普通高等教育“十二五”规划教材·财经类院校基础课系列教材

高等数学（理工类）

主编 乔花玲 马秦龙 周怀玉
主审 窦井波 葛 键

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材·财经类院校基础课系列教材

高等数学

（理工类）

主　编　乔花玲　马秦龙　周怀玉
主　审　窦井波　葛　键

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是根据普通高等学校理工类专业高等数学课程的教学大纲及基本要求，结合目前学生特点，贯彻"以应用为目的，不削弱理论学习"的指导思想编写而成的，全书共12章，分别是函数、极限与连续，导数与微分，中值定理及其导数应用，不定积分，定积分，定积分的应用，空间解析几何与向量代数，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，微分方程.

本书可以作为普通高等学校非数学专业理工科学生的教材，也可作为相关人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：理工类/乔花玲，马秦龙，周怀玉主编. —北京：科学出版社，2014

普通高等教育"十二五"规划教材　财经类院校基础课系列教材

ISBN 978-7-03-041254-6

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①乔…②马…③周…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材

Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第128385号

责任编辑：滕亚帆　任俊红 / 责任校对：郭瑞芝

责任印制：阎　磊 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2014年6月第　一　版　开本：787×1092　1/16

2014年6月第一次印刷　印张：34

字数：892 000

定价：63.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

编委会名单

主　编　乔花玲　马秦龙　周怀玉

副主编　张　驰　叶中华　杨善学

主　审　窦井波　葛　键

前　言

数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动规律的主要手段，对于非数学专业的大学生而言，学习数学尤其是高等数学，其意义不仅仅是学习一门专业的基础课程，中外大量的教育实践充分显示了：优秀的数学教育有利于人的理性思维品格的培育和思辨能力的培育，有利于人的聪明智慧的启发，有利于人的潜在能动性与创造力的开发，其价值远非一般的专业技术教育所及.

当前，普通本科数学课程的教育效果不尽人意，教材建设仍停留在传统模式上，未能适应社会需求，传统的大学数学教材过分追求逻辑严密性与理论体系的完整性，重理论轻实践，剥离了概念、原理和范例的几何背景与现实意义，导致教学内容过于抽象，也不利于与其他课程及学生自身专业的衔接.

本书是根据普通高等学校理工类专业高等数学课程的教学大纲与基本要求，还有多年教学改革实践，结合目前学生的特点，贯彻“以应用为目的，不削弱理论学习”的指导思想编写而成的. 本书用通俗易懂的语言将知识进行了更新与重组，尽力在严密的数学语言描述中，保留反映数学思想的本质内容，摒弃非本质的、仅仅为确保数学理论上的完整性与严密性的数学语言描述。坚持“数学思想优先于数学方法，数学方法优先于数学知识”的原则，以提升学生运用数学思想和数学方法解决实际问题的能力为核心，使读者在学习中真正领悟到高等数学教育的思想内涵和巨大价值。

为了能更好地与中学数学教学相衔接，本书从一般的数集、区间再到函数概念，回顾了基本初等函数的基础内容；为了培养学生的能力和数学素养，本书渗透了一些现代数学思想、语言和方法；强调有关概念、方法和理工学科的联系；在应用方面，增加了一些微积分在科学技术、日常生活等方面的应用性例题和习题.

本书由乔花玲、马秦龙、周怀玉主编，窦井波、葛键主审，参加本书编写的有乔花玲（第 1、2 章）、马秦龙（第 3、4 章）、周怀玉（第 5、6 章）、杨善学（第 7、8 章）、雷向辰（第 9、10 章）、张弛（第 11 章）、叶中华（第 12 章）.

由于编者水平有限，书中难免会有不足之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

2013 年 12 月

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

中学学习的数学是初等数学. 初等数学主要研究的是常量,而高等数学主要研究的是变量. 函数是反映各变量之间相互依赖关系,也是高等数学中最重要的基本概念之一,极限方法是研究变量的一种基本方法. 高等数学中对函数的研究主要是在实数范围内讨论. 本章将介绍函数和极限的概念、性质及运算法则,在此基础上建立函数连续的概念,讨论连续函数的性质.

