中国地质大学“十二五”规划教材

工程高等代数（第二版）

李宏伟 李 星 李志明 编

科学出版社

中国地质大学“十二五”规划教材

工程高等代数

（第二版）

李宏伟　李　星　李志明　编

中国地质大学“十二五”教材建设项目资助

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是《工程高等代数》的第二版，依据工科类本科数学基础课程教学基本要求修订而成.全书共7章，分别介绍了一元多项式、行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换，以及一些工程应用中所需要的代数内容.在内容的编排上突出主线，紧扣核心，围绕重点，凸显本质.全书注重理论、方法与应用的密切结合，综合运用描述性文字语言、符号化代数语言和直观化几何语言，从多个角度阐释概念、性质、定理、方法的内涵和意义.呈现代数知识的脉络结构，剖析要点难点的关键，总结求解的方法步骤，揭示问题的原理实质.本书例题和习题丰富，覆盖面广，层次性强.各章习题分为A、B两组，既作为练习，又是正文的补充，习题参考答案与提示附于书末.

本书可作为信息科学、计算机科学与技术、通信工程、系统工程、软件工程、地理信息系统、地质工程等有关本科专业的高等代数或线性代数课程的教材，也可供工科相关专业的师生和科技工作者阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

工程高等代数/李宏伟，李星，李志明编.—2版.—北京：科学出版社，2014

中国地质大学“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-040251-6

Ⅰ.①工… Ⅱ.①李… ②李… ③李… Ⅲ.①工程数学—高等代数—高等学校—教材 Ⅳ.①TB111

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第051575号

责任编辑：王雨舸 / 责任校对：董艳辉

责任印制：高 嵘 / 封面设计：蓝 正

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年6月第 一 版 开本：787×1000 1/16

2014年1月第 二 版 印张：15

2014年1月第一次印刷 字数：333 000

定价：32.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书第一版自2007年出版以来，我们一直将它作为“高等代数B”和“线性代数A”这两门课程的教材，经历了多次教学实践.此次修订及再版工作以工科类本科数学基础课程教学基本要求为指导，根据作者在课程教学实践中积累的经验，并充分采纳使用过本书的同行专家所提出的宝贵意见而完成.

此次再版，我们主要进行了以下工作：

(1) 增加了一些基本理论(例如：正交化方法、特征值和特征向量、矩阵的秩、最小二乘方法等)的直观解释，力求将代数学所蕴含的重要数学思想融入其中.

(2) 将一些性质梳理归并，集中陈述，以体现内容的系统性.

(3) 对某些定理的叙述和证明做了改进，行文更加简洁，思路更为直接.

(4) 对例题和习题进行了调整，特别将近年全国硕士研究生入学考试的新题型列入例题和习题中，较大幅度地调整了填空题和选择题，增加了一些考查基本概念、基本性质和基本原理的习题.

(5) 对全书内容作了一次全面的勘误.

(6) 对一些数学符号的使用进行了适当修订，以便于与同类教材对照衔接.

本书第一版自出版以来，广大读者和使用本书的同行们对本书提出了许多修改意见.刘剑锋、余绍权、杨迪威、刘智慧、李超群、张玉洁、边家文、付丽华、张世中、陈兴荣、苗秀花、沈远彤、李少华、黄娟、徐勇、邢婧、曾艳妮等同志阅读过再版的内容并提出了很好的建议.本书第二版得到了中国地质大学(武汉)“十二五”规划教材建设项目的资助，科学出版社也大力支持本书的再版.我们在此谨向关心本书、对本书提出宝贵意见的读者和专家一并表示衷心的感谢！

编　者

2013年8月

第一版前言

代数课程是高等学校理工科学生的重要基础课程，是学习后续的数学课程和专业课程的必备基础，其基本内容也是自然科学和工程技术领域中应用广泛的数学工具.随着信息科学与计算技术的发展，代数课程在理论和应用两方面的重要性越来越突出，同时使得一些专业对代数课程在内容的深度和广度上都提出了新的要求.而目前出版的高等代数教材，大多数是为数学类本科专业编写的.信息科学、计算机科学与技术、通信工程、系统工程、软件工程、地理信息系统、地质工程等有关本科专业，它们对于高等代数的内容和方法的要求及教学时数不同于数学类本科专业.因此，本书着重为这些专业的高等代数课程而编写.

