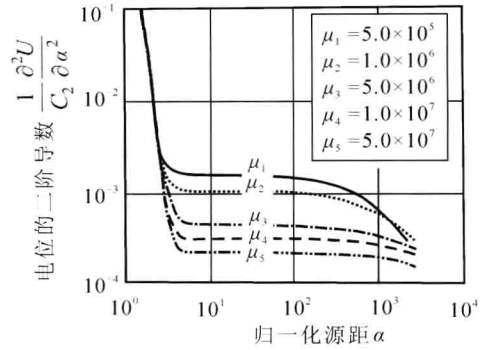
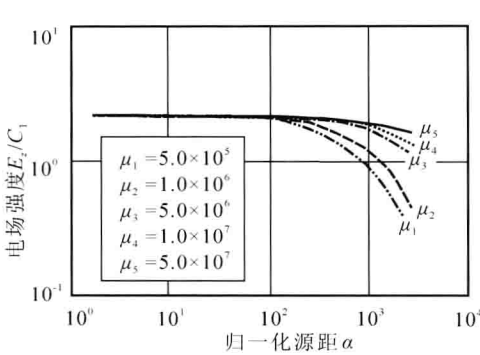


图 1-1-2 不同电导率比值时井轴上的电场强度 图 1-1-3 不同电导率比值时井轴上电位二阶导数

(2) 在近场区, 电场特性随着观察点与供电电极 A 的距离变化而变化。在供电电极附近, 电场与点电荷引起的电场特性一致, 电场沿径向方向。随着归一化源距 α 的进一步增大, 该区域的电场强度的大小快速接近渐近线 $I_0/2S_1$ (S_1 为圆柱体电导, 为 $\sigma_1 \pi a^2$), 电场沿井轴方向。在近场区, 电场强度可以近似表示为:

$$E_z \approx \frac{I_0}{2S_1} - \frac{3.0I_0}{S_1} e^{-3.83\alpha}, \quad \alpha < 10 \quad (1-1-14)$$

当距离为圆柱体半径的若干倍时, 等式右边的第二项可以忽略。

(3) 若 μ 取值合适, 中场区的范围相对较大, 并随着地层电阻率和圆柱体电阻率比值的增加而增大。例如, 当 $\mu=10^7$ 时, 中场区的归一化源距 α 可达到 1000 甚至更大。如图 1-1-2 和图 1-1-3 所示, 从曲线上可以看出, 在中场区的主要部分, 电场强度和电位 U 的二阶导数的变化相当缓慢, 仅当 α 相对较大时, E_z 、 $\partial^2 U / \partial \alpha^2$ 才开始迅速减小。

(4) 式 (1-1-12) 表明, 中场区内的电场强度可以表示为:

$$E_z \approx \frac{I_0}{2S_1} e^{-z/\sqrt{\rho_2 S_1}} \quad (1-1-15)$$

其中:

$$S_1 = \sigma_1 \pi a^2$$

特别地, 如果距供电电极的距离满足如下条件:

$$z < \sqrt{\rho_2 S_1} \quad (1-1-16)$$

则式 (1-1-15) 可以近似表示为:

$$E_z \approx E_z^{(1)} + E_z^{(2)} \quad (1-1-17)$$

式中, $E_z^{(1)} = I_0/2S_1$ 表示当井眼周围介质为绝缘体时的电场强度, 并且与距离无关。但是:

$$E_z^{(2)} \approx -\frac{I_0 z}{2S_1^{3/2}} \sqrt{\sigma_2} \quad (1-1-18)$$

随距离的变化而变化, 它取决于地层的电阻率。因此, 如果满足条件式 (1-1-16), 那么在

中场区内的电场强度为：

$$E_z \approx \frac{I_0}{2S_1} - \frac{I_0 z}{2S_1^{3/2}} \sqrt{\sigma_2} \quad (1-1-19)$$

