高职高专“十一五”规划教材

高等数学应用教程

许艾珍 黄莉萍 李明 主编

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

航空工业出版社

高职高专“十一五”规划教材

高等数学应用教程

主　编　许艾珍　黄莉萍　李　明

副主编　吴小艳　陈杏莉　徐　杰

余　黎　李　良

主　审　许艾珍

航空工业出版社

北　京

内 容 提 要

本书共11章，分别介绍了函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，空间解析几何，多元函数微积分，无穷级数，线性代数和MATLAB基础及其应用等内容。附录给出了常用积分表。

本书结构合理、语言简洁、详略得当，既可作为高职高专院校高等数学课程教材，也可作为读者学习高等数学的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学应用教程 / 许艾珍，黄莉萍，李明主编
-- 北京 ：航空工业出版社，2010.8
ISBN 978-7-80243-573-5

I. ①高… II. ①许… ②黄… ③李… III. ①高等数学－高等学校－教材 IV. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第117924号

高等数学应用教程
Gaodengshuxue Yingyong Jiaocheng

航空工业出版社出版发行
（北京市安定门外小关东里14号 100029）
发行部电话：010-64815615 010-64978486

北京忠信印刷有限责任公司印刷 全国各地新华书店经售
2010年8月第1版 2010年8第1次印刷
开本：787×1092 1/16 印张：27.25 字数：680千字
印数：1—3000 定价：50.00元

编者的话

鉴于目前高职高专院校的快速发展和新型专业的不断出现，以及不同专业对数学要求的差异，高等数学课程改革也要随之及时作出相应的调整。本书就是贯彻新形势下高职高专的改革精神，针对高职高专学生学习的特点，结合地方特色和院校的特点而编写的，本教材具有以下特点：

1．依据教育部制定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》编写，在尽可能保持数学学科特点的基础上，注意到高职高专教育的特殊性，淡化了理论性，强化了针对性和实用性。

2．本教材开篇通过对三位著名数学家的贡献介绍，打开学习数学的大门，将学生领进数学殿堂，让学生了解数学知识的学习不仅仅局限于书中的理论学习，对一些科学家生平和经历的了解可以更深层次地激发学生学习数学的兴趣和热情。

3．本教材的每章都有本章导引，每节都有本节导引。在讲解每节知识点时，我们都是从具有实际问题和实际背景的本节导引入手，将问题引入，然后到概念、理论讲解，再到问题解决，即遵循实际——理论——实际的教学过程。

4．为了满足广大学生后继学习和发展的需要，本教材根据高职院校不同专业对数学需求的不同，增设了选学板块，可供不同的专业群模块化选择，增强了数学为专业服务的针对性和实用性。

5．数学建模是培养和锻炼学生解决实际问题最有效的途径之一。目前，数学建模问题已引起了各高职院校的重视，但仍有待进一步普及。为此，本教材根据教材的重点内容和主要思想方法，在相关章节后面安排了数学建模专题，让数学建模走进课堂，引导学生开展研究性学习，突出数学的应用性、拓展性和研究性，让学生深切感受数学的价值和魅力，明白数学不仅是思维，是工具，也是一种技能。

6．鉴于计算机的广泛应用以及数学计算软件的日臻完善，为了提高学生使用计算机解决数学问题的能力，本教材介绍了 MATLAB 软件的使用方法，在相关章节后面增设了数学实验教学环节，使学生不仅会手算，还会用计算机计算与绘图。