1.1　函　数

1.1.1　实数集

人类的祖先最先认识的数是**自然数** 1,2,3,…(全体自然数通常用 $\mathbf{N}$ 表示). 从那以后,伴随着人类文明的发展,数的范围不断扩展,这种扩展一方面是与社会实践的需要有关,另一方面与数的运算需要有关. 这里仅就数的运算需要做些解释. 例如,在自然数的范围内,对于加法与乘法运算是封闭的,即两个自然数的和与积仍是自然数. 然而,两个自然数的差就不一定是自然数了. 为使自然数对于减法运算封闭,就引进了负数和零,这样,人类对数的认识就从自然数扩展到了**整数**(整数的全体通常用 $\mathbf{Z}$ 表示). 在整数范围内,加法运算、乘法运算与减法运算都是封闭的,但两个整数的商又不一定是整数. 探索使整数对于除法运算也封闭的数的集合,使整数集扩展到了**有理数**(有理数的全体通常用 $\mathbf{Q}$ 表示). 任意一个有理数均可表示成$\dfrac{p}{q}$(其中 p,q 为整数,且 $q\neq 0$).

古希腊人发现等腰直角三角形的腰和斜边没有公度,从而证明$\sqrt{2}$不是有理数,这样,人们首次知道了无理数的存在,后来又发现了更多的无理数,如$\sqrt{3}$,π,e 等. 无理数是无限不循环的小数. 有理数与无理数统称为**实数**(全体实数通常用 $\mathbf{R}$ 表示),这样就把有理数集扩展到了实数集. 实数集不仅对于四则运算是封闭的,而且对于开方运算也是封闭的. 数学家完全研究清实数及其相关理论,已是 19 世纪的事情了.

1.1.2　实数的绝对值

实数的绝对值是数学里经常用到的概念. 下面介绍实数绝对值的定义及其一些性质.

定义 1　设 x 为一个实数,则 x 的**绝对值**定义为

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}.$$

x 的绝对值$|x|$在数轴上表示点 x 与原点 O 的距离. 若 y 为任意实数,则点 y 与点 x 间的距离可用数 $y-x$ 或 $x-y$ 的**绝对值**来表示

$$|y-x|=|x-y|=\begin{cases} x-y, x\geqslant y \\ y-x, x<y \end{cases}.$$

实数的绝对值有如下性质:

(1) 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,有$|x|\geqslant 0$. 当且仅当 $x=0$ 时,才有$|x|=0$.

(2) 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,有$|-x|=|x|$.

(3) 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,有$|x|=\sqrt{x^2}$.

(4) 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,有 $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$.

(5) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ (三角不等式).

(6) $||x|-|y||\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|$.

(7) $|xy|=|x||y|$.

(8) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$ $(y\neq0)$.

(9) 设实数 $a>0$,则 $|x|<a$ 的充分必要条件是 $-a<x<a$.

(10) 设实数 $a\geqslant0$,则 $|x|\leqslant a$ 的充分必要条件是 $-a\leqslant x\leqslant a$.

(11) 设实数 $a>0$,则 $|x|>a$ 的充分必要条件是 $x<-a$ 或 $x>a$.

(12) 设实数 $a\geqslant0$,则 $|x|\geqslant a$ 的充分必要条件是 $x\leqslant-a$ 或 $x\geqslant a$.

它们的几何解释是直观的. 例如性质(9),在数轴上 $|x|<a$ 表示所有与原点距离小于 a 的点 x 构成的点集,$-a<x<a$ 表示所有位于点 $-a$ 和 a 之间的点 x 构成的点集. 它们表示同一个点集. 性质(10)~(12)可做类似的解释.