在本书的编写过程中，我们参考了全国硕士研究生数学入学考试大纲，认真阅读了多种国内外的代数课程教材和硕士研究生入学考试复习教程，充分吸收众家之长，并结合我们长期从事高等代数和线性代数课程教学改革的研究与实践，同时考虑了不同专业对代数课程的教学要求.因此，在编写过程中作了以下探索：

（1）本书除包括教育部高等学校线性代数课程教学基本要求的内容外，还包括工程应用中常用的一些内容和方法，如一元多项式、矩阵的 Kronecker 积、广义逆、矩阵的导数与积分、最小二乘法、线性空间的同构和 Euclid 空间介绍等，以满足工程技术类专业的需要.

（2）突出矩阵和向量两大主要内容.本书重点建立矩阵和向量空间两大理论工具，并将它们贯穿于全书，以突出线性代数的核心内容.

（3）在结构上进行了精心编排和重组.本书将矩阵的概念、运算、秩和初等变换集中介绍，而向量组的线性相关性的讨论以矩阵为工具进行，线性方程组的求解是矩阵和向量理论的应用.

（4）例题和习题丰富.本书配备了丰富的例题和习题，以帮助加深对概念和理论的理解与掌握.习题按章安排，分 A，B 两组，其中 A 组题是基本题，B 组题具有理科特色，以适应对代数课程要求较高的专业的教学需要.书末附有习题参考答案与提示，便于学生练习检验.

（5）本书能够适应不同专业对线性代数的教学需要.全书内容适应于理工科本科专业 60 学时左右的高等代数课程的教学，第 2 至第 6 章适应于理工科本科专业 36 学时左右的线性代数课程的教学.带 * 号的内容可根据专业需要删去或留给学生自学.

本书是编者在多年来讲授代数课程讲义的基础上修改而成的.本书的出版得

到了中国地质大学"十一五"教材建设项目资助.另外,我们在编写出版过程中得到了中国地质大学教务处、数理学院全体领导和教师的大力支持与帮助.苗秀花和刘智慧两位老师对习题进行了计算并提出了许多有益的建议,谨在此向他们表示衷心的感谢.

由于编者水平所限,书中难免有不妥之处和缺点,敬请读者批评指正.

编　者

2007 年 3 月

目 录

第 1 章　一元多项式

多项式是代数学的一个重要组成部分，它不但与研究方程的解、矩阵的特征值、二次型等内容有关，而且在数学的其他分支和工程问题中都有广泛的应用，如分析线性系统时，往往需要研究多项式的根. 本章将讨论数域上多项式的代数结构，整除性和因式分解理论. 多项式理论包括一元多项式和多元多项式，本章主要讨论一元多项式.

1.1　数　　域

用 $\mathbf{Z}$,$\mathbf{Q}$,$\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{C}$ 分别表示整数集、有理数集、实数集和复数集. 显然有

$$\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

定义 1.1　设 P 是复数集 $\mathbf{C}$ 的子集，若它满足以下条件：① P 中至少含有一个不为零的数；② 对于 P 中的任何两个数 a,b，均有 $a+b \in P$,$a-b \in P$,$ab \in P$，且当 $b \neq 0$ 时，$\dfrac{a}{b} \in P$，则称 P 为一个**数域**.

根据上述定义，有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$、复数集 $\mathbf{C}$ 都是数域，整数集 $\mathbf{Z}$ 不是数域.

由于一个数域 P 至少含有一个不为零的数，设 $a \in P$ 且 $a \neq 0$，则 $a-a=0 \in P$，$\dfrac{a}{a}=1 \in P$，可见任何数域都包含数 0 与 1.

例 1.1　记 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbf{Q}\}$，则 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 是一个数域.

证　显然，$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 包含数 1. 设 α,$\beta \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$，且 $\alpha=a_1+b_1\sqrt{2}$,$\beta=a_2+b_2\sqrt{2}$，其中 a_1,b_1,a_2,$b_2 \in \mathbf{Q}$，则

$$\alpha \pm \beta=(a_1 \pm a_2)+(b_1 \pm b_2)\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2}),$$

$$\alpha\beta=(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2}).$$

再设 $\beta=a_2+b_2\sqrt{2} \neq 0$，即 a_2,b_2 不全为零，从而 $a_2-b_2\sqrt{2} \neq 0$，则

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\sqrt{2}.$$

由于 a_1,a_2,b_1,$b_2 \in \mathbf{Q}$，从而 $\dfrac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}$,$\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2} \in \mathbf{Q}$，所以 $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$.