本书由苏州工业职业技术学院的许艾珍、黄莉萍、李明担任主编，由吴小艳、陈杏莉、徐杰、余黎、李良担任副主编，由许艾珍和李明修改、统稿、定稿。

本书在编写过程中，苏州职业大学的翁世有教授提出了许多宝贵的意见和建议，同时也得到了苏州工业职业技术学院领导的关心和大力支持，编者在此对他们深表谢意！

欢迎各位读者批评指正。

编　者

2010 年 6 月

目　录

第 1 章　函数、极限与连续性 …… 4

1.1　初等函数回顾 …… 4

1.1.1　函数的概念 …… 4

1.1.2　函数的几种特性 …… 5

1.1.3　反函数和复合函数 …… 5

1.1.4　初等函数 …… 6

习题 1.1 …… 10

1.2　极限的概念 …… 11

1.2.1　数列的极限 …… 11

1.2.2　函数的极限 …… 13

习题 1.2 …… 17

1.3　极限的运算法则 …… 18

1.3.1　极限的四则运算法则 …… 18

1.3.2　复合函数的极限法则 …… 20

*1.3.3　函数极限的性质 …… 20

*1.3.4　两个重要准则 …… 21

习题 1.3 …… 22

1.4　两个重要极限 …… 23

1.4.1　第一个重要极限 …… 23

1.4.2　第二个重要极限 …… 24

习题 1.4 …… 26

1.5　无穷小与无穷大 …… 27

1.5.1　无穷小 …… 27

1.5.2　无穷大 …… 29

1.5.3　无穷大与无穷小的关系 …… 30

1.5.4　无穷小的比较 …… 30

习题 1.5 …… 32

1.6　函数的连续性 …… 33

1.6.1　函数的连续性 …… 34

1.6.2　函数的间断点及其分类 …… 35

习题 1.6 …… 37

1.7　连续函数的四则运算与初等函数的连续性 …… 38

1.7.1　连续函数的四则运算 …… 38

1.7.2　复合函数的连续性 …… 38

1.7.3 初等函数的连续性 …… 39
1.7.4 闭区间上连续函数的性质 …… 40
习题 1.7 …… 42
1.8 利用极限建模 …… 43
复习题一 …… 45
第 2 章 导数与微分 …… 47
2.1 导数的概念 …… 47
2.1.1 导数的定义 …… 48
2.1.2 导数的几何意义 …… 49
2.1.3 可导与连续的关系 …… 50
习题 2.1 …… 51
2.2 导数的计算 …… 52
2.2.1 导数的基本公式 …… 52
2.2.2 导数的四则运算 …… 54
2.2.3 复合函数的导数 …… 55
2.2.4 几个求导方法 …… 57
2.2.5 高阶导数 …… 60
习题 2.2 …… 63
2.3 函数的微分 …… 65
2.3.1 微分的概念 …… 65
2.3.2 微分的几何意义 …… 66
2.3.3 微分运算法则 …… 66
2.3.4 近似计算 …… 68
习题 2.3 …… 69
2.4 微分方程模型 …… 70
复习题二 …… 72
第 3 章 导数的应用 …… 75
3.1 中值定理 …… 75
3.1.1 罗尔定理 …… 76
3.1.2 拉格朗日中值定理 …… 77
习题 3.1 …… 78
3.2 洛必达法则 …… 79
3.2.1 洛必达法则Ⅰ:($\frac{0}{0}$型) …… 79
3.2.2 洛必达法则Ⅱ:($\frac{\infty}{\infty}$型) …… 80
*3.2.3 其他类型的极限求法 …… 81
习题 3.2 …… 83
3.3 函数的单调性、极值与最值 …… 84