由性质(9)可以推得不等式 $|x-A|<a$ 与 $A-a<x<A+a$ 是等价的,其中 A 为实数,a 为正实数.

下面仅就结论(5)进行证明.

证 由性质(4),有 $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$ 及 $-|y|\leqslant y\leqslant|y|$,从而有
$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|.$$
根据性质(10),由于 $|x|+|y|\geqslant0$(相当于性质(10)中 $a\geqslant0$),得
$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

1.1.3 区间与邻域

1. 区间

区间是高等数学中常用的实数集,设 a,b 为两个实数,且 $a<b$,数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间,记为 (a,b),即
$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$
其中 a,b 称为开区间 (a,b) 的端点,$a\notin(a,b)$,$b\notin(a,b)$.

类似地,有闭区间和半开半闭区间:
$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\},\quad [a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},\quad (a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

以上这些区间称为有限区间,数 $b-a$ 称为这些区间的长度,从数轴上看这些有限区间是长度有限的线段,区间 $[a,b]$ 与 (a,b) 在数轴上表示出来,分别如图 1-1-1(a)与(b). 另外还有无限区间,引入记号 $+\infty$(读作"正无穷大")及 $-\infty$(读作"负无穷大"),则可类似地表示无限区间. 例如
$$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\},\quad (-\infty,b)=\{x|x<b\}.$$
这两个无限区间在数轴上表示如图 1-1-1(c)与(d).

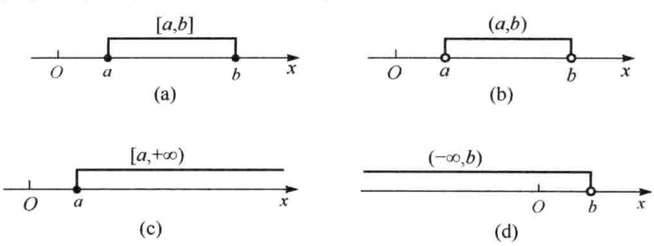

图 1-1-1

特别地，全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可以表示为无限区间 $(-\infty,+\infty)$.

注　在本教程中，当不需要特别辨明区间是否包含端点、是有限还是无限时，常将其简称为“区间”，并常用 I 表示.

例 1　解下列不等式，并将其解用区间表示.

(1) $|2x-1|<3$；　　　(2) $|3x+2|\geqslant 3$.

解　(1) $|2x-1|<3$ 等价于 $-3<2x-1<3$，解得 $-1<x<2$，用区间表示即为 $(-1,2)$.

(2) $|3x+2|\geqslant 3$ 等价于 $3x+2\geqslant 3$ 或 $3x+2\leqslant -3$，解得 $x\geqslant\dfrac{1}{3}$ 或 $x\leqslant -\dfrac{5}{3}$，用区间表示为 $\left(-\infty,-\dfrac{5}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$.

2. 邻域

定义 2　设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 **δ 邻域**，记为

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}.$$

其中，点 a 称为该**邻域的中心**，δ 称为该**邻域的半径**(图 1-1-2).

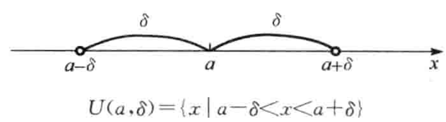

图 1-1-2

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}.$$

若把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心去掉，所得到的邻域称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

更一般地，以 a 为中心的任何开区间均是点 a 的邻域，当不需要特别辨明邻域的半径时，可简记为 $U(a)$.

为了方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的**左去心 δ 邻域**；把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的**右去心 δ 邻域**.

1.1.4　函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s. 假定开始下落的时刻为 $t=0$，则变量 s 和 t 之间的依赖关系由数学模型

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定，其中 g 是重力加速度.

定义 3　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为这个函数的**定义域**，也记为 D_f，即 $D_f=D$.

对 $x_0\in D$，按照对应法则 f，总有确定的值 y_0（记为 $f(x_0)$）与之对应，称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的**函数值**. 因变量 y 与自变量 x 的这种相依关系通常称为**函数关系**.

