

第九届全国计算流体力学会议论文集

计算流体力学研究进展

全国计算流体力学会议组委会

北京空气动力研究所

第九届全国计算流体力学会议论文集

计算流体力学研究进展

全国计算流体力学会议组委会
北京空气动力研究所

中国空气动力学会

中国宇航学会

中国航空学会

中国力学学会

第九届全国计算流体力学会议

1998年11月3日~7日，云南景洪

第九届全国计算流体力学会议

组织委员会

组 长： 张涵信

成 员： 崔尔杰 陈耀松

黄兰洁 卞荫贵

傅德薰 季仲贞

朱自强 谢省宗

李德元 庄礼贤

陈九锡 苏纪兰

忻孝康 沈孟育

纪楚群 乔志德

黄明恪 吕玉麟

赵 烈

秘书长： 施岳定 邓小刚

前 言

本论文集收入了全国第九届计算流体力学会议上的主要报告,经整理、选编而成。论文内容包括计算方法和理论、网格生成技术、计算流场显示和计算流体力学在工程实际中的应用等方面,大体反映了目前我国在计算流体力学研究领域状况和发展。编辑本论文集的目的是为了扩大计算流体力学的影响,希望在更大的范围内交流,以促进我国计算流体力学研究工作的进一步发展。

本次会议是由中国空气动力学会、中国航空学会、中国宇航学会和中国力学学会联合主办的,并得到了中国空气动力研究与发展中心、国家CFD重点实验室、中国科学院力学所和北京应用物理与计算数学研究所航天总公司科技局、北京空气动力研究所等单位的支持,对此表示感谢。这也说明,推动计算流体学的发展,除了必须有一批有志于在计算流体力学研究领域辛勤耕耘的人才外,还需要有良好的环境条件支持,在这里我们由衷地感谢各方面给予计算流体力学研究工作的关注和所做的努力。

本论文集在编辑过程中,北京空气动力研究所的同志做了大量的工作,在此也表示感谢。

全国计算流体力学会议
组织委员会

1998.10

目 录

1. 网格与高精度差分计算问题	张涵信(1)
2. 遗传算法在数值模拟中的应用研究	陈红全 隋洪涛(10)
3. 遗传算法在气动反设计中的应用	隋洪涛 陈红全(16)
4. 样条插值数据重构方法在平面叶栅绕流计算中的应用 么石磊 任玉新 沈孟育(22)
5. 快堆热工水力分析的数值研究 廖智杰 任玉新 沈孟育 杨福昌 杨志明(27)
6. 在非设计工况下压气机动静叶干扰的数值模拟 任玉新 沈孟育 刘秋生(33)
7. 返回舱自由振动跨声速非定常流场数值模拟 周伟江 张涵信 纪楚群(39)
8. 利用群速度控制的四阶紧致格式	马延文 傅德薰(46)
9. 初始条件对拟序结构的影响	傅德薰 马延文(52)
10. 差分格式的时间耗散效应对气动方程定常解精度的影响	刘君(58)
11. 用变分法和差分法计算热对流稳定性研究中的本征值问题	鄯庆增(64)
12. 二维多时标全电磁相对论粒子模拟程序及其应用 曹莉华 常铁强 常文蔚 岳宗五(68)
13. 用紧致格式求解 Burgers 方程线法稳定性分析 任安禄 鲁晓东 苏中地 戴志潜(72)
14. 一种新的非线性 K- ϵ 两方程湍流模型	钱炜祺 蔡金狮(78)
15. 计算物面摩阻的一个新途径	段占元 童秉纲 姜贵庆(84)
16. 用非结构网格求解 Euler 方程中的边界条件确定方法 叶正寅 钟诚文 杨永年 张仲寅 陈迎春(90)
17. 全速解法在湍流跨音速流动的应用	郭阳 张景明 符松(96)
18. 基于 NND 格式、ENN 格式的高阶紧致格式	宗文刚 张涵信(102)
19. 用 WENN 格式数值研究激波诱导混合增强	陈坚强 张涵信(108)
20. 三维复杂外形的非结构网格生成及自适应技术 张来平 杨永健 芮超 张涵信 高树椿(114)
21. 基于 NND 格式的加权色散关系保持格式	李沁 张涵信 高树椿(121)
22. 高超声速钝体热流数值计算研究	贺国宏 张涵信(128)
23. 非结构网格上迎风有限元格式及迎风类差分格式在非结构网格上的推广 蔡庆东 吴望一(134)
24. 多块网格生成技术及应用	鄂秦 李凤蔚 李杰 陈海昕(140)
25. 复杂外形的网格生成及在流场数值模拟中的应用	