3.3.1 函数单调性的判别方法 …… 84
3.3.2 函数的极值 …… 86
3.3.3 函数的最大值与最小值 …… 87
习题 3.3 …… 89
3.4 函数的凹凸性与作图 …… 90
3.4.1 函数的凹凸性与拐点 …… 90
3.4.2 渐近线 …… 91
3.4.3 作初等函数的图形 …… 92
习题 3.4 …… 96
3.5 利用导数建模 …… 97
复习题三 …… 99
第 4 章 不定积分 …… 102
4.1 不定积分的概念 …… 102
4.1.1 原函数与不定积分的概念 …… 102
4.1.2 不定积分的性质 …… 103
4.1.3 不定积分的几何意义 …… 103
4.1.4 基本积分表 …… 104
习题 4.1 …… 106
4.2 凑微分法 …… 106
4.2.1 凑微分法的概念 …… 107
4.2.2 凑微分法举例 …… 107
习题 4.2 …… 110
4.3 变量代换法 …… 111
4.3.1 变量代换法的概念 …… 111
4.3.2 三角代换 …… 111
*4.3.3 双曲代换 …… 114
4.3.4 倒代换 …… 115
4.3.5 有理代换 …… 116
习题 4.3 …… 118
4.4 分部积分法 …… 118
4.4.1 分部积分公式 …… 118
4.4.2 被积函数为多项式与指数函数、三角函数乘积的情形 …… 119
4.4.3 被积函数为多项式与对数函数、反三角函数之积的情形 …… 120
4.4.4 形如 $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x$，$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x$ 的积分 …… 120
4.4.5 被积函数由某些复合函数构成的情形 …… 121
习题 4.4 …… 123
*4.5 其他积分方法 …… 123
4.5.1 简单有理分式函数的积分 …… 123

4.5.2 三角函数有理式的积分 …… 124
4.5.3 无理函数的积分 …… 125
习题 4.5 …… 126
复习题四 …… 126
第 5 章 定积分及其应用 …… 129
5.1 定积分的概念与性质 …… 129
5.1.1 定积分的概念 …… 130
5.1.2 定积分的几何意义 …… 131
5.1.3 定积分的性质 …… 132
习题 5.1 …… 133
5.2 微积分基本定理 …… 133
5.2.1 原函数存在定理 …… 133
5.2.2 微积分基本定理 …… 135
习题 5.2 …… 136
5.3 定积分的换元积分法与分部积分法 …… 137
5.3.1 凑微分法 …… 137
5.3.2 变量代换法 …… 138
5.3.3 分部积分法 …… 139
*5.3.4 三角函数积分 …… 139
习题 5.3 …… 140
5.4 广义积分 …… 140
5.4.1 无穷区间上的广义积分 …… 141
5.4.2 无界函数的广义积分 …… 142
习题 5.4 …… 143
5.5 定积分在几何上的应用 …… 144
5.5.1 平面图形的面积 …… 144
5.5.2 旋转体的体积 …… 146
*5.5.3 曲线的弧长 …… 147
习题 5.5 …… 148
5.6 积分方程模型 …… 148
复习题五 …… 149
第 6 章 常微分方程 …… 153
6.1 常微分方程的基本概念 …… 153
6.1.1 定义 …… 154
6.1.2 可分离变量的微分方程 …… 154
6.1.3 一阶齐次微分方程 …… 155
6.1.4 高阶微分方程 …… 156
习题 6.1 …… 157
6.2 一阶线性微分方程 …… 157

6.2.1 一阶线性微分方程与常数变易法 …… 158
6.2.2 一阶线性微分方程求解举例 …… 158
习题 6.2 …… 161
6.3 可降阶的二阶微分方程 …… 161
6.3.1 $y''=f(x,y')$ 型 …… 162
6.3.2 $y''=f(y,y')$ 型 …… 163
习题 6.3 …… 164
6.4 二阶常系数线性微分方程 …… 164
6.4.1 二阶常系数线性微分方程解的性质及通解结构 …… 165
6.4.2 二阶常系数齐次线性微分方程的解法 …… 166
6.4.3 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法 …… 168
习题 6.4 …… 171
复习题六 …… 171
第 7 章 空间解析几何 …… 173
7.1 空间直角坐标系和向量 …… 173
7.1.1 空间直角坐标系 …… 173
7.1.2 向量的基本概念 …… 175
7.1.3 向量的线性运算 …… 175
7.1.4 向量的坐标表示方法 …… 177
7.1.5 用坐标表示向量的模和方向 …… 178
习题 7.1 …… 180
7.2 向量的数量积与向量积 …… 180
7.2.1 向量的数量积 …… 181
7.2.2 向量的向量积 …… 183
习题 7.2 …… 185
7.3 空间平面与直线的方程 …… 186
7.3.1 平面方程 …… 186
7.3.2 直线方程 …… 189
7.3.3 求直线方程和平面方程的综合例题 …… 191
7.3.4 平面、直线间的关系 …… 193
习题 7.3 …… 197
7.4 二次曲面与空间曲线 …… 198
7.4.1 曲面方程的概念 …… 198
7.4.2 球面 …… 199
7.4.3 柱面 …… 199
7.4.4 旋转曲面 …… 201
7.4.5 空间曲线及其方程 …… 202
习题 7.4 …… 203
复习题七 …… 203