综上所述，$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 是一个数域.

显然，$\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbf{R}$.

类似地,可以证明 $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})=\{a+b\sqrt{-1}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$ 也是一个数域.

例 1.2 设 $\mathbf{Z}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbf{Z}\}$,则 $\mathbf{Z}(\sqrt{3})$ 不是数域.

证 取 $\mathbf{Z}(\sqrt{3})$ 中两个数 $\alpha=1-2\sqrt{3}$,$\beta=1+2\sqrt{3}$,则有

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1-2\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}=-\frac{13}{11}+\frac{4}{11}\sqrt{3}\notin\mathbf{Z}(\sqrt{3}),$$

因此,$\mathbf{Z}(\sqrt{3})$ 不是数域.

定理 1.1 任何数域都包含有理数域 $\mathbf{Q}$.

证 设 P 是一个数域,则 $0,1\in P$,$1+1=2\in P$,$2+1=3\in P$,…,于是可得所有正整数都属于 P,由此得到 $0,n\in P$(n 为任意正整数),于是 $0-n=-n\in P$,即所有负整数也属于 P,从而整数集 $\mathbf{Z}\subseteq P$. 由于任意一个有理数都可表示成两个整数 m,n 的商 $\frac{m}{n}$ $(n\neq 0)$,从而 $\frac{m}{n}\in P$,因此有理数域 $\mathbf{Q}\subseteq P$.

定理 1.2 若数域 $P\supset\mathbf{R}$,则 $P=\mathbf{C}$.

证 显然 $P\subseteq\mathbf{C}$. 由于 $P\supset\mathbf{R}$,所以 P 中存在一个数 $\alpha\notin\mathbf{R}$,设为 $\alpha=a+b\sqrt{-1}$,$a,b\in\mathbf{R}$,$b\neq 0$. 由 $a,b\in\mathbf{R}\subset P$,可知

$$\sqrt{-1}=\frac{\alpha-a}{b}\in P.$$

因此,任取 $c+d\sqrt{-1}\in\mathbf{C}$,$c,d\in\mathbf{R}\subset P$,由于 P 是一个数域,$c+d\sqrt{-1}\in P$,即 $\mathbf{C}\subseteq P$. 故 $\mathbf{C}=P$.

1.2 一元多项式的定义与运算

定义 1.2 设 P 是一个数域,$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 P 中的数,x 为一个文字(符号),n 是一个非负整数,形式表达式

$$a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=f(x) \tag{1.1}$$

称为系数在数域 P 中的 x 的**一元多项式**,或称为数域 P 上的 x 的一元多项式.

多项式(1.1)中,a_ix^i 称为多项式 $f(x)$ 的 **i 次项**,a_i 称为 i 次项的**系数**;a_0 又称为**常数项**;若 $a_n\neq 0$,则称 a_nx^n 为**最高次项(或首项)**,a_n 称为**最高次项系数(或首项系数)**,n 称为多项式 $f(x)$ 的**次数**.

系数全为零的多项式称为**零多项式**,记为 0. 零多项式不规定次数.

非零多项式 $f(x)$ 的次数记为 $\partial f(x)$ 或 $\deg f(x)$.

例 1.3 $$f(x)=3x^5-3x^4+\frac{7}{2}x^2+x-1$$

是有理数域上的 5 次多项式，

$$g(x)=3x^6-2\mathrm{i}x^4+4x^2-\mathrm{i}$$

是复数域上的 6 次多项式，其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

数域 P 上所有以 x 为文字的一元多项式组成的集合记为 $P[x]$，即

$$P[x]=\{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\mid a_i\in P,\ i=0,1,\cdots,n,n\text{ 为非负整数}\}.$$

显然，$P\subset P[x]$. 在 $P[x]$ 中，若取 P 为有理数集、实数集和复数集，则可分别得到 $\mathbf{Q}[x]$，$\mathbf{R}[x]$ 和 $\mathbf{C}[x]$.

若 $P[x]$ 中两个多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 与 $g(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$ 的同次项的系数都相等，即 $a_i=b_i\ (i=0,1,\cdots,n)$，则称多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ **相等**，记为 $f(x)=g(x)$.