.....	陈海昕 李凤蔚 鄂秦 高超(146)
26.高超声速热化学平衡流动 NS 方程数值解	刘新庄 欧阳水吾(152)
27.高超声速化学非平衡流场 NS 方程数值计算研究 欧阳水吾 谢中强 刘新庄(157)
28.高阶耗散紧致格式在可压平面 Couette 流稳定性分析中的应用 毛枚良 邓小刚(163)
29.高精度耗散紧致格式的边界格式和渐进稳定性分析 邓小刚 毛枚良(169)
30.流体界面不稳定性数值模拟中界面的一种处理方法 尤迎玖 李晓林 王继海 蔚喜军(175)
31.通量限制器与空间离散精度王运涛(179)
32.高超声速化学非平衡欧拉方程数值模拟郭智权 叶友达(186)
33.具有自由水面的流动问题的 LEVEL SET 算法研究 谢伟松 陶建华(191)
34.Euler 方程的自适应叉树结构直角网格算法研究董程栋 黄明恪(197)
35.分区网格交互生成方法的研究及应用 吴宗成 朱自强 陈泽民 李津 严志(203)
36.Godunov 方法在复杂流场数值模拟中的应用纪楚群 李骏(209)
37.有限元非结构网格中的 AUSM+算法伍贻兆 王江峰(216)
38.多段翼型三角形网格生成技术研究艾星 钟诚文 苏耀西(222)
39.低马赫数流场数值模拟的预修正方法研究 艾星 钟诚文 苏耀西(228)
40.非定常同向激波边界层干扰的数值模拟和实验研究 宗南 杨基明 潘建平 韩肇元(233)
41.覆盖分区算法的理论基础与应用吴子牛 邹辉(239)
42.复杂流场的多块并行数值模拟杨树池 乔志德(245)
43.计算流体力学中标量场的可视化研究李育斌 乔志德(251)
44.Efficiency Improvement of an Unsteady Euler/N-S Method Sun Gang Qiao Zhide Zhang Bo R.Heinrich(256)
45.嵌合体技术中的链接网格方法和数据流控制 乔志德 孙刚 李孝伟 李栋(262)
46.一体化网格计算较复杂外形的粘性流场李栋 乔志德(269)
47.多缝道复杂外形粘性绕流计算李孝伟 乔志德 孙刚(274)
48.两种物面热流计算方法的比较黄唐 姜贵庆 毛国良 周伟江(280)
49.流场、热、结构一体化数值模拟 黄唐 毛国良 姜贵庆 周伟江(286)
50.用双时间推进法求解非定常 NS 方程的有关问题讨论 宋文萍 杨永 乔志德(292)