第 8 章　多元函数微积分 …… 205
8.1　多元函数的基本概念 …… 205
8.1.1　多元函数的概念 …… 205
8.1.2　二元函数的极限 …… 207
8.1.3　二元函数的连续性 …… 208
8.1.4　二元连续函数在有界闭区域上的性质 …… 208
习题 8.1 …… 209
8.2　偏导数 …… 209
8.2.1　偏导数概念与计算 …… 210
8.2.2　高阶偏导数 …… 212
习题 8.2 …… 213
8.3　全微分 …… 214
8.3.1　全微分的定义 …… 214
8.3.2　全微分在近似计算方面的应用 …… 216
习题 8.3 …… 217
8.4　多元复合函数与隐函数的求导 …… 217
8.4.1　复合函数的求导法则 …… 218
8.4.2　隐函数的求导公式 …… 221
习题 8.4 …… 223
8.5　多元函数的极值和最值 …… 224
8.5.1　二元函数的极值 …… 224
8.5.2　多元函数的最值 …… 226
8.5.3　二元函数的条件极值 …… 227
习题 8.5 …… 229
8.6　二重积分的概念与性质 …… 229
8.6.1　二重积分的概念 …… 230
8.6.2　二重积分的性质 …… 231
习题 8.6 …… 233
8.7　二重积分的计算与应用 …… 234
8.7.1　直角坐标系下二重积分的计算 …… 234
8.7.2　极坐标系下二重积分的计算 …… 239
8.7.3　二重积分的应用 …… 241
习题 8.7 …… 243
复习题八 …… 244
第 9 章　无穷级数 …… 247
9.1　常数项级数的概念和性质 …… 247
9.1.1　数项级数的基本概念 …… 247
9.1.2　无穷级数的基本性质 …… 249
习题 9.1 …… 250

9.2 数项级数的审敛法 …… 251
9.2.1 正项级数及其审敛法 …… 251
9.2.2 交错级数审敛法 …… 254
9.2.3 任意项级数的绝对收敛与条件收敛 …… 255
习题 9.2 …… 256
9.3 函数项级数与幂级数 …… 257
9.3.1 函数项级数的概念 …… 257
9.3.2 幂级数及其收敛区间的求法 …… 257
9.3.3 幂级数的四则运算 …… 260
9.3.4 幂级数的分析运算 …… 261
习题 9.3 …… 264
9.4 函数展开成幂级数 …… 264
9.4.1 泰勒级数 …… 264
9.4.2 函数展开成幂级数的直接展开法 …… 265
9.4.3 函数展开成幂级数的间接展开法 …… 266
习题 9.4 …… 269
复习题九 …… 269
第 10 章 线性代数 …… 272
10.1 行列式的概念 …… 272
10.1.1 二阶行列式的概念 …… 272
10.1.2 三阶行列式的概念 …… 273
10.1.3 n 阶行列式的概念 …… 275
习题 10.1 …… 278
10.2 行列式的性质 …… 279
10.2.1 行列式的性质 …… 279
习题 10.2 …… 283
10.3 克莱姆法则 …… 284
10.3.1 克莱姆法则 …… 284
习题 10.3 …… 287
10.4 矩阵及其运算 …… 287
10.4.1 矩阵的概念 …… 288
10.4.2 特殊矩阵的介绍 …… 288
10.4.3 矩阵的运算 …… 289
习题 10.4 …… 295
10.5 可逆矩阵 …… 296
10.5.1 逆矩阵的概念 …… 296
10.5.2 伴随矩阵的概念 …… 297
10.5.3 可逆矩阵求解方法及应用 …… 298
习题 10.5 …… 300