考虑 $P[x]$ 中多项式

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

和

$$g(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i,$$

若 $n\geqslant m$，则 $g(x)$ 也可以写为

$$g(x)=0x^n+\cdots+0x^{m+1}+b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i.$$

于是，定义两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和为

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\\&=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i.\end{aligned}\tag{1.2}$$

例 1.4　设 $f(x)=4x^5+5x^4-3x^3-7x+3$，$g(x)=9x^8+x^7+7x^4+12$，则

$$f(x)+g(x)=9x^8+x^7+4x^5+12x^4-3x^3-7x+15.$$

容易验证，多项式的加法满足以下运算律（$f(x),g(x),h(x)\in P[x]$）：

(1) 交换律　　$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$.

(2) 结合律　　$[f(x)+g(x)]+h(x)=f(x)+[g(x)+h(x)]$.

(3) $f(x)+0=f(x)$.

(4) 设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$，记 $-f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}(-a_i)x^i$，则

$$f(x)+(-f(x))=0,\quad -(-f(x))=f(x).$$

$P[x]$ 中两个多项式 $f(x),g(x)$ 的**差**定义为 $f(x)-g(x)=f(x)+[-g(x)]$. 于是有

$$f(x)-g(x)=-(g(x)-f(x)),$$

$$(f(x)-g(x))-h(x)=f(x)-(g(x)+h(x)).$$

$P[x]$ 中多项式 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$ 和 $g(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}b_ix^i$ 的**积**定义为

$$f(x)g(x)=a_nb_mx^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+\cdots$$
$$+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)x^2+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0,$$

这里,$f(x)g(x)$ 中 x^k 的系数为

$$c_k=a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_1b_{k-1}+a_0b_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j.$$

于是,也有

$$f(x)g(x)=c_{n+m}x^{n+m}+\cdots+c_kx^k+\cdots+c_1x+c_0=\sum_{k=0}^{n+m}c_kx^k=\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)x^k. \tag{1.3}$$

例 1.5 设 $f(x)=2x^3+x^2+2x+1$,$g(x)=x^2-3x-1$,于是

$$f(x)g(x)=2x^5-5x^4-3x^3-6x^2-5x-1.$$

容易证明,多项式的乘法满足以下运算律($f(x),g(x),h(x)\in P[x]$):

(1) 交换律 $f(x)g(x)=g(x)f(x)$.

(2) 结合律 $[f(x)g(x)]h(x)=f(x)[g(x)h(x)]$.

(3) 乘法对加法的分配律 $f(x)[g(x)+h(x)]=f(x)g(x)+f(x)h(x)$.

(4) $1\cdot f(x)=f(x)$, $0\cdot f(x)=0$.

数域 P 上的两个多项式的和、差、积仍然是 P 上的多项式,即对任意的 $f(x),g(x)\in P[x]$,有

$$f(x)\pm g(x)\in P[x],\quad f(x)g(x)\in P[x].$$

多项式的运算与次数之间有以下关系.

定理 1.3 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,且 $f(x)\neq 0,g(x)\neq 0$,则

(1) 当 $f(x)+g(x)\neq 0$ 时,$\partial[f(x)+g(x)]\leqslant \max[\partial f(x),\partial g(x)]$.

(2) $\partial[f(x)g(x)]=\partial f(x)+\partial g(x)$.

证 设

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n\neq 0),\quad g(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0\ (b_m\neq 0).$$

(1) 不妨设 $n\geqslant m$,则

$$f(x)+g(x)=(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0),$$

其中 $b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=b_n=0$,于是 $f(x)+g(x)$ 的次数不能超过 n,即

$$\partial[f(x)+g(x)]\leqslant \max\{\partial f(x),\partial g(x)\}.$$

(2) 由于 $f(x)g(x)=a_nb_mx^{n+m}+\cdots+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0$,而 $a_n\neq 0,b_m\neq 0$,所以 $a_nb_m\neq 0$,故 $f(x)g(x)$ 的次数为 $n+m$.

由定理1.3的第二个关系式立即得到结论:$f(x)g(x)=0$ 当且仅当 $f(x)=0$ 或 $g(x)=0$.

1.3 多项式的除法

在数域 P 上两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相加、相减与相乘后还是 P 上的多项式,但它们相

除就不一定是 P 上的多项式.或者说,在多项式范围内讨论问题,一般不能用除法.一种替代的方法是所谓的带余除法.