51.高精度迎风紧致差分格式二维全离散 Fourier 分析	王强 傅德薰 马延文(298)
52.二维跨音速 Euler 方程组的分区并行算法	吕晓斌 朱自强(304)
53.三角翼背风涡前缘吸气主动控制的数值研究	杨国伟 庄礼贤 森下悦生(311)
54.超音速碰撞流场的数值模拟	刘君 刘伟 沈清(317)
55.非定常洞壁干扰动态影响函数计算	张文华 李志强 丁克文 仇立华(322)
56.可压反应混合层放热效应直接数值模拟	王强 傅德薰 马延文(328)
57.稀薄气流中辐射的直接统计模拟与相应等离子体电场的计算	何川萍 沈青(334)
58.液态雾化燃料在超声速气流中喷射、混合研究	徐胜利 岳朋涛 孙英英 韩肇元(340)
59.激波增强密度分层流体混合的数值实验	严长林 孙德军 尹协远 童秉纲(346)
60.有攻角的小钝锥体化学非平衡边界层数值计算	魏叔如 刘凯(352)
61.细长锥体低超声速绕流问题的研究进展	冉政 张涵信(358)
62.锥体有攻角绕流背风区对称轴线压力场结构研究	冉政 张涵信(364)
63.守恒定律与飞行器表面物理量的计算	段占元 童秉纲 姜贵庆(370)
64.串列双圆柱绕流问题的数值研究	刘松 符松(376)
65.用分块耦合技术模拟三峡永久船闸反向弧形阀周围的湍流场	陈文学 谢省宗 戴光清 高旭东(382)
66.先进双发民机复杂组合体跨音速绕流数值模拟	李杰 鄂秦 李凤蔚 刘积仓 乔朝俊(390)
67.用 PHOENICS 程序计算下支撑板与下板之间流场	傅致祥(396)
68.水下高压射流气泡形成初期的数值模拟	彭晓星 张志荣(402)
69.关于在机-弹干扰下外挂物气动力系数及投放轨迹的数值计算	胡汉东 杨其德 马明生(408)
70.后机身/气动力定位式收-扩型喷管内外流场数值计算	陈汝贤 张玉伦 陈作斌(414)
71.超燃发动机混合增强的数值研究	梁剑寒 王承尧(420)
72.非饱和土壤水流问题的混合有限元法及其数值模拟	罗振东 谢正辉 朱江(426)
73.带副翼三维机翼绕流的 N-S 方程解	李津 陈泽明 朱自强 李海明(432)
74.翼型外形高气动效率/低可探测性的优化	朱自强 Zubair Islam 朱一琨 李海明(438)
75.二维 BGK 型差分格式及火箭自由喷流的数值模拟	

.....	陈炳木	梁珍璇(444)
76.三角翼旋涡破裂流动特性初步探讨	葛立新	庞铁波(450)
77.数值模拟空间晶体生长	赵桂萍 王发民 关亚波	姚文秀(456)
78.变高度圆柱诱导的激波边界层干扰
.....	马汉东 李素循 陈永康	吴礼义(462)
79.激波碰撞干扰流动非定常效应的数值研究	陈靛	阎超(469)
80.三角翼、双三角翼涡系及其干扰的高分辨率粘性数值模拟研究
.....	阎超	冯亚南(474)
81.多翼导弹复杂流场及气动力的数值计算	阎超	陈靛(481)
82.振荡流动流过波形壁的数值研究	陆夕云	(487)
83.气动光学效应研究的光学传递函数计算	袁格	(493)
84.分离流中旋涡运动的热行为及其控制的数值模拟
.....	周伟江	姜贵庆(496)
85.采用 CFD 方法预测旋翼气动噪声 ...	王立群 符松 乔志德	张茹(502)
86.非定常二维水流有限元解及应用	朱军政	耿兆铨(507)
87.基于欧拉方程数值解的机翼设计	杨旭东	乔志德(511)
88.高超音速化学非平衡无粘流的数值模拟
.....	吴颂平 郑波 陆焯	李椿萱(517)
89.三角翼大攻角分离流开缝吸气效应研究 ...	白鹏 周伟江	汪翼云(523)

网格与高精度差分计算问题

张 涵 信

(中国空气动力研究与发展中心

国家计算流体力学实验室)