10.6 矩阵的初等变换 …… 301
10.6.1 矩阵初等变换的概念 …… 302
10.6.2 阶梯形矩阵与矩阵的秩 …… 302
10.6.3 初等矩阵 …… 305
10.6.4 用初等矩阵求逆矩阵 …… 308
习题 10.6 …… 309
10.7 线性方程组的解 …… 310
10.7.1 非齐次线性方程组的解 …… 311
10.7.2 齐次线性方程组的解 …… 313
习题 10.7 …… 315
10.8 n维向量及其相关性 …… 316
10.8.1 n维向量的概念 …… 317
10.8.2 向量的运算 …… 317
10.8.3 向量的线性组合 …… 318
10.8.4 向量的线性相关性 …… 320
10.8.5 向量组的秩 …… 322
10.8.6 极大无关组 …… 323
习题 10.8 …… 325
10.9 线性方程组解的结构 …… 326
10.9.1 齐次线性方程组解的结构 …… 326
10.9.2 非齐次线性方程组解的结构 …… 329
习题 10.9 …… 330
*10.10 特征值与特征向量 …… 331
10.10.1 矩阵的特征值和特征向量 …… 331
10.10.2 特征值的性质 …… 334
10.10.3 矩阵对角化 …… 335
习题 10.10 …… 338
10.11 线性规划 …… 339
10.11.1 线性规划数学模型 …… 339
10.11.2 图解法 …… 341
10.11.3 单纯形方法 …… 342
习题 10.11 …… 348
10.12 整数规划 …… 349
10.12.1 整数规划介绍 …… 350
10.12.2 分支定界法 …… 350
10.12.3 0-1 规划 …… 355
10.12.4 0-1 规划的解法 …… 357
习题 10.12 …… 359
10.13 规划模型 …… 360

复习题十 …… 363
第 11 章 MATLAB 基础及其应用 …… 366
11.1 MATLAB 简介 …… 366
11.1.1 MATLAB 的基本功能 …… 366
11.1.2 MATLAB 的特点 …… 366
11.1.3 MATLAB 操作界面 …… 368
11.2 MATLAB 基本运算与函数 …… 369
11.2.1 基本运算 …… 369
11.2.2 MATLAB 常用的函数 …… 369
11.3 一元函数的极限、导数与积分 …… 370
11.3.1 利用 MATLAB 求极限 …… 370
11.3.2 利用 MATLAB 求导数 …… 370
11.3.3 利用 MATLAB 求积分 …… 371
习题 11.3 …… 372
11.4 导数应用 …… 372
11.4.1 利用 diff 函数求极值点和拐点 …… 372
11.4.2 绘制函数图形 …… 373
习题 11.4 …… 374
11.5 常微分方程 …… 374
习题 11.5 …… 375
11.6 空间解析几何 …… 375
11.6.1 向量的生成 …… 375
11.6.2 向量的运算 …… 375
11.6.3 向量夹角的余弦公式 …… 376
11.6.4 绘制三维曲面图 …… 376
习题 11.6 …… 377
11.7 二元函数微积分 …… 377
11.7.1 二元显函数求导 …… 377
11.7.2 二元隐函数求导 …… 378
11.7.3 二重积分 …… 378
习题 11.7 …… 379
11.8 级数 …… 379
习题 11.8 …… 380
11.9 线性代数 …… 380
11.9.1 特殊矩阵 …… 380
11.9.2 矩阵的运算 …… 380
11.9.3 矩阵的逆矩阵 …… 381
11.9.4 矩阵的除法 …… 381
11.9.5 矩阵的秩 …… 382