定义 1.3　设 P 是一个数域,$f(x),g(x)\in P[x]$,且 $g(x)\neq 0$,若 $q(x),r(x)\in P[x]$ 满足以下条件:①$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$;②$r(x)=0$ 或 $\partial r(x)<\partial g(x)$,则称 $q(x)$ 是 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的**商式**,$r(x)$ 是 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的**余式**.

定义 1.3 中的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别称为**被除式**和**除式**.

例 1.6　设 $f(x),g(x)\in \mathbf{Q}[x]$,且 $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$,$g(x)=x^2-x-1$,求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式与余式.

解　采用以下算式进行运算:

$$\begin{array}{r|r}
 & x^2-3\qquad\qquad\qquad \\ \cline{2-2}
x^2-x-1 & x^4-x^3-4x^2+4x+1 \\
 & x^4-x^3-x^2\qquad\qquad\quad \\ \cline{2-2}
 & -3x^2+4x+1 \\
 & -3x^2+3x+3 \\ \cline{2-2}
 & x-2
\end{array}$$

于是

$$f(x)=(x^2-3)g(x)+(x-2),$$

即 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式为 $q(x)=x^2-3$,余式为 $r(x)=x-2$.上式的除法也可用以下格式运算:

$$\begin{array}{r|r|l}
x^2-x-1 & x^4-x^3-4x^2+4x+1 & x^2-3=q(x) \\
 & x^4-x^3-x^2\qquad\qquad\quad & \\ \cline{2-2}
 & -3x^2+4x+1 & \\
 & -3x^2+3x+3 & \\ \cline{2-2}
 & r(x)=x-2 &
\end{array}$$

有时也可只用系数表示多项式,即

$$\begin{array}{rrr|rrrrr|rrr}
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -4 & 4 & 1 & 1 & 0 & -3 \\
 & & & 1 & -1 & -1 & & & & & \\ \cline{4-8}
 & & & & & -3 & 4 & 1 & & & \\
 & & & & & -3 & 3 & 3 & & & \\ \cline{4-8}
 & & & & & & 1 & -2 & & &
\end{array}$$

表示 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式为 $q(x)=x^2-3$,余式为 $r(x)=x-2$.

一般情形下,两个多项式相除所得的商式和余式是否存在? 是否唯一? 下面的定理给出了回答.

定理 1.4 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,且 $g(x)\neq 0$,则 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式和余式是存在唯一的.

证明略.

定义 1.4 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,若存在 P 上的多项式 $q(x)$,使 $f(x)=g(x)q(x)$,则称 $\boldsymbol{f(x)}$ **能被** $\boldsymbol{g(x)}$ **整除**,或称 $\boldsymbol{g(x)}$ **整除** $\boldsymbol{f(x)}$,记为 $g(x)\mid f(x)$.此时也称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的**因式**,称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的**倍式**.

当 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$,记为 $g(x)\nmid f(x)$.

根据定义 1.4,对于数域 P 上的两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)\neq 0$,$g(x)$ 整除 $f(x)$ 的充分必要条件是 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得余式为 0.

例 1.7 试问 s,t 取何值时,$f(x)=x^4+sx^3+2x^2+5x+t$ 能被 $g(x)=x^2-x-2$ 整除?

解法 1 由于

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^2-x-2 & x^4+sx^3+2x^2+5x+t & x^2+(s+1)x+(s+5) \\
 & x^4-x^3-2x^2 & \\
\cline{2-2}
 & (s+1)x^3+\quad 4x^2+\quad 5x+t & \\
 & (s+1)x^3-(s+1)x^2-2(s+1)x & \\
\cline{2-2}
 & (s+5)x^2+(2s+7)x+t & \\
 & (s+5)x^2-\ (s+5)x-2(s+5) & \\
\cline{2-2}
 & \qquad (3s+12)x+t+2s+10 &
\end{array}
$$

若要求 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除,则余式必须为零,即

$$(3s+12)x+t+2s+10=0,$$

或

$$\begin{cases}3s+12=0,\\ t+2s+10=0,\end{cases}$$

解得 $s=-4,t=-2$.因此,当 $s=-4,t=-2$ 时,$f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除.