相应地，当 $z < \sqrt{\rho_2 S_1}$ 时，电位的二阶导数为：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \approx \frac{I_0}{2S_1^{3/2}} \sqrt{\sigma_2} \quad (1-1-20)$$

从而，通过测量表征地层中泄漏电流的电位二阶导数，可以基本确定井眼周围介质的电阻率。

(5) 在距供电电极较远处，即当：

$$z \gg \sqrt{\rho_2 S_1} \quad (1-1-21)$$

时，电场趋向于均匀介质中的电场。

(6) 由式 (1-1-21) 可知，中场区的外边界随电导 S_1 的变化而改变。当 S_1 下降时，中场区的范围会大大地缩小。

二、套管井中的电场特性

现假设套管可以用导电性良好的圆柱面模拟。该圆柱面介于井眼与地层之间，如图 1-1-4 所示。首先用公式表示出边界条件。在井眼内、外，电场均满足稳恒场的麦克斯韦方程组为：

$$\begin{cases} \text{curl } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}, & \text{div } \mathbf{E} = 0 \\ \text{curl } \mathbf{E} = 0, & \text{div } \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad (1-1-22)$$

在分界面 $r=a$ 上，边界条件为：

$$E_\phi^{(1)} = E_\phi^{(2)}, \quad E_z^{(1)} = E_z^{(2)} \quad (1-1-23)$$

$$H_\phi^{(2)} - H_\phi^{(1)} = S^* E_z \quad (1-1-24)$$

式中 $\mathbf{E}^{(1)}$ ——套管内电场强度；

$\mathbf{H}^{(1)}$ ——套管内磁场强度；

$\mathbf{E}^{(2)}$ ——套管外电场强度；

$\mathbf{H}^{(2)}$ ——套管外磁场强度；

E_z ——套管内电场垂向分量。

套管电导 S_c 和参数 S^* 的关系为：

$$\begin{cases} S_c = 2\pi a S^* \\ S^* = \sigma_c \Delta a \end{cases} \quad (1-1-25)$$

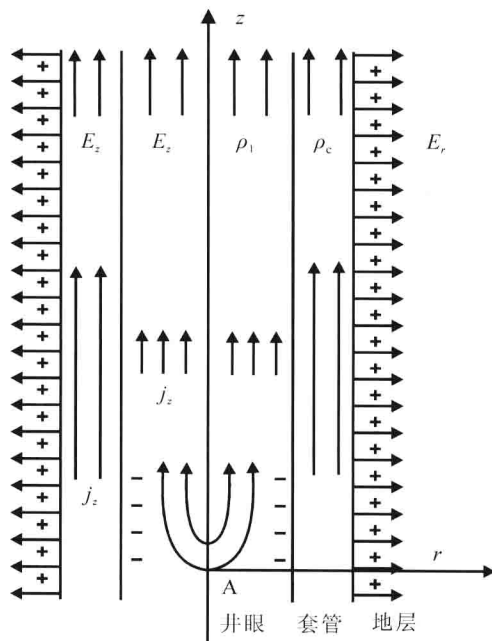


图 1-1-4 套管存在的电荷分布图

A—供电电极； ρ_1 —井眼电阻率； ρ_c —套管电阻率； E_z —电场垂向分量； E_r —电场径向分量； j_z —垂向电流密度

式中 σ_c ——套管的电导率；

Δa ——套管的厚度。

从而，根据式 (1-1-23) 和式 (1-1-24) 可得：电场强度的切向分量是连续函数；由于套管表面存在电流，磁场强度 H_φ 的切向分量是不连续的。

为了简化求解，引入标量电位 U 和矢量电位 $\mathbf{A}$ ，由方程组 (1-1-22) 可得：

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\text{grad } U \\ \mathbf{H} = \text{curl } \mathbf{A} \end{cases} \quad (1-1-26)$$

将式 (1-1-26) 代入方程组 (1-1-22) 中的第一个方程，可得：

$$\text{curl curl } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = -\sigma \text{ grad } U$$