11.9.6 利用 MATLAB 求解规划模型 …… 382
习题 11.9 …… 383
附录——积分表 …… 384
参考答案 …… 392

三位数学家简介

芝诺(Zeno)(约公元前495—435)

芝诺悖论的历史,大体上也就是连续性、无限大和无限小这些概念的历史.

——卡约里

“大圆的面积是我的知识,小圆的面积是你的知识,我的知识比你们的多.但是,这两个圆圈的外面就是你们和我无知的部分.大圆圈的周长比小圆圈的周长更长,因而我接触的无知的范围比你们更大.这就是我为什么常常怀疑自己的知识的原因.”

——芝诺

芝诺生活在古希腊的埃利亚城邦,他是埃利亚学派的著名哲学家巴门尼德的学生和朋友.芝诺因其悖论而著名,并因此在数学和哲学两方面享有不朽的声誉.芝诺悖论是一系列关于运动的不可分性的哲学悖论.他的悖论概括为以下四点:

一、二分法悖论:任何一个物体要想由A点运动到B点,必须首先到达AB的中点C,随后需要到达CB的中点D,再随后要到达DB的中点E.依此类推,这个二分过程可以无限地进行下去,这样的中点有无限多个.因此,该物体永远也到不了终点B.

不仅如此,我们会得出运动是不可能发生的,或者说这种旅行连开始都有困难.因为在进行后半段路程之前,必须先完成前半段路程,而在此之前又必须先完成前1/4路程……因此,物体根本不能开始运动,因为它被道路无限分割阻碍着.

二、阿基里斯追龟悖论:如果让乌龟先行一段路程,那么阿基里斯将永远追不上乌龟.假定乌龟先行了一段距离,阿基里斯为了赶上乌龟,必须要到达乌龟的出发点A.但当阿基里斯到达A点时,乌龟已经向前进到了B点.而当阿基里斯到达B点时,乌龟又已经到了B前面的C点……依此类推,两者虽越来越接近,但阿基里斯永远落在乌龟的后面而追不上乌龟.

三、飞矢不动悖论:任何一个东西呆在一个地方那不叫运动,可是飞动着的箭在任何一个时刻不也是呆在一个地方吗?既然飞矢在任何一个时刻都能呆在一个地方,那飞矢当然是不动的.

四、运动场悖论.芝诺提出这一悖论可能是针对时间存在着最小单位一说(现在的

普朗克一惠勒时间,Planck-Wheeler time).对此,他做出如下论证:设想有三行实体,最初它们首尾对齐.设想在最小时间单元内,C列不动,A列向左移动一位,B列向右移动一位.相对B而言,A移动了两位.就是说,我们应该有一个能让B相对于A移动一位的时间.自然,这时间是单元时间的一半,但单元时间是假定不可分的,那么这两个时间就是相同的,即最小时间单元与它的一半相等.

这些悖论中最著名的两个是:“阿基里斯跑不过乌龟”和“飞矢不动”.而芝诺的最大功绩就在于把动和静的关系、无限和有限的关系、连续和离散的关系惹人注意地提了出来,并进行了辩证的考察.这些方法现在可以用微积分(无限)的概念进行解释.

芝诺在哲学上被亚里士多德誉为辩证法的发明人.黑格尔在他的《哲学史讲演录》中指出:“芝诺主要是客观地辩证地考察了运动”,并称芝诺是“辩证法的创始人”.