当自变量 x 遍取 D 的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的

值域,记为 R_f 或 $f(D)$,即

$$R_f=f(D)=\{y \mid y=f(x),x\in D\}.$$

按照上述定义,记号 f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则;记号 $f(x)$表示与自变量 x 对应的函数值. 为了叙述方便,习惯上常用"$f(x),x\in D$"或"$y=f(x),x\in D$" 表示定义在 D 上的函数,这时应理解为函数 f.

函数的表示记号可以任意选取,除了常用的 f 以外,还可以用其他英文字母或希腊字母,如"F","h","g","ϕ","$\varnothing$"等,相应的函数记为 $y=F(x)$,$y=h(x)$,$y=g(x)$,$y=\phi(x)$,$y=\phi(x)$等.

注 函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素. 两个函数相等的充分必要条件是它们的定义域和对应法则均相同.

关于函数的定义域,在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定. 如果讨论的是纯数学问题,则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合作为该函数的定义域,这种定义域又称为函数的**自然定义域**.

例如,函数

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

的(自然)定义域即为闭区间$[-1,1]$.

例 2 求函数 $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$的定义域.

解 要使函数解析式有意义,则有

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases},$$

解得$\begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\geqslant -2\end{cases}$,即函数 $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$的定义域为$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

对函数 $y=f(x)$ $(x\in D)$,若取自变量 x 为横坐标,因变量 y 为纵坐标,则在平面直角坐标系 xOy 中就确定了一个点(x,y). 当 x 遍取定义域中的每一个数值时,平面上的点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$的图形(图 1-1-3).

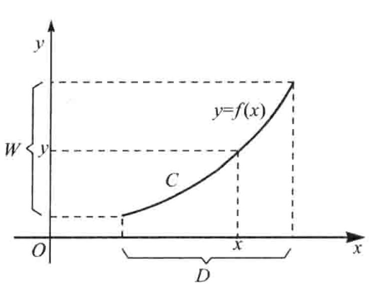

图 1-1-3

若自变量在定义域内任取一个数值,对应的函数值总是只有一个,这种函数称为**单值函数**,否则称为**多值函数**.

例如,方程 $x^2+y^2=a^2$ 在闭区间$[-a,a]$上确定了一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数. 对每一个 $x\in(-a,a)$,都有两个 y 值($\pm\sqrt{a^2-x^2}$)与之对应,因而 y 是多值函数.

注 若无特别声明,本教程中的函数均指单值函数.

1.1.5 函数的常用表示法

函数的表示法通常有三种:**表格法**、**图像法**和**公式法**.

(1) **表格法**. 将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

(2) **图像法**. 在坐标系中用图形来表示函数关系的方法.

(3) **公式法(解析法)**. 将自变量和因变量之间的关系用数学表达式(又称为解析表达式)来表示的方法.

根据函数的解析表达式的形式不同,函数也可分为**显函数**、**隐函数**和**分段函数**三种:

(1) **显函数**. 函数 y 由 x 的解析表达式直接表示.

(2) **隐函数**. 函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定. 例如,$\ln y=\cos(x^2+y)$.

(3) **分段函数**. 函数在其定义域的不同范围内,具有不同的解析表达式.

以下是几个分段函数的例子.

例 3　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,图形如图 1-1-4所示.

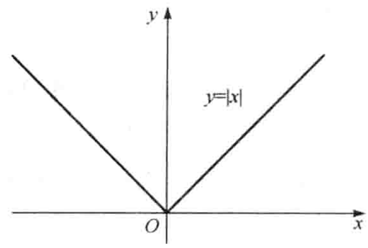

图 1-1-4

例 4　取整函数$[x]$,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如,

$$\left[\frac{4}{5}\right]=0,\ [\sqrt{3}]=1,\ [\pi]=3,\ [-2]=-2,\ [-3.14]=-4.$$

易见,取整函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\mathbf{Z}$,如图 1-1-5 所示.