摘要: 本文研究了NS 方程差分求解时来流雷诺数、计算格式精度和计算网格之间的关系,给出了判定空间三个方向上的粘性贡献在给定雷诺数、格式精度和网格下是否能够正确计入的定量准则,指出在NS 方程的二阶差分方法的数值模拟中,由于物面法向采用了压缩网格技术,物面附近的网格间距很小,该方向上的粘性贡献可被计入,但是如果流向和周围的网格较粗,相应的差分方程中的粘性贡献仅以截断误差相同的量级被计入,因此在精度上等于仍是求解略去流向和周围粘性项的薄层近似方程。文中指出,高阶精度的差分计算格式,可以避免对网格要求苛刻的困难。本文进一步讨论了建立高阶精度格式的问题,提出了建立高阶精度格式应该满足的三个原则:稳定性或耗数控制原则、熵增或色散控制原则,以及激波关系控制原则。根据这些原则,论文倡导发展混合高阶精度格式,即在连续区,采用高阶精度格式,在激波区,采用能近似代表激波关系的NND 格式。

关键词: NS 方程, 网格判则, 高精度格式, 格式建立原则

一、引言

随着计算机的快速发展和数值方法能力的迅速提高,复杂外形绕流的NS 方程数值模拟的研究工作越来越多。在这些计算模拟工作中,有的计算采用数十万个网格点,有的采用数百万个甚至上千万个网格点。分析这些研究给出的结果大致可得到以下结论:第一,当用高阶精度差分格式求解时,所需网格点数比低阶格式要少;第二,当用二阶精度格式求解时,对于高Reynolds 流动,在物体的迎风区,粗网格的结果和实验值尚能接近,但对于背风、拐角等具有分离、旋涡和强烈压缩或膨胀的流动区域,其粗网格的结果和实测值相差甚远^[1];第三,细网格可给出与粗网格完全不同的旋涡和分离结构^[2]。这些情况给我们提出如下问题:

1. 当用二阶格式求解复杂外形绕流的NS 方程时,应该如何选择网格点数才能获得满意的结果? 有无准则可以采用?

2. 粗网格的数值模拟,在多大程度和多大范围内能反应粘性的效应?其机理和规

律是什么?

3. 对于高阶精度的差分格式,为什么网格点的数目可以放松?

4. 对于有激波的流场,如何建立高阶精度的差分格式?

本文目的就是探讨以上问题。包括引言本文共分四节。第二节讨论网格数与差分格式精度的关系,这里我们提出了确定网格数的规则,并阐明了网格点数控制粘性影响的机制。第三节讨论了建立高阶格式的原则,这些原则可帮助我们选择和分析各种高阶格式。第四节是简单的结论。

二、网格点数和格式精度的关系

大家知道,三维流动无量纲化的NS 方程可写成:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\partial H_v}{\partial z} \right) \quad (1)$$

这里为了简单,我们略去了无量纲化的方法和方程(1)中各项和各个符号意义的说明(可参见[3]), Re_L 是以物体长度 L 为特征长度的Reynolds 数。如果采用 m 阶精度的差分格式求解方程(1),与 m 阶差分方程等价的修正方程是:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\partial H_v}{\partial z} \right) \\ + 0(\Delta x^m, \Delta y^m, \Delta z^m, \dots) \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ 表示网格间距, $0(\Delta x^m, \Delta y^m, \Delta z^m, \dots)$ 表示截断误差项,它们是 m 级以上的小量。(2)式可进一步被写成:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\Delta x^\alpha}{Re_L \Delta x^\alpha} \frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\Delta y^\beta}{Re_L \Delta y^\beta} \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\Delta z^\gamma}{Re_L \Delta z^\gamma} \frac{\partial H_v}{\partial z} \\ + 0(\Delta x^m, \Delta y^m, \Delta z^m \dots) \end{aligned} \quad (3)$$

