Finance

经济管理类课程教材

金融系列

随机过程与金融衍生品

汤 珂 编著

中国人民大学出版社

Finance
经济管理类课程教材
金融系列

随机过程与金融衍生品

汤　珂　编著

图书在版编目（CIP）数据

随机过程与金融衍生品/汤珂编著．—北京：中国人民大学出版社，2014.7
经济管理类课程教材·金融系列
ISBN 978-7-300-19552-0

Ⅰ.①随… Ⅱ.①汤… Ⅲ.①随机过程—高等学校—教材②金融衍生产品—高等学校—教材
Ⅳ.①O211.6②F830.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 178103 号

经济管理类课程教材·金融系列
随机过程与金融衍生品
汤　珂　编著
Suiji Guocheng yu Jinrong Yanshengpin

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京昌联印刷有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2014 年 9 月第 1 版
印　　张	11.5	**印　　次**	2014 年 9 月第 1 次印刷
字　　数	220 000	**定　　价**	28.00 元

出版说明

改革开放以来，中国的金融走上了高速发展的快车道，获得了前所未有的发展，有关院校都开设了金融课程，以便培养我国急需的人才。

一套高质量的教材是提高教学质量的前提之一。教材规定了教学内容，是教师授课取材之源，是学生求知和复习之本，没有优秀的教材，就无法提高教学质量。中国人民大学出版社推出了“经济管理类课程教材·金融系列”，旨在推动国内金融人才培养工作的开展。

组织编写这套教材时，我们遵照以下原则：

（1）教材实行本土化。为了更快地与国际接轨，许多人主张采用“拿来主义”原则，直接引进国外的教材。实践证明，我国与发达国家相比，国情不同，文化背景不同，思维方式不同，语言表述方式不同。广大的专家教授一致认为：我们培养的是中国金融人才，是为中国的金融服务的，教材还是本土化为宜。在了解我国现况之后，再学习国外的知识。把中国的背景知识与国际接轨才是我们最需要的。该套教材均为本土原创作品。

（2）精选作者，保证教材质量。金融与国家的政策联系紧密，应用性强，培养的学生既要懂理论又要会应用，既要

与国际接轨，又要考虑中国的国情。该套教材涵纳全国“政产学研”方面的作者，从源头上保证了这套书的质量。

(3) 要始终保持教材的“精”与“新”。现代金融日新月异，课程设置不断变化。该套教材根据形势的发展，不断推出新课程教材，并不断修订、完善。

(4) 形式多种多样，方便教材使用者。大部分书中每章都设有“本章小结”、“本章要点”、“本章关键术语”、“本章思考题”和“本章练习题”等栏目。此外，一部分书还有配套的“学习指导书”以方便读者学习和使用。

总之，这套系列教材紧密结合当前国内外金融研究的最新成果与金融政策发展的实际情况，全面讲述金融基本理论和基本知识。我们相信“经济管理类课程教材·金融系列”的推出，能够为读者掌握现代金融知识、培养人才起到应有的作用。

中国人民大学出版社

2004 年 1 月

前 言

我于2008年从英国剑桥大学博士毕业回国后，就到中国人民大学任教，一直担任研究生“金融衍生品”这门课的授课教师。这门课是金融学硕士的必修课，如果这门课没有学好，金融学的精髓就没有掌握。特别是股指和国债期货的相继上市加快了中国金融市场对金融衍生品等知识的需求，可以相信在不久的将来会有众多的金融衍生品进入中国金融市场。

“随机过程”是“金融衍生品”这门课的数学基础课。然而，参加“金融衍生品”课程的同学大部分在本科阶段没有学习过“随机过程”这门课。另外，他们在硕士的课程学习中也不想过多地学习“将来用不到”的数学知识。在与同学们的交谈中，我萌发了写一本《随机过程与金融衍生品》的教材的念头，想把金融学中需要用到的随机过程等数学知识重新归纳，自成体系，使同学们在学习中不浪费过多的时间在数学的细节上，而是掌握核心数学定理的朴素“物理”意义及其在金融学中的应用。因而本书在写作上力求不数学化，所以，对于很多定理的证明“不求甚解”。