令 $\text{div } \mathbf{A} = -\sigma U$ ，则有：

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (1-1-27)$$

假设矢量电位 $\mathbf{A}$ 仅有一个垂向分量，即：

$$\mathbf{A} = (0, 0, A_z)$$

此时：

$$\begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial z} = -\sigma U \\ \nabla^2 A_z = 0 \end{cases} \quad (1-1-28)$$

利用无限长圆柱体的结论，除在导体表面外，并眼内、外的电位可用下式表示：

$$\begin{cases} U_1 = \frac{\rho_1 I_0}{4\pi} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [K_0(mr) + B_1 I_0(mr)] \cos(mz) dm \\ U_2 = \frac{\rho_2 I_0}{4\pi} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B_2 K_0(mr) \cos(mz) dm \end{cases} \quad (1-1-29)$$

由方程组 (1-1-26) 的第一个方程可得：

$$\begin{cases} A_{1z} = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty [K_0(mr) + B_1 I_0(mr)] \frac{\sin(mz)}{m} dm & (r < a) \\ A_{2z} = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty B_2 K_0(mr) \frac{\sin(mz)}{m} dm & (r > a) \end{cases} \quad (1-1-30)$$

由方程组 (1-1-26) 可得：

$$\begin{cases} E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \\ H_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \end{cases} \quad (1-1-31)$$

值得注意的是，如果电位 U 是一个连续函数，则电场强度的切向分量也是连续的。

因此, 当 $r=a$ 时, 式 (1-1-23) 和式 (1-1-24) 可以改写成以下形式:

$$\begin{cases} U_1 = U_2 \\ \frac{\partial A_{2z}}{\partial r} - \frac{\partial A_{1r}}{\partial r} = S^* \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \quad (1-1-32)$$

将式 (1-1-29) 和式 (1-1-30) 代入式 (1-1-32) 中, 可得:

$$\begin{cases} K_0(ma) + B_1 I_0(ma) = \mu B_2 K_0(ma) \\ B_2 K_1(ma) - K_1(ma) + B_1 I_1(ma) = -S^* \rho_2 m B_2 K_0(ma) \end{cases}$$

相应地, 描述井眼中电场的系数 B_1 为:

$$B_1 = \frac{(\mu-1)K_0(x)K_1(x) - \mu dx^2 K_0^2(x)}{1 + (\mu-1)I_1(x)K_0(x) + \mu dx^2 I_0(x)K_0(x)} \quad (1-1-33)$$

其中:

$$\mu = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad S_0^* = \sigma_1 a, \quad d = \frac{S^*}{S_0^*} = \frac{\sigma_c}{\sigma_1} \frac{\Delta a}{a} \quad (1-1-34)$$

由式 (1-1-29) 可得, 在井轴上的电场强度和电位的二阶导数为:

$$\begin{cases} E_z = C_1 \left[\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty x B_1(x) \sin(\alpha x) dx \right] \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = C_2 \left[\frac{2}{\alpha^3} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty x^2 B_1(x) \cos(\alpha x) dx \right] \end{cases} \quad (1-1-35)$$

这些函数的特性同无限长圆柱体中讨论过的函数类似。图 1-1-5 为二阶导数 $(1/C_2)(\partial^2 U / \partial \alpha^2)$ 的曲线。

不同的是, 式 (1-1-35) 的计算结果表明, 中场区的电场强度和电位的二阶导数可以更为准确地用以下形式描述:

$$\begin{cases} E_z \approx \frac{I_0}{2S_c} e^{-z/\sqrt{\rho_2 S_c}} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \approx \frac{I_0}{2S_c^{3/2}} \sqrt{\sigma_2} e^{-z/\sqrt{\rho_2 S_c}} \end{cases} \quad (10 < \alpha < 10^3) \quad (1-1-36)$$

对比式 (1-1-15) 和式 (1-1-36) 可得, 如果井眼的电导和套管的电导相等, 则电场强度 E_z 在这两种情况下是一致的, 函数 $d^2 U / dz^2$ 也近似一致。