选择(3)中的 α, β 和 γ ,使其满足

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\lg Re_L}{\lg \Delta x} \\ \beta &= -\frac{\lg Re_L}{\lg \Delta y} \\ \gamma &= -\frac{\lg Re_L}{\lg \Delta z} \end{aligned} \quad (4)$$

于是: $Re_L \Delta x^\alpha = 1, Re_L \Delta y^\beta = 1, Re_L \Delta z^\gamma = 1$ 。则(3)式进一步可写成:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \Delta x^\alpha \frac{\partial F_v}{\partial x} + \Delta y^\beta \frac{\partial G_v}{\partial y} + \Delta z^\gamma \frac{\partial H_v}{\partial z}$$

$$+ 0(\Delta x^m, \Delta y^m, \Delta z^m \dots) \quad (5)$$

(5)式表明: 如果所采用的网格和计算格式使 $\alpha \geq m$, 则 x 方向的粘性项的贡献被落入截断误差范围, 同样如果 $\beta \geq m$ 或者 $\gamma \geq m$ 时, 则所用网格和差分格式使 y 方向或 z 方向的粘性贡献落入截断误差范围。只有当 α, β, γ 分别取值小于 m 时, 所采用的网格和差分格式才能比较准确的计及各方向上的粘性贡献。这也进一步表明, 当(4)中的 α, β, γ 分别取值 m 时, (4) 式就可给出 x, y, z 方向的临界网格 $\Delta x^*, \Delta y^*, \Delta z^*$, 其意义是: 当实际采用的计算网格 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 分别小于或远小于临界网格时, x, y, z 方向的粘性效应就能正确被计入, 否则, 如果某方向所采用的网格间距, 大于该临界网格, 则该方向的粘性效应就落入截断误差的范围。由(4)式, 临界网格可表示为:

$$\Delta x^* = \left(\frac{1}{Re_L}\right)^{\frac{1}{m}}, \Delta y^* = \left(\frac{1}{Re_L}\right)^{\frac{1}{m}}, \Delta z^* = \left(\frac{1}{Re_L}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad (6)$$

如果设 x, y, z 分别代表物体绕流的流向、周向和法向, ϵ_y, ϵ_z 分别代表粘性求解区域在 y 和 z 方向的特征长度, 在数值模拟中, 由于 x 和 y 方向常采用等距网格, 因此 $\Delta x^* = \frac{1}{n_x^*}, \Delta y^* = \frac{\epsilon_y}{n_y^*}$, 这里 n_x^*, n_y^* 代表 x, y 方向的网格数, 而对于粘性区的 z 方向, 常取变距网格, 即物面附近, $\Delta z \ll \Delta z^*$, 离开物面的远处, $\Delta z > \Delta z^*$, 这里 $\Delta z^* = \frac{\epsilon_z}{n_z^*}$ 是 z 方向粘性区的平均网格间距, n_z^* 是相应的网格数。根据这些关系, 再利用(6), 与临界网格间距相应的网格数是:

$$\begin{aligned} n_x^* &= (Re_L)^{\frac{1}{m}} \\ n_y^* &= \epsilon_y \cdot (Re_L)^{\frac{1}{m}} \\ n_z^* &= \epsilon_z \cdot (Re_L)^{\frac{1}{m}} \end{aligned} \quad (7)$$

在细长体高超声速绕流情况下, ϵ_y 比1(x 方向的无量纲长度)小得多, 因 ϵ_z 代表粘性层区的特征长度, 它比1可能更小。表1给出了二阶格式的临界网格数随 Re_L 的变化。

表一 二阶格式 ($m = 2$) 的临界网格数随 Re_L 的变化 $\epsilon_z = 0.13, \epsilon_y = 0.13$

Re_L	n_x^* (等距)	n_y^* (等距)	n_z^* (变距, $(\Delta z)_{min} \ll \Delta z^*$)
10^6	1000	130	130
1.6×10^5	400	52	52

