金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

2015

李永乐 · 王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

概率论与数理统计辅导讲义

主编 ◎ 王式安

"概率"辅导名师内部讲义首次公开出版!

★本书的最大特点★

内容实用 全面的考试内容，清晰的逻辑结构，让考生真正做到心中有数

参考性强 经典例题，全新练习，指导学习精髓，让你弄清原理心里有底

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

2015

李永乐·王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

概率论与数理统计辅导讲义

主编 ◎ 王式安

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计辅导讲义/王式安主编. 一西安:西安交通大学出版社,2014.3

ISBN 978-7-5605-6088-5

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①概率论—研究生—入学考试—自学参考资料②数理统计—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ.　①021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 049915 号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,敬请读者识别。

概率论与数理统计辅导讲义

主　　编:王式安
责任编辑:王宁　柳晨
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:西安交通大学出版社
地　　址:西安市兴庆南路 10 号(邮编:710049)
电　　话:(029)82668315　82669096(总编办)
　　　　(029)82668357　82667874(发行部)
印　　刷:大厂回族自治县彩虹印刷有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:10.25
字　　数:236 千字
版　　次:2014 年 4 月第 1 版
印　　次:2014 年 4 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5605-6088-5/0・461
定　　价:26.80 元

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换　　电话:(010)51906740

前　言

本书是为准备考研的学生复习“概率论与数理统计”而编写的一本辅导讲义，由编者近年来的辅导班笔记改写而成。本书也可作为在校大学生学习“概率论与数理统计”时的参考书。

全书在结构上共八章及一个附录，每章均由**考试内容**，**考试要求**，**基本概念**、**基本理论和基本方法**，**典型例题分析选讲**，**练习题**，**练习题答案**，**练习题提示**七部分组成。为了方便同学们总结归纳以及更好地掌握考试的知识要点，本书的章节顺序安排和内容讲解程度上与《考试大纲》保持一致。

本书力求用不多的篇幅，在较短的时间内，帮助同学们搞清基本概念，掌握基本理论和方法，了解重点和难点并澄清一些常犯的错误与疑惑。一方面，通过对精选**典型例题**的分析讲评，帮助同学们理清解题思路，熟悉常用的方法、技巧。题后的评注，希望同学们能认真多读两遍，这是重点、难点、知识结合点以及解题的基本方法和应注意的问题。另一方面，精编适量的**练习题**，帮助同学们更好地理解和掌握基本内容、基本解题方法，达到巩固、悟新与提高的目的。每一道练习题都配有答案，并对解题过程中的难点给出了提示。

在考研数学中，数学一和数学三考概率论与数理统计，占 5 个考题(2 个选择，1 个填空，2 个解答)，分值为 34 分。相对于高等数学丰富多变的题型与方法，概率论与数理统计这门学科考查的题型较固定、解题方法单一、解题技巧较少。所以，把握“概率论与数理统计”的考点，重视基本功的训练，持之以恒，那么概率复习起来是不会觉得很困难，考试中有关概率的题目也是容易得分的。附录中提供了最新的“概率论与数理统计”的考题，希望同学们在使用本书时，能随时翻看，体会考研概率题型的类型和特点。

总之，希望本书能对同学们的复习备考有所帮助。由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，欢迎批评指正。

编　者

2014 年 4 月

目　录

第一章　随机事件和概率

一、考试内容

随机事件与样本空间　事件的关系与运算　完备事件组　概率的概念　概率的基本性质　古典型概率　几何型概率　条件概率　概率的基本公式　事件的独立性　独立重复试验

二、考试要求

1. 理解 随机事件，概率、条件概率，事件的独立性，独立重复试验.

2. 了解 样本空间(基本事件).

3. 掌握 事件的关系及运算，概率的基本性质，概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式，用事件独立性进行概率计算，计算独立重复试验有关事件概率的方法.

4. 会 计算古典型概率和几何型概率.

三、基本概念、基本理论和基本方法

1. 随机事件与样本空间

(1) 随机试验

定义　对随机现象进行观察或实验称为随机试验，简称试验，记作 E. 它具有如下特点：

1° 可以在相同条件下重复进行；

2° 所得的可能结果不止一个，且所有可能结果都能事前已知；

3° 每次具体实验之前无法预知会出现哪个结果.

(2) 样本空间

定义　随机试验的每一可能结果称为样本点，记作 ω. 由所有样本点全体组成的集合称为样本空间，记作 Ω.

显然，样本点是组成样本空间的元素，于是有 $\omega \in \Omega$.

(3) 随机事件

定义 样本空间的子集称为**随机事件**，简称**事件**，常用字母 A,B,C 等表示.

随机事件是由样本空间中的元素即样本点组成，由一个样本点组成的子集是最简单事件，称为**基本事件**. 随机事件既然由样本点组成，因此，也可能将随机事件看成是由基本事件组成.