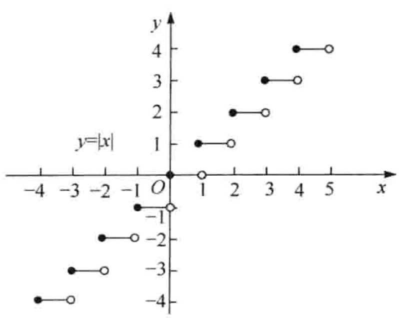

图 1-1-5

例 5*　狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\\ 0, & x\in\mathbf{Q}^C\end{cases}.$$

易见,该函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{0,1\}$,但它没有直观的图形表示.

1.1.6　函数的特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,数集 $X\subset D$,若存在一个正数 M,使得对一切 $x\in X$,恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立,则称函数 $f(x)$在 X 上**有界**,或称 $f(x)$是 X 上的**有界函数**. 每一个具有上述性质的正数 M 都是该函数的界.

若具有上述性质的正数 M 不存在,则称 $f(x)$在 X 上**无界**,或称 $f(x)$为 X 上的**无界函数**.

例如,函数 $y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界,因为对任何实数 x,恒有$|\cos x|\leqslant 1$. 函数 $y=\ln x$ 在$(0,1)$上无界,在$[1,4)$上有界.

例 6　证明函数 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$在$(-\infty,+\infty)$上是有界的.

证明　因为$(1-|x|)^2\geqslant 0$,所以$|x^2+1|\geqslant 2|x|$,故对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$,恒有

$$|f(x)|=\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|=\frac{2|x|}{|1+x^2|}\leqslant 1.$$

从而函数 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 在$(-\infty,+\infty)$上是有界的.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调增加函数**;如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调减少函数**.

例如,函数 $y=x^2$ 在$[0,+\infty)$内是单调增加的,在$(-\infty,0]$内是单调减少的,在$(-\infty,+\infty)$内是不单调的(图 1-1-6). 而函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的(图 1-1-7).

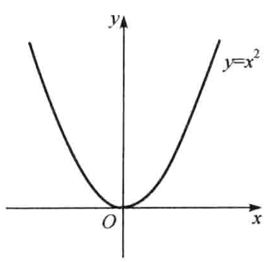

图 1-1-6

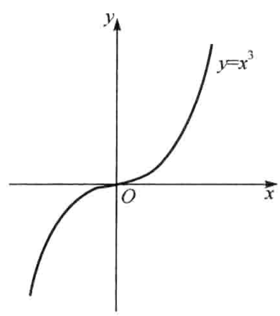

图 1-1-7

由定义易知,单调增加函数的图形沿 x 轴正向是逐渐上升的(图 1-1-8),单调减少的图形沿 x 轴正向是逐渐下降的(图 1-1-9).

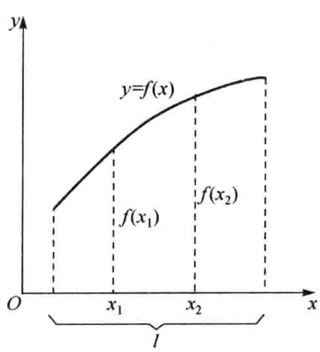

图 1-1-8

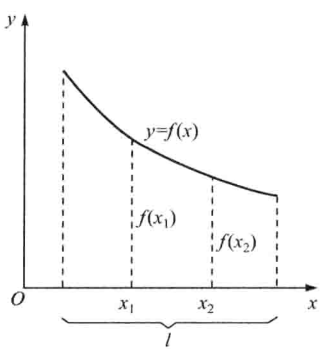

图 1-1-9

例 7 证明函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在$(-1,\ +\infty)$内是单调增加的函数.