解法 2 设

$$
\begin{aligned}
x^4+sx^3+2x^2+5x+t&=(x^2-x-2)(x^2+kx+l)\\
&=x^4+(k-1)x^3+(l-k-2)x^2-(l+2k)x-2l,
\end{aligned}
$$

于是

$$\begin{cases}k-1=s,\\ l-k-2=2,\\ l+2k=-5,\\ -2l=t,\end{cases}$$

解得 $l=1,k=-3,t=-2,s=-4$.因此,当 $s=-4,t=-2$ 时 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除.

下面是数域 P 上多项式整除的简单性质.

(1) 若 $c\in P,c\neq 0,f(x)\in P[x]$,则 $c\mid f(x)$.这是因为

$$f(x)=c\cdot(c^{-1}f(x)).$$

(2) 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,且 $f(x)\neq 0,g(x)\neq 0$,则 $g(x)\mid f(x)$且 $f(x)\mid g(x)$的充分必要条件是存在 $c\in P$ 且 $c\neq 0$,使得 $f(x)=cg(x)$.

充分性显然,我们来讨论必要性.设 $g(x)\mid f(x)$且 $f(x)\mid g(x)$,则存在 $p(x),q(x)\in P[x]$,使得

$$f(x)=g(x)p(x),\quad g(x)=f(x)q(x).$$

于是

$$f(x)=f(x)p(x)q(x).$$

因此 $p(x)q(x)=1$.所以 $\partial p(x)+\partial q(x)=\partial 1=0$,故 $\partial p(x)=\partial q(x)=0$,即有

$$p(x)=c\in P,\quad c\neq 0.$$

例如,$f(x),g(x)$ 为有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的多项式,且

$$f(x)=x^2-2x+4,\quad g(x)=\frac{1}{2}x^2-x+2,$$

多项式满足 $g(x)\mid f(x)$且 $f(x)\mid g(x)$,显然 $g(x)=\frac{1}{2}f(x)$.

(3) 若 $g(x)\mid f_1(x),g(x)\mid f_2(x),\cdots,g(x)\mid f_k(x)$,则

$$g(x)\mid u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_k(x)f_k(x),$$

其中 $u_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 为 P 上的多项式.

事实上,存在 $q_i(x)\in P[x]$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 使得 $f_i(x)=g(x)q_i(x)$,于是

$$\begin{aligned}&u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_k(x)f_k(x)\\=&g(x)[u_1(x)q_1(x)+u_2(x)q_2(x)+\cdots+u_k(x)q_k(x)].\end{aligned}$$

(4) 设 $f(x),g(x),h(x)\in P[x],g(x)\neq 0,h(x)\neq 0$,若 $h(x)\mid g(x),g(x)\mid f(x)$,则 $h(x)\mid f(x)$.

事实上,由 $g(x)=h(x)q_1(x),f(x)=g(x)q_2(x)$,可得

$$f(x)=h(x)[q_1(x)q_2(x)].$$

1.4　最大公因式

对于数域 P 上的多项式 $f(x),g(x),h(x)$,如果 $h(x)$ 既是 $f(x)$ 的因式,又是 $g(x)$ 的因式,那么 $h(x)$ 称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个**公因式**.

例如,x^2-1 是 x^4-1 与 x^6-1 的公因式.

在公因式中占有重要地位的是所谓的最大公因式.

定义 1.5 设 $f(x),g(x),d(x)\in P[x]$,且 $d(x)\neq 0$,满足:

(1) $d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$,即 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式;

(2) 若 $\varphi(x)\mid f(x),\varphi(x)\mid g(x)$,则 $\varphi(x)\mid d(x)$,即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式均是 $d(x)$ 的因式,则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个**最大公因式**.

例 1.8 设 $f(x),g(x)$ 为实数域 $\mathbf{R}$ 上的多项式,即 $f(x),g(x)\in\mathbf{R}[x]$,

$$f(x)=x^4-2x^2+1,\quad g(x)=x^4-1,$$

则 $x-1,x+1,x^2-1$ 都是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式,而 x^2-1 是它们的一个最大公因式.

关于最大公因式有以下性质:

(1) 若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式,则 $d_1(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式当且仅当 $d_1(x)=cd(x),c\in P,c\neq 0$.

(2) 设 $h(x)$ 与 $d(x)$ 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式与最大公因式,则

$$\partial h(x)\leqslant\partial d(x),$$

并且,当且仅当 $h(x)$ 也是最大公因式时等号成立.

(3) 若 $g(x)\mid f(x)$,则 $g(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

以上性质的证明留给读者.