如果一次试验的结果为某一基本事件出现，就称该基本事件出现或发生. 如果组成事件 A 的一个基本事件出现或发生，也称事件 A 出现或发生.

把 Ω 看成一事件，则每次试验必有 Ω 中某一基本事件(即样本点)发生，也就是每次试验 Ω 必然发生，称 Ω 为**必然事件**.

把不包含任何样本点的空集 $\varnothing$ 看成一个事件. 每次试验 $\varnothing$ 必不发生，称 $\varnothing$ 为**不可能事件**.

2. 事件间的关系与运算

(1) 事件的包含

定义 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

从集合关系来说，$A \subset B$ 就是 A 中的每一个样本点都属于 B.

(2) 事件的相等

定义 如果 $A \supset B$ 与 $B \supset A$ 同时成立，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A = B$.

$A = B$ 表示事件 A 与事件 B 有完全相同的样本点.

(3) 事件的交

定义 如果事件 A 与事件 B 同时发生，则称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的交或积，记为 $A \cap B$ 或 AB.

集合 $A \cap B$ 是由同时属于 A 与 B 的所有公共样本点构成.

事件的交可以推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形：

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A_1A_2\cdots A_n,$$

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = A_1A_2\cdots A_n\cdots.$$

(4) 互斥事件

定义 如果事件 A 与事件 B 满足关系 $AB = \varnothing$，即 A 与 B 同时发生是不可能事件，则称事件 A 和事件 B 为**互斥**或**互不相容**.

互斥的两事件没有公共样本点.

事件的互斥可以推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形：

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件均互斥，即 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n$，则称这 n 个事件是两两互斥或两两互不相容.

如果可数无穷个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中任意两个事件均互斥，即 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n,\cdots$，则称这可数无穷个事件是两两互斥或两两互不相容.

(5) 事件的并

定义 如果事件 A 与事件 B 至少有一个发生，则称这样一个事件为事件 A 与事件 B 的并

或和，记为 $A \cup B$.

集合 $A \cup B$ 是由属于 A 与 B 的所有样本点构成.

事件的并可推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots.$$

（6）对立事件

定义　如果事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生，则称事件 A 与事件 B 为**对立事件或互逆事件**，记为 $\overline{A} = B$ 或 $\overline{B} = A$.

如果 A 与 B 为对立事件，则 A,B 不能同时发生，且必有一个发生，即 A,B 满足 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \varnothing$.

在样本空间中，集合 $\overline{A}$ 是由所有不属于事件 A 的样本点构成的集合.

（7）完备事件组

定义　如果有限个事件 $A_1, A_2 \cdots, A_n$ 满 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n$，且 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的一个**完备事件组或完全事件组**.

可以推广完备事件组到可数无穷多个事件的情形：

$$A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n,\cdots，且 \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \Omega.$$

（8）事件的差

定义　事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A - B$.

在样本空间中集合 $A - B$ 是由属于事件 A 而不属于事件 B 的所有样本点构成的集合. 显然 $A - B = A\overline{B}$.

（9）文氏图

直观上常用几何图形表示集合. 事件间的关系与运算也可以用几何图形直观表示. 这类图形称文氏图，如图 **1-1**.

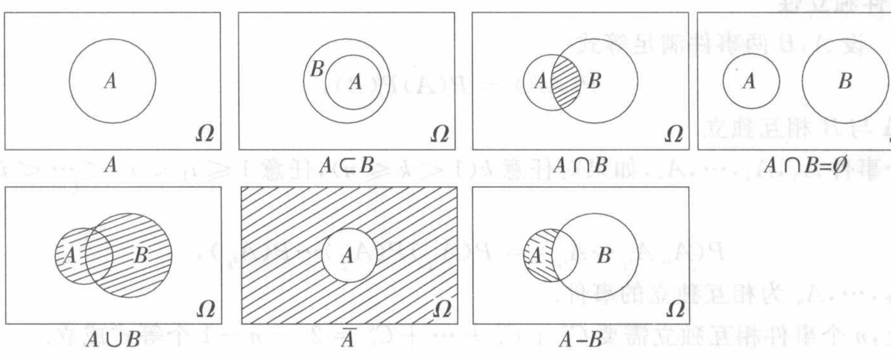

图 1-1

（10）事件的运算规律

交换律　$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$

结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

分配律　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

对偶律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，

$\overline{A-B}=\overline{A\overline{B}}=\overline{A}\cup B$.

3. 概率、条件概率、事件独立性和五大公式

(1) 概率公理

设试验 E 的样本空间为 Ω，称实值函数 P 为概率，如果 P 满足如下三条件：

1° 对于任意事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

2° 对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$；

3° 对于两两互斥的可数无穷个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 有 $P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$，称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

(2) 概率性质

1° $P(\varnothing)=0$；

2° 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

3° $P(\overline{A})=1-P(A)$；

4° $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$；

5° $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(3) 条件概率

定义 设 A,B 为两事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

对固定的事件 A，条件概率也有概率相应的各性质.