应当特别指出的是, 当套管存在时, 井眼内的电流密度比套管内部的电流密度小几个数量级, 但电场强度仍相同。这就使得只需要分析井轴上的电场即可。

由式 (1-1-36) 可得, 当 $z < \sqrt{\rho_2 S_c}$ 时, 在中场区内电位的二阶导数几乎是一个常数:

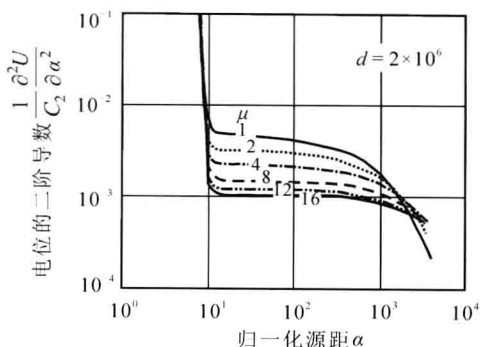


图 1-1-5 井轴上的电位二阶导数

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \approx \frac{I_0}{2S_c^{3/2}} \sqrt{\sigma_2} \quad (1-1-37)$$

从而中场区内电场强度和电位的二阶导数满足极其简单的方程，而不用求解复杂的积分和修正的贝塞尔函数。这种简化也反映了中场区内电场和电流的简单特性。在井眼中和套管内电场仅有垂向分量 E_z ，其提供了沿井轴方向传播的电流；相反地，在套管外，甚至在足够远的距离，径向分量 E_r 起主导作用，它提供了地层中的泄漏电流。因此，分别对待电场的垂向分量 E_z 和径向分量 E_r 是有用的。电场的这种几何特性即可把在中场区内的套管看作由导电介质包围的传输线。理解这个电场的特性对理解过套管地层电阻率的测量方法是至关重要的。

三、传输线模型

把套管内的井眼当作传输线，如上述讨论一样，仍将供电电极 A 位置设为坐标系原点。根据欧姆定律，电流流过一段微小长度的套管 dz ，电位相应的变化量 dU 为：

$$dU = -I(z) \frac{dz}{S_c} \quad (1-1-38)$$

式中 S_c ——套管的电导；

dz/S_c —— dz 长度套管的电阻；

$I(z)$ ——通过 z 点处套管横截面的电流。

式 (1-1-38) 取负号是因为 $dU = U(z+\Delta z) - U(z)$ ，且 $U(z) > U(z+\Delta z)$ ， $U(z)$ 为 z 点的电位。

由于泄漏电流的存在，沿套管流动的电流将发生变化。把套管周围电阻率为 ρ_2 的介质看作与套管并联。因此在 dz 内，泄漏电流 $dI_r = -dI(z)$ ，并且与电位 U 有如下关系：

$$U = -\frac{T}{dz} dI \quad (1-1-39)$$

式中 T ——单位长度介质径向电流的电阻。

由式 (1-1-38) 和式 (1-1-39) 可得：

$$\begin{cases} \frac{dU}{dz} = -\frac{1}{S_c} I(z) \\ \frac{dI}{dz} = -\frac{1}{T} U(z) \end{cases} \quad (1-1-40)$$

对式 (1-1-40) 求导数可得：

$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dz^2} = n^2 U \\ \frac{d^2 I}{dz^2} = n^2 I \end{cases} \quad (1-1-41)$$