由(7)式和表一可以看出, 对于高Reynolds 数流动, 例如 $Re_L = 10^6$, 如果要正确计入

流向、横向和法向的粘性效应,其流场的网格点数,应达1千万以上。在许多采用二阶差格式求解NS 方程的文献中,x、y 方向的网格数,都没有达到临界值的要求。因为z 方向的网格,在物面附近采用了压缩技术 $(\Delta z)_{min} \ll \Delta z^*$, 在这种情况下,于物面附近,相应的 $\alpha \ll m = 2$, 因此物面附近的粘性效应能够被计入。但是在x、y 方向,由于网格基本上是等距的,相应的 α 和 β 都大于 $m = 2$, 即x 和y 方向的粘性效应是作为截断误差计入的,因此这些文献表面上是求解完全的NS 方程,而事实上,仅相当于粘性薄层近似方程的求解。

鉴于二阶格式求解NS 方程时对网格需求的上述困难,由(7)式可以看出,采用高阶格式,可以解决这个矛盾,因此发展高阶精度的差分格式是很有意义的。

二、建立高阶格式的基本原则

在利用高阶格式求解NS 方程时,粘性项采用高阶中心格式是适宜的,其主要困难,是如何妥善处理无粘性项,特别对于有激波的情况,应能光滑和狭窄的捕捉激波。为此我们研究无粘性流动的计算格式,并且为了简单,从一维问题出发来讨论建立高阶格式的原则。

如图1 所示,对于一维带激波的无粘性流动,其连续区的流动可用如下Euler 方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

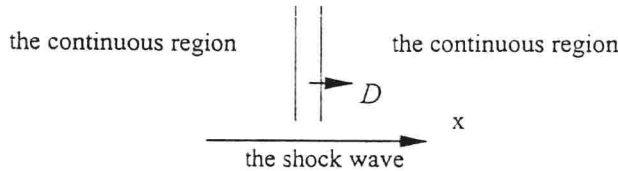


图1 一维无粘性流动的求解域

来描述,这是 $A = \frac{\partial F}{\partial U}$ 是 F 的 Jacobian 矩阵。对于激波间断区,激波的两方应满足如下 R-H 条件:

$$\frac{1}{D} \Delta F = \Delta U \quad (9)$$

式中D 代表激波传播的速度, $\Delta F = F_R - F_L, \Delta U = U_R - U_L, F_R, U_R$ 分别代表激波左边的通量和守恒变量, F_L 和 U_L 代表激波右边的通量和守恒变量。

1. 连续区建立高阶格式的原则:

由于矩阵A 可写成:

$$A = S^{-1} \Lambda S$$

这里 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 是A 的特征对角矩阵, $\lambda_l (l = 1, 2, \dots, n)$ 是其特征值, S 是左特征向量矩阵。将此式代入(8)后并左乘矩阵S, 于是得到:

$$S \frac{\partial U}{\partial t} + \Lambda S \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

引入新的向量 $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, 使其满足

$$dW = S dU$$

于是(10)式可进而写成:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

引入 $u = w^{(l)}, a = \lambda_l$, 由(11), 我们可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

将此式用于网格节点j, 它可给出

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j + a_j \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = 0$$

假设采用高阶精度的差分格式离散 $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j$, 就可获得一个相应的半散化的差分方程。与此差分方程完全等价的修正方程式是:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j + a_j \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \sum \nu_n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j \quad (13)$$

(1) 稳定性或耗散控制原则:

设 u_0 是差分方程(13)的真解。当用数值方法求解差分方程(13)时, 由于不可避免地要引入计算误差 $\delta(x, t)$, 所以差分方程的数值解 $u = u_0 + \delta$, 因为 u, u_0 均满足方程(13), 因此 δ 满足的方程是:

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)_j + a_j \left(\frac{\partial \delta}{\partial x}\right)_j = \sum \nu_n \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}\right)_j \quad (14)$$