经过五年的准备，本书终于付梓。

本书的一个特点是侧重理论与实际的结合，比如在介绍

随机微积分时重点加入一些在金融衍生品中的应用，在介绍金融衍生品时加入不同的金融交易策略作为例子，如期权交易策略、投资组合保险策略等，同时加入了金融业界常用的定价方法如惠利近似和最小二乘蒙特卡洛模拟等。对于没有金融学背景但想在金融界找到数量金融方向工作的同学，本书不失为一本有用的参考书。同时，这本书也是学习固定收益的基础，中国利率的市场化将会使得懂得连续时间序列利率模型的金融人才更有用武之地。

本书可以作为“金融衍生品”这门课的教材，特别是对于没有“随机过程”知识的同学极为适用。本书共 17 章，前 8 章讲随机过程，后 9 章讲金融衍生品。在使用本书时每章可以作为一个课时来讲。布朗运动是第一篇的基础，只有深入掌握布朗运动才能较为容易地掌握整个第一篇的内容；而伊藤引理是第一篇的精髓，也是随机过程最常用的定理。等价鞅测度是第二篇最为核心的内容，而由此导出的布莱克-斯科尔斯模型是金融学中最为常用的公式。

在本书的写作中，特别感谢张一、王萍、陈泽侗、屈正阳等同学把最初英文的课堂讲义翻译成中文并帮助审定本书的初稿。感谢同学们在课堂和课后的提问，正是由于你们的鼓励才有本书的完成。同时感谢父亲汤丙曦、母亲王金秀、妻子陈莹对我和双胞胎女儿无微不至的照顾，正是你们点点滴滴的关心使我在求知的日日夜夜中感到无比温暖。

汤　珂

2014 年 2 月

目　　录

第一篇　随机过程

第 1 章

预备知识

学习目标

在这一章，我们首先对在本书中经常用到的随机过程的基本知识作简要的介绍。读者应逐一了解基本知识点，若对滤波、迭代期望等知识点理解有些模糊，可在后续章节的学习中继续巩固。

我们从讨论一个掷骰子的例子开始。

例 1.1 一个掷骰子的游戏，规则为：参与者先掷一次骰子，根据掷得的点数，参与者可以选择结束游戏，或者再掷一次。如果选择结束游戏，则得到的收益即为第一次掷得的点数；如果选择再掷一次，则得到的收益为第二次掷得的点数。问参加这个游戏的公平价格应为多少？

解：游戏的公平价格应该等于整个游戏的期望收益。第一次掷后的期望收益为 $\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$，若第一次掷得的点数高于期望收益，则参与人会选择停止游戏，反之，游戏继续。所以若第一次掷得 4，5，6，则停止掷骰子，

若掷得1，2，3，则继续掷第二次。第二次掷后的期望收益同样也为$\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$。

因此，整个游戏的期望收益为$\frac{4+5+6+3.5+3.5+3.5}{6}=4.25$，期望收益即为公平价格。

这个掷骰子的游戏便是一个随机过程，我们把游戏看作是重复地掷骰子，每次掷得的点数是一个随机变量，它的可能集合是{1，2，3，4，5，6}，这一系列随机变量就构成了一个随机过程。按照游戏的规则，这个过程存在一个停止时间，当掷得的点数为4，5，6或者投掷次数达到两次时就停止该过程。“停时”也是随机过程中非常重要的一个概念，将在本篇第2章中介绍。

1.1 随机过程的定义

随机过程是定义在概率空间上的、以时间为标记的一组随机变量。

概率空间通常记作$(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$，在概率空间上有以下元素：$\Omega$，$\mathbb{F}$，$\mathbb{P}$。