艾萨克·牛顿(Isaac Newton)(1642—1727)

我不知道在别人看来,我是什么样的人;但在我自己看来,我不过就像是一个在海滨玩耍的小孩,为不时发现比寻常更为光滑的一块卵石或比寻常更为美丽的一片贝壳而沾沾自喜,而对于展现在我面前的浩瀚的真理的海洋,却全然没有发现.

——艾萨克·牛顿

在牛顿的全部科学贡献中,数学成就占有突出的地位,其成果可以概括为以下四个方面:

一、发现了二项式定理,而二项式的展开是研究级数论、函数论、数学分析、方程理论的有力工具.

二、创立了微积分,牛顿称之为“流数学”,它所处理的一些具体问题,如切线问题、求积问题、瞬时速度问题以及函数的极大和极小值问题等,都超越了前人.

三、引进极坐标,发展三次曲线理论.牛顿对解析几何作出了意义深远的贡献,他是极坐标的创始人,是第一个对高次平面曲线进行广泛研究的人.

四、推进方程论,开拓变分法.牛顿在代数方面也作出了经典的贡献,他的《广义算术》大大推动了方程论.他发现了实多项式的虚根必定成双出现,求多项式根的上界的规则等.

牛顿说过这样的话:“如果我比其他人看得更远些,那是因为我站在巨人的肩上.”在这些巨人当中,最高大的有笛卡尔、开普勒和伽利略.从笛卡尔那里,牛顿继承了解析几何;从开普

勒那里，牛顿继承了行星运动的三个基本定律；从伽利略那里，得到了成为他自己动力学奠基石的运动三定律中的头两个. 所以，牛顿是动力学和天体力学的建筑师.

牛顿是坚强的，在他生命的最后三年，他一直在和病魔作斗争，他对待痛苦毫不畏惧的勇气和忍耐力；牛顿是幸运的，他在世时就得到了他应得的一切.

莱布尼兹(G · W · Leibniz) (1646—1716)

好的数学符号能节省思维劳动，运用符号的技巧是数学成功的关键之一.

——莱布尼兹

我有很多想法，如果有一天，比我更有洞察力的人把他们卓越的才智与我的劳动结合起来，深入地研究这些想法，那时它们也许会有些用处.

——莱布尼兹

莱布尼兹(Gottfriend Wilhelm Leibniz)是17、18世纪之交德国最重要的数学家、物理学家和哲学家，一个举世罕见的科学天才，和牛顿同为微积分的创建人. 他博览群书，涉猎百科，他对法律、宗教、政治、数学、历史、文学逻辑、玄学、思辨哲学等多个领域都做出了杰出的贡献，对丰富人类的科学知识宝库做出了不可磨灭的贡献. "样样皆通的大师"，这是对莱布尼兹最恰当的描述.

莱布尼兹对数学领域中的分析和组合(或连续与离散)进行了深入的研究. 他曾讨论过负数和复数的性质，得出复数的对数并不存在，共扼复数的和是实数的结论. 在后来的研究中，莱布尼茨证明了自己结论是正确的. 他还对线性方程组进行研究，对消元法从理论上进行了探讨，并首先引入了行列式的概念，提出行列式的某些理论. 此外，莱布尼兹还创立了符号逻辑学的基本概念.

在积分法方面，他从求曲线所围面积的积分概念出发，把积分看作是无穷小的和，并引入积分符号. 他的这个符号，以及微分学的要领和法则一直保留在当今的教材中；莱布尼兹也发现了微分和积分是一对互逆的运算，并建立了沟通微分与积分内在联系的微积分基本定理，从而使原本各自独立的微分学和积分学构成统一的微积分学的整体.

莱布尼兹奋斗的主要目标是寻求一种可以获得知识和创造发明的普遍方法，这种努力导致许多数学的发现. 例如，他的"普适符号"超越了他的时代两个世纪，可以说莱布尼兹不止活了一生，而是活了好几世. 他作为外交官、历史学家、哲学家、数学家，在每一个领域中都完成了足够一个普通人干一辈子的事情.