设在初始时刻 $t = 0$, 误差的分布是:

$$\delta = \delta_0 = A e^{ikx} \quad (15)$$

这里k 是误差的波数, A 是初始误差的振幅, 由(14), $t > 0$ 时, 可以给出

$$\delta = Ae^{\alpha} e^{ik[x-(\alpha-\beta)t]} \quad (16)$$

式中

$$\begin{cases} \alpha = \sum_m (-1)^m \nu_{2m} k^{2m} \\ \beta = \sum_m (-1)^m \nu_{2m+1} k^{2m} \end{cases} \quad (17)$$

置然, Ae^{α} 代表误差振幅随时间的变化, 一个好的差分格式, 应该是其误差随时间而减小的, 即满足稳定性的要求。这就给出

$$\alpha = \sum_m (-1)^m \nu_{2m} k^{2m} < 0 \quad (W) \quad (18a)$$

这里“W”表示在整个连续区均满足。如果仅考虑首项, 该式给出

$$(-1)^m \nu_{2m} < 0 \quad (W) \quad (18b)$$

我们称(18a)或(18b)为建立差分格式的稳定性或耗散控制原则。

(2) 熵增或色散波控制原则

由(16)可以看出, $(\alpha-\beta)$ 是差分方程的扰动传播速度, 因为 a 是原始Euler 方程的扰动传播速度, 所以 β 是原始扰动速度的修正, 由于它取决于修正方程式中色散项的系数, 所以我们称之为色散波的修正。为了使连续区的差分解, 在激波区不产生非物理的波动, 我们要求激波两方扰动的传播方向, 应该向激波会聚, 这就是熵增条件。于是我们得到

$$\sum (-1)^m \nu_{2m+1} k^{2m} \begin{cases} < 0 & (L) \\ > 0 & (R) \end{cases} \quad (19a)$$

这里“L”表示激波的左方, “R”表示激波的右方。如果仅考虑其首项, 可以得到

$$(-1)^m \nu_{2m+1} \begin{cases} < 0 & (L) \\ > 0 & (R) \end{cases} \quad (19b)$$

我们称(19a)或(19b)为熵增或色散波控制条件。

2. 激波区对差分格式的要求

如图2, 设条带区代表激波(在差分计算中我们假设激波是一条带), L、R 分别代表激波的左方和右方, 条带的方向代表激波的传播速度 $D = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ 。如果 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$, 但 $\frac{\Delta x}{\Delta t} = D$, 则条带趋于真正的激波。在这种情况下如图2, $U^{n+1} = U_L, U^n = U_R$ 。 $H_{j-\frac{1}{2}} = F_L, H_{j+\frac{1}{2}} = F_R$, 这里 $H_{j+\frac{1}{2}}$ 和 $H_{j-\frac{1}{2}}$ 分别代表R 和L 点的通量, 根据关系式(9), 我们有以下关系:

$$U_j^{n+1} - U_j^n = -\frac{\Delta x}{\Delta t} (H_{j+\frac{1}{2}} - H_{j-\frac{1}{2}}) \quad (20)$$

NND 格式^[4]可恰好近似此式。我们称这个用激波关系来控制计算格式的条件(20)为激波关系控制条件。

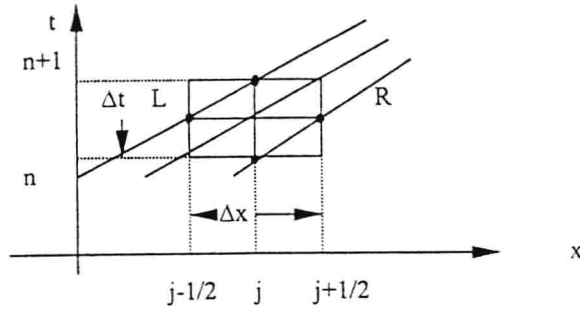


图2 激波的传播

根据以上讨论,当求解带激波的无粘性流动时,应该采用混合的差分计算格式,在连续区,使用高精度差分格式,并且用稳定条件(或耗散控制)和熵增(或色散波控制)条件来建立该高阶格式,在激波区,采用NND 格式。文献[5]已按此三原则作了应用,结果是很满意的。