证明 在$(-1,\ +\infty)$内任取两点 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}.$$

因为 x_1, x_2 是 $(-1, +\infty)$ 内任意两点，所以

$$1+x_1>0,\quad 1+x_2>0.$$

又因为 $x_1-x_2<0$，故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即

$$f(x_1)<f(x_2),$$

所以 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-1, +\infty)$ 内是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若 $\forall x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若 $\forall x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的（图 1-1-10）；奇函数的图形关于原点是对称的（图 1-1-11）.

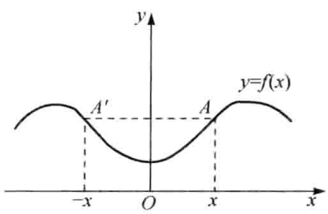

图 1-1-10

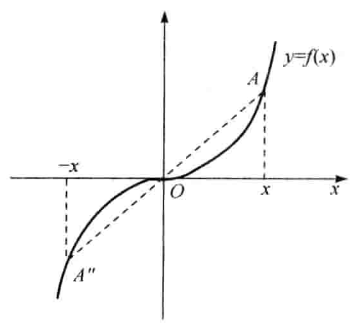

图 1-1-11

例如，函数 $y=\sin x$ 是奇函数；$y=\cos x$ 是偶函数.

例 8　判断函数

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}\quad(-1<x<1)$$

的奇偶性.

解　因为函数的定义域为 $(-1,1)$，且

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-e^x}{1+e^x}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\frac{e^x-1}{e^x+1}\cdot(-1)\ln\frac{1-x}{1+x}$$
$$=\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}=f(x).$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在常数 $T>0$，使得对一切 $x\in D$，有 $(x+T)\in D$，且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的**周期**.

例如，$\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期函数的图形特点是，如果把一个周期为 T 的周期函数在一个周期内的图形向左或向右平移周期的正整数倍距离，则它将与周期函数的其他部分图形重合(图 1-1-12).

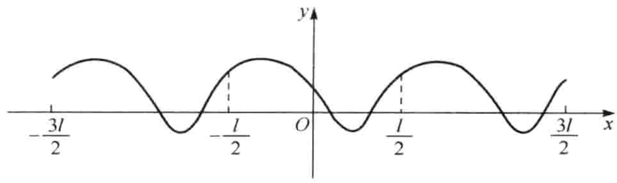

图 1-1-12

通常周期函数的周期是指其**最小正周期**. 但并非每个周期函数都有最小正周期.

例 9* 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\\0, & x\in\mathbf{Q}^C\end{cases},$$

容易验证它是一个周期函数，任何正有理数 r 都是它的周期. 因为不存在最小的正有理数，所以它没有最小正周期.

周期函数的应用是广泛的，因为在科学与工程技术中研究的许多现象都呈现出明显的周期性特征，如家用的电压和电流是周期的，用于加热食物的微波炉中电磁场是周期的，季节和气候是周期的，月相和行星的运动是周期的等.

例 10 设 a,b 为两个函数，且 $a<b$. 对于任意实数 x，函数 $f(x)$满足条件：

$$f(a-x)=f(a+x) \quad 及 \quad f(b-x)=f(b+x).$$

证明：$f(x)$以 $T=2(b-a)$周期.

证明 因为 $f[x+2(b-a)]=f[b+(x-2a+b)]=f[b-(x-2a+b)]$

$$=f(2a-x)=f[a+(a-x)]=f[a-(a-x)]=f(x).$$

故按周期函数的定义，$f(x)$以 $T=2(b-a)$周期.

1.1.7 数学建模——函数关系的建立

马克思说过，一门科学只有成功地应用数学时，才算达到了完善的地步. 在高新技术领域，数学已不再仅仅作为一门科学，而是许多技术的基础. 20 世纪下半叶以来，由于计算机软硬件的飞速发展，数学正以空前的广度和深度向一切领域渗透，而数学建模作为应用数学方法研究各领域中定量关系的关键与基础也越来越受到人们的重视.