其中：

$$n = \frac{1}{\sqrt{S_c T}} \quad (1-1-42)$$

这样，只要中场区内的电场特性的假设是正确的，电位和电流的分布就由参数 n 确定。 $U(z)$ 为套管上任意一点电位，在套管无穷远处电位为 0。与套管同轴、半径足够大的圆柱面的电位实际上为 0，这样式 (1-1-41) 的解的形式为：

$$Ae^{nz} + Be^{-nz} \quad (1-1-43)$$

式中 A, B ——系数，由边界条件决定。

假设套管周围为均匀介质。由于泄漏电流的存在，套管无穷远处电位趋于 0，从而方程组 (1-1-41) 中第二个方程的解的形式为：

$$I(z) = Be^{-nz} \quad (1-1-44)$$

由于套管和地层是关于电极 A 对称的，因此一半电流流向一个方向，而另一半电流则向相反的方向流动。同时，又因供电电极附近的泄漏电流可以忽略，从而在 $z=0$ 处有初始条件：

$$I(z) = \frac{I_0}{2} \quad (1-1-45)$$

因此：

$$I(z) = \frac{I_0}{2} e^{-nz} \quad (1-1-46)$$

利用欧姆定律，套管内与井眼中的电场可以表示为：

$$\begin{cases} E_z = \rho_c j_z = \rho_c \frac{I}{2\pi a \Delta a} = \frac{I}{S_c}, \text{ 或 } E_z = \frac{I_0}{2S_c} e^{-nz} = \frac{I_0}{2S_c} e^{-z/\sqrt{TS_c}} \\ \frac{d^2 U}{dz^2} = \frac{I_0}{2S_c^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-z/\sqrt{TS_c}} \end{cases} \quad (1-1-47)$$

令：

$$T = \rho_2 \quad (1-1-48)$$

即可得式 (1-1-36)。

也就是说，如果套管周围为均匀介质，当传输线的电导等于套管的电导，以及横向电阻等于地层的电阻率时，中场区内的电流和电位的特性可由简化传输线模型描述。

由于过套管地层电阻率测量的是地层的电阻率 T ，需对其进行更为详尽的讨论。为此，需进一步考察套管外电位（为距离 r 的函数）的特性。为了讨论方便，选择一个小层。该层被一个坐标为 z 和 $z+\Delta z$ 的水平面和一个半径为 a 的圆柱面所包围，如图 1-1-6 所示。

在径向距离 $r=b$ 处，电位为 0，分布在套管

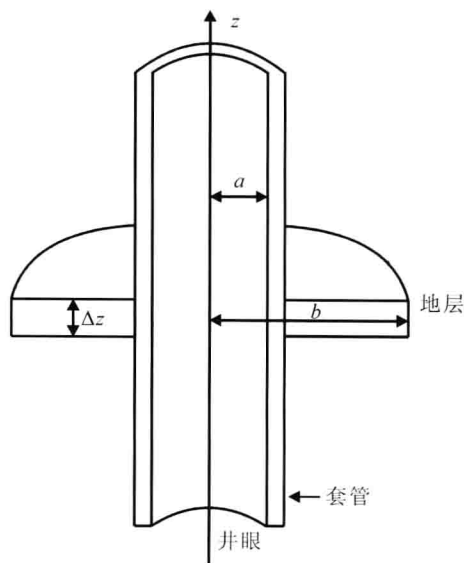


图 1-1-6 含一个圆柱面的套管井模型

表面上的电荷为：

$$e_s = \varepsilon_0 \rho_2 I_r \quad (1-1-49)$$

式中 I_r ——厚度为 Δz 的圆柱体介质中的径向电流；

ε_0 ——自由空间的介电常数。

假设圆柱体的外半径为 r ，当 $a \leq r \leq b$ 时，由高斯定理可得：

$$\begin{cases} \oint E dl = \frac{e_s}{\varepsilon_0} \\ E_r = \frac{\rho_2 I_r}{2\pi r \Delta z} \end{cases}$$

或

$$\frac{\partial U^e}{\partial r} = -\frac{\rho_2 I_r}{2\pi r \Delta z}$$

式中 U^e ——套管外的电位。

由于当 $r=b$ 时电位为 0，从而求积分可得：

$$U^e(r) = \frac{\rho_2 I_r}{2\pi \Delta z} \ln \frac{b}{r} \quad (a \leq r \leq b) \quad (1-1-50)$$