Ω称作样本空间，是一次观测或实验中所有可能结果的集合，代表“有哪些事件可能发生”。

$\mathbb{F}$称作滤波（filtration）。滤波是“σ-域”的集合，滤波包含随机过程随时间演进所产生的信息。

$\mathbb{P}$是概率测度。它赋予Ω中的各个子集一定的概率。

以下我们对定义中涉及的概念进行详细的介绍。

1.1.1 样本空间

样本空间Ω是一次观测或实验中所有可能出现的结果组成的集合。例如掷骰子

的例子中 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ 。

1.1.2 σ-域（σ-代数）

集合 X 的 σ-代数是由 X 的各个子集（包括 X 本身）所组成的非空集合，常用 Σ 表示，而且 Σ 对余运算和可数并运算封闭。

换句话说，全集 X 的子集类 Σ 是一个 σ-代数，它满足如下性质：

（1）X 是 Σ 中的元素；

（2）如果集合 E 在 Σ 中，它的余集 X/E 也在 Σ 中；

（3）Σ 中的集合的可数并集也在 Σ 中；

（4）定义在 σ-域上的事件是可测的。可测的定义为：如果在当前所拥有的信息下，可以判断该事件是否发生，就称该事件是可测的。

考虑掷骰子游戏的样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，它的一个子集类 $\Sigma=\{\{1,2,3\},\{4,5,6\},\Phi,\Omega\}$（$\Omega$ 表示全集，Φ 表示空集），就是集合 Ω 的一个 σ-代数，其满足上面的四个性质。

1.1.3 滤波

我们用以下通货膨胀二叉树的例子来说明滤波的概念。

例 1.2 给定任意时点 t_i 的通货膨胀率，在 t_{i+1} 时只可能出现两种结果：上升或者下降。我们分别用 U 和 D 来表示。如图 1—1 所示。

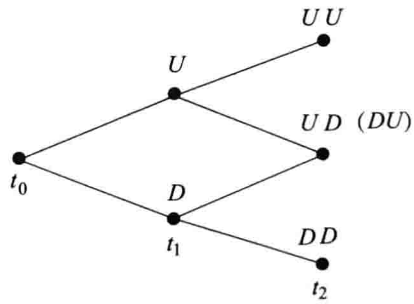

图 1—1

$F_0=\{\Phi,\Omega\}$，F_0 是一个 σ-域；

$F_1=\{\{U\},\{D\},\Phi,\Omega\}$，$\Omega=\{U,D\}$，$F_1$ 也是一个 σ-域；

$F_0,F_1,F_2,F_3,\cdots,F_T$ 这些 σ-代数按顺序排列成的集合 $\mathbb{F}_n=\{F_0,F_1,\cdots,F_n\}$ 称为滤波。在这个例子中，滤波记录了通货膨胀随时间变化的路径所产生的所有信息，而且随着时间的推移，滤波所包含的信息量也在增大。因此，滤波是递增的，即 $\mathbb{F}_0\subset\mathbb{F}_1\subset\mathbb{F}_2$。

1.1.4 概率测度的定义与性质

$\mathbb{P}$ 称为$\mathbb{F}$ 上的概率测度，若其满足以下条件：

（1）$\mathbb{P}$ 是一个定义在 Ω 上的集函数，它对 Ω 中的每个集合 A，都有一个实数 $P(A)$与之对应，并且满足$0 \leqslant P(A) \leqslant 1, P(\Phi)=0, P(\Omega)=1$；

（2）对任意无限序列 X_1，X_2，…，$\in \mathbb{F}$，$P(\bigcup_i X_i) \leqslant \sum_i P(X_i)$ 成立；

（3）对任意互不相交的无限序列 X_1，X_2，…，$\in \mathbb{F}$，$P(\bigcup_i X_i) = \sum_i P(X_i)$ 成立；

性质： 对任意两个事件 X 和 Y，$P(X \cap Y)=P(X)+P(Y)-P(X \cup Y)$。

Ω 可以看作是样本空间内各种事件所组成的集合，概率测度给出了实际发生的某事件的概率。

1.1.5 随机变量

随机变量是将 Ω 中的元素映射到实数集的函数。对于同一个样本空间，我们可以定义不同的随机变量。

例如：在给定时间 t_1 的通货膨胀率是一个随机变量，在给定时间 t_2 的通货膨胀率的平方也是一个随机变量。

1.1.6 随机过程

假设 $S_t(0 \leqslant t \leqslant T)$是以时间为标记的一系列随机变量的集合，它定义在概率空间$(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$上。当时间 t 固定时，S_t 就是概率空间$(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$上的一个随机变量，$S_t$ 并不表示 S 是 t 的函数，它只表示 S 是在 t 时刻发生的。有时我们也写成$S(t)$。

沿用第 1.1.3 节例 1.2 中通货膨胀的二叉树模型，定义在任意时点 t_i 的通货膨胀率 $S_{t_i}(0 \leqslant t_i \leqslant T)$是一个随机过程。