剩下一个问题是激波区如何自动识别。在文献[6]中我们曾经提出,可利用以下关系:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i &> 0 & (L) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i &< 0 & (R) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

来识别激波的左方(L)和右方(R),这里f是通量F的分量。由于

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i &= \frac{1}{2\Delta x}(\Delta f_{j+\frac{1}{2}} + \Delta f_{j-\frac{1}{2}}) + \dots \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i &= \frac{1}{\Delta x^2}(\Delta f_{j+\frac{1}{2}} - \Delta f_{j-\frac{1}{2}}) + \dots \end{aligned}$$

所以,(21)式亦可近似写成:

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^2 - \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^2 &> 0 & (L) \\ \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^2 - \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^2 &< 0 & (R) \end{aligned} \right\}$$

该式表明,在激波左方(L), $|\Delta f_{j-\frac{1}{2}}| < |\Delta f_{j+\frac{1}{2}}|$;在激波右方(R), $|\Delta f_{j+\frac{3}{2}}| < |\Delta f_{j+\frac{1}{2}}|$ 。这样,关于激波区,就可用以下条件判断,即当出现

$$\begin{aligned} |\Delta f_{j-\frac{1}{2}}| &< |\Delta f_{j+\frac{1}{2}}| > |\Delta f_{j+\frac{3}{2}}| \\ \text{且 } \Delta f_{j+\frac{3}{2}}^2 - \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^2 &< 0 & (R) \\ \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^2 - \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^2 &> 0 & (L) \end{aligned}$$

时,则认为出现了激波。也可像文献[7]那样应用压力或密度的表达式来判断激波。

四、简单的结论

根据以上分析,我们有以下结论:

1. 当差分格式的精度和计算网格已经给定后,在求解NS 方程时,粘性项的贡献是否被正确计入,可用以下等式给出的 α 、 β 、 γ 来判断:

$$\alpha = -\frac{\lg Re_L}{\lg \Delta x}$$

$$\beta = -\frac{\lg Re_L}{\lg \Delta y}$$

$$\gamma = -\frac{\lg Re_L}{\lg \Delta z}$$

如果 α 、 β 、 γ 均大于差分格式的精度 m ,则粘性项的贡献均属于截断误差的范围。如果其中有一个大于 m ,则它对应的方向上,粘性项的贡献也属于截断误差的范围。只有当三者分别均满足小于 m 的条件时,粘性项的全部贡献才能被正式计入。

也可根据文中给出的临界网格来判断粘性项是否被计入。

2. 由于在文献中,物面法线方向的网格均采用了压缩技术即在物面附近有 $\Delta z \ll \Delta z^*$,因此这些求解NS 方程的文献,均计入了物面法向粘性的贡献。

但是,在 x 、 y 方向,很多利用二阶格式求解的文献,给出的网格数不满足上述要求,在这种情况下,表面上解完全的NS 方程,实际上仅相当于求解属于薄层近似的粘性方程。如果 y 方向的网格数能满足要求,而 x 方向不能满足,则相当于求解抛物化NS 方程。

3. 采用高阶精度的差分格式,可克服上述网格点数的困难。

4. 建立高精度的差分计算格式,关键在于处理无粘性项。我们提出了建立差分格式的三原则:稳定性或耗散控制原则;熵增或色散项控制原则;激波关系控制原则。根据这三个原则,发展混合高阶格式或加权高阶格式是正确的,即在连续区用高阶格式,它满足耗散控制和色散控制条件,在激波区,用NND 格式,它近似满足R-H 关系式。