因此，套管外的电位可表示为距离 r 的函数。对于径向电流，电阻率为 ρ_2 的圆柱体电阻为：

$$R_r = \frac{U^e(a) - U^e(b)}{I_r} = \frac{\rho_2}{2\pi \Delta z} \ln \frac{b}{a}$$

另一方面，圆柱体电阻与横向电阻 T 的关系为：

$$R_r = \frac{T}{\Delta z}$$

由此：

$$T = \frac{\rho_2}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (1-1-51)$$

对比式 (1-1-48) 和式 (1-1-51) 表明：如果该层介质中远离套管处的电流仍呈径向分布，那么零电位圆柱面在离井眼足够远处。“足够”远的距离由下式确定：

$$2\pi = \ln \frac{b}{a} \quad \text{或} \quad b = ae^{2\pi}$$

现在假设又有一个半径为 a_Δ 的圆柱面，套管和该圆柱面之间的介质电阻率为 ρ_Δ ，如图 1-1-7 所示。

对于径向电流 I_r ，电阻率为 ρ_Δ 和 ρ_2 的介质可以看作一个电路中的两个串联部分，单位高度 $\Delta z=1$ 的小圆柱体的横向电阻为：

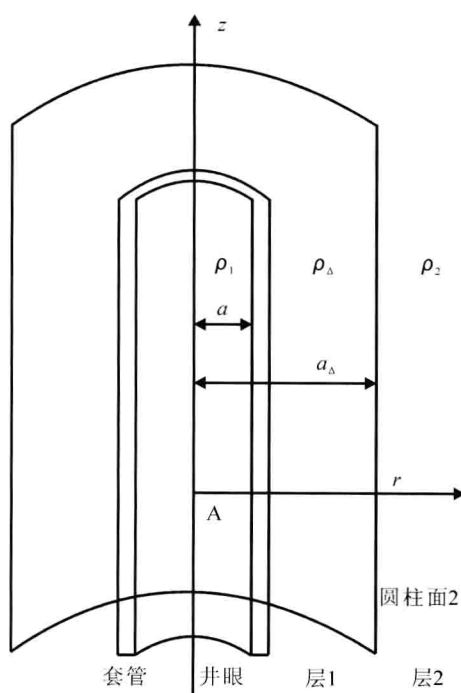


图 1-1-7 含两个圆柱面的套管井模型

A—供电电极； a —井眼半径； ρ_1 —井眼电阻率； a_Δ —圆柱面 2 的半径； ρ_Δ —层 1 的电阻率； ρ_2 —层 2 的电阻率

$$T = \frac{\rho_\Delta}{2\pi} \ln \frac{a_\Delta}{a} + \frac{\rho_2}{2\pi} \ln \frac{b}{a_\Delta} \quad (1-1-52)$$

利用式 (1-1-48)，式 (1-1-52) 可以改写为：

$$T = \frac{\rho_\Delta - \rho_2}{2\pi} \ln \frac{a_\Delta}{a} + \rho_2 \text{ 或 } T = \rho_2 F$$

其中：

$$F = 1 + \frac{\rho_\Delta - \rho_2}{2\pi\rho_2} \ln \frac{a_\Delta}{a} \quad (1-1-53)$$

为了评价由式 (1-1-47) 和式 (1-1-53) 计算得到的电场强度与电位的二阶导数的准确性，求解这个介质模型（图 1-1-7）的边值问题。

利用前一小节得到的结论，每种介质中的电位可以表示为：

$$\begin{cases} U_1 = \frac{\rho_1 I_0}{4\pi} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [K_0(mr) + B_1 I_0(mr)] \cos(mz) dm \\ U_2 = \frac{\rho_\Delta I_0}{4\pi} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [C_2 K_0(mr) + B_2 I_0(mr)] \cos(mz) dm \\ U_3 = \frac{\rho_2 I_0}{4\pi} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty C_3 K_0(mr) \cos(mz) dm \end{cases} \quad (1-1-54)$$