在应用数学解决实际应用问题的过程中，先要将该问题量化，然后要分析哪些是常量，哪些是变量，确定选取哪个作为自变量，哪个作为因变量，最后要把实际问题中变量之间的函数关系正确抽象出来，根据题意建立起它们之间的**数学模型**. 数学模型的建立有助于我们利用已知的数学工具来探索隐藏其中的内在规律，帮助我们把握现状、预测和规划未来，从这个意义上说，我们可以把数学建模设想为旨在研究人们感兴趣的特定的系统或行为的一种数学构想.

在上述过程中，数学模型的建立是数学建模中最核心和最困难之处. 在本课程的学习中，我们将结合所学内容逐步深入地探讨不同的数学建模问题.

在许多实际问题中，往往只能通过观测或试验获取反映变量特征的部分经验数据，问题要求我们从这些数据出发来探求隐藏其中的某种模式或趋势. 如果这种模式确实存在，而我们又能找到近似表达这种趋势的曲线 $y=f(x)$，那么一方面就可以用这个表达式来概括这些数据，

另一方面能够以此预测其他 x 处的 y 值. 求这样一条拟合数据的特殊曲线类型的过程称为**回归分析**，该曲线称为**回归曲线**.

实际应用中有许多有用的回归曲线类型，如幂函数曲线、多项式函数曲线、指数函数曲线、对数函数曲线和正弦函数曲线等. 尽管有关回归分析的理论要到后续内容和后续课程（如概率论与数理统计等课程）中才会涉及，其中一些理论内容甚至在整个大学学习阶段都不会涉及，但作为一种重要的数学建模工具，如今的数学软件甚至像 Excel 那样的办公软件中都包含了回归分析的功能，因此，它并不影响我们从应用的角度来学习如何利用回归分析. 对实际问题进行数学建模.

例 11　为研究某国际标准普通信件（重量不超过 50g）邮资与时间的关系，得到如下数据：

年份	1978	1981	1984	1985	1987	1991	1995	1997	2001	2005	2008
邮资（分）	6	8	10	13	15	20	22	25	29	32	33

试构建一个邮资作为时间的函数的数学模型，在检验了这个模型是“合理”的之后，用这个模型来预测一下 2012 年邮资.

解　(1) 先将实际问题量化，确定自变量 x 和因变量 y. 用 x 表示时间，为方便计算，设起始年 1978 年为 0，用 y（单位：分）表示相应年份的信件的邮资，得到下表

x	0	3	6	7	9	13	17	19	23	27	30
y	6	8	10	13	15	20	22	25	29	32	33

(2) 作散点图（图 1-1-13）. 由图可见邮资与时间大致呈线性关系. 故可设 y 与 x 之间的函数关系为

$$y=ax+b,$$

其中 a,b 为待定常数.

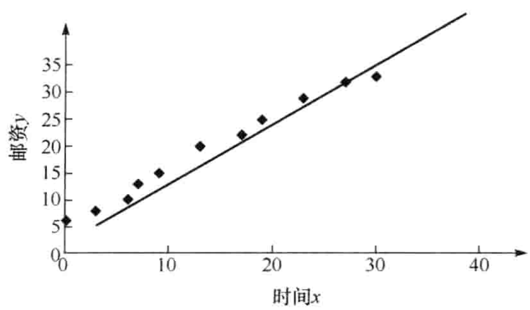

图 1-1-13　邮资与时间间散点图

(3) 求待定常数项 a,b，通过 Excel 相关功能的计算分别得到 a,b 的值.

$$a=0.9618,\quad b=5.898.$$

从而得到回归直线为

$$y=5.898+0.9618x.$$

(4) 在散点图中添加上述回归直线，可见该线性模型与散点图拟合得相当好，说明线性模型是合理的.

(5) 预测 2012 年邮资，即 $x=34$ 时 y 的取值. 将 $x=34$ 代入上述回归直线方程可得 $y\approx 39$. 即可预测 2012 年的邮资约为 39 分.