从这些性质可知,数域 P 上的两个不全为零的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式如果存在,就不是唯一的,但相互之间只差一个常数因子,它们是公因式中次数最高者.我们约定:不全为零的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高次项系数为 1 的那个最大公因式(它是唯一的),记为 $(f(x),g(x))$.

下面讨论最大公因式的存在问题.

定理 1.5 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,则在 P 上存在一个 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)$,并且 $d(x)$ 可表示成 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合,即存在 $u(x),v(x)\in P[x]$,使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).\tag{1.4}$$

证 (1) 若 $f(x)=g(x)=0$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式为零.

(2) 若 $f(x),g(x)$ 不都为零,则不妨设 $g(x)\neq 0$.用 $g(x)$ 除 $f(x)$,得商式 $q_1(x)$,余式 $r_1(x)$.若 $r_1(x)\neq 0$,再用 $r_1(x)$ 除 $g(x)$,得商式 $q_2(x)$,余式 $r_2(x)$;若 $r_2(x)\neq 0$,再用 $r_2(x)$ 除 $r_1(x)$,得商式 $q_3(x)$,余式 $r_3(x)$,如此继续下去(这种方法称为**辗转相除法**).显然,所得余式的次数不断降低,这样经有限次辗转相除必有一个余式 $r_k(x)$,它能整除前一个余式 $r_{k-1}(x)$,即

$$\begin{cases}f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)\\ g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)\\ r_1(x)=q_3(x)r_2(x)+r_3(x)\\ \quad\cdots\cdots\\ r_{k-3}(x)=q_{k-1}(x)r_{k-2}(x)+r_{k-1}(x)\\ r_{k-2}(x)=q_k(x)r_{k-1}(x)+r_k(x)\\ r_{k-1}(x)=q_{k+1}(x)r_k(x)+0\end{cases}\tag{1.5}$$

对于式(1.5)中的各式,由下往上,由

$$r_{k-1}(x)=q_{k+1}(x)r_k(x)$$

可得 $r_k(x)$ 是 $r_{k-1}(x)$ 与 $r_k(x)$ 的最大公因式;再由

$$r_{k-2}(x)=q_k(x)r_{k-1}(x)+r_k(x)$$

可得 $r_k(x)$ 是 $r_{k-2}(x)$ 与 $r_{k-1}(x)$ 的最大公因式;继续逐步往上,可得 $r_k(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

对于式(1.5)中的各式,由下往上,得到

$$r_k(x)=r_{k-2}(x)-q_k(x)r_{k-1}(x).$$

再由 $r_{k-3}(x)=q_{k-1}(x)r_{k-2}(x)+r_{k-1}(x)$ 得到 $r_{k-1}(x)=r_{k-3}(x)-q_{k-1}(x)r_{k-2}(x)$,代入式(1.5),有

$$r_k(x)=[1+q_k(x)q_{k-1}(x)]r_{k-2}(x)-q_k(x)r_{k-3}(x).$$

用同样的方法,逐个消去 $r_{k-2}(x),r_{k-3}(x),\cdots,r_1(x)$,最后得到

$$r_k(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

这就是定理中的式(1.4).

定理1.5不仅告诉我们两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式是存在的,而且给出了一种求最大公因式的方法(即辗转相除法)及如何将最大公因式表示为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的组合.

例 1.9　设数域 P 上的多项式

$$f(x)=x^4-2x^3+x^2-x-2,\quad g(x)=x^3-x^2-x-2,$$

求 $(f(x),g(x))$,并求 $u(x),v(x)\in P[x]$ 使

$$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

解　用辗转相除法,有

$$\begin{array}{r|r|r|l}
x-1 & x^3-x^2-x-2 & x^4-2x^3+x^2-x-2 & x-1 \\
 & x^3\qquad -4x & x^4-x^3-x^2-2x & \\
\cline{2-3}
 & -x^2+3x-2 & -x^3+2x^2+x-2 & \\
 & -x^2\qquad +4 & -x^3+x^2+x+2 & \\
\cline{2-3}
 & 3x-6 & x^2\qquad -4 & \frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \\
 & & x^2-2x & \\
\cline{3-3}
 & & 2x-4 & \\
 & & 2x-4 & \\
\cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

用等式写出来,可得

$$f(x)=(x-1)g(x)+x^2-4,\quad g(x)=(x-1)(x^2-4)+3x-6,$$