(4) 事件独立性

定义 设 A,B 两事件满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称 A 与 B 相互独立.

对 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果对任意 $k(1<k\leqslant n)$，任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$ 满足等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立的事件.

事实上，n 个事件相互独立需要 $C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-n-1$ 个等式成立.

(5) 相互独立的性质

1° A 与 B 相互独立的充要条件是 A 与 $\overline{B}$ 或 $\overline{A}$ 与 B 或 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

将相互独立的 n 个事件中任何几个事件换成它们相应的对立事件，则新组成的 n 个事件也相互独立.

2° 当 $0<P(A)<1$ 时，A 与 B 独立等价于 $P(B\mid A)=P(B)$ 或 $P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$ 成立.

3° 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立,则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 必两两独立.反之,若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两独立,则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 不一定相互独立.

4° 当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立时,它们的部分事件也是相互独立的.

(6) 五大公式

1° **加法公式**　$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$.

2° **减法公式**　$P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

3° **乘法公式**　当 $P(A) > 0$ 时,$P(AB) = P(A)P(B \mid A)$;

当 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$ 时,

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) \cdots P(A_n \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-1}).$$

4° **全概率公式**

设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 Ω 的概率均不为零的一个完备事件组,则对任意事件 A,有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A \mid B_i).$$

5° **贝叶斯公式**

设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 Ω 的概率均不为零的一个完备事件组,则对任意事件 A,且 $P(A) > 0$ 有

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_j) P(A \mid B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A \mid B_i)}, j = 1, 2, \cdots, n.$$

4. 古典型和几何型概率、伯努利试验

(1) 古典型概率

定义　当试验结果为有限 n 个样本点,且每个样本点的发生具有相等的可能性,称这种有限等可能试验为古典概型.此时如果事件 A 由 n_A 个样本点组成,则事件 A 的概率

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{A\text{ 中所包含的样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}},$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的古典型概率.

(2) 几何型概率

定义　当试验的样本空间是某区域(该区域可以是一维,二维或三维等等),以 $L(\Omega)$ 表示样本空间 Ω 的几何度量(长度、面积、体积等等).$L(\Omega)$ 为有限,且试验结果出现在 Ω 中任何区域的可能性只与该区域几何度量成正比.称这种拓广至几何度量上有限等可能试验为几何概型.此时如果事件 A 的样本点表示的区域为 Ω_A,则事件 A 的概率

$$P(A) = \frac{L(\Omega_A)}{L(\Omega)} = \frac{\Omega_A\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}}.$$

称这种 $P(A)$ 为事件 A 的几何型概率.

本章小结

本章的知识结构可表示为

随机试验 → 样本点 ω / 样本空间 Ω → 随机事件 A、B、C → 事件的概率 $P(A)$ → 古典型概率 / 几何型概率 / 独立重复试验

随机事件：事件的关系　事件的运算　运算规律

事件的概率：概率定义　概率性质　五大公式　条件概率

本章的基本概念和知识点较多，但重点应关注以下四个方面：

(1) 对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\overline{A-B}=\overline{A}\cup B$；

(2) $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(3) 五大公式；

(4) 简单的古典型概率，独立重复试验.

学习笔记

四、典型例题分析选讲

【例 1.1】 设随机事件 A 和 B 满足条件 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，则

(A) $AB=\varnothing$，$A\cup B=\Omega$.

(B) $AB=\varnothing$，$A\cup B\neq\Omega$.

(C) $AB\neq\varnothing$，$A\cup B=\Omega$.

(D) $AB\neq\varnothing$，$A\cup B\neq\Omega$.

【分析】 解法一：$AB=\overline{A}\,\overline{B}$，所以 $AAB=A\overline{A}\,\overline{B}$ 即 $AB=\varnothing$. 而 $\overline{A}\,\overline{B}=AB$，故 $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$，也就有 $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=\overline{\varnothing}$ 即 $A\cup B=\Omega$.

答案应选(A).

解法二：$AB=\overline{A}\,\overline{B}$，所以 $AB\cup A\overline{B}=\overline{A}\,\overline{B}\cup A\overline{B}$，即 $A(B\cup\overline{B})=(\overline{A}\cup A)\overline{B}$，得 $A=\overline{B}$，也就是说 A、B 为对立事件.

$AB=\varnothing$，$A\cup B=\Omega$.

答案应选(A).

【例 1.2】 A,B,C 为任意三随机事件，则事件 $(A-B)\cup(B-C)$ 等于事件

(A) $A-C$.　　　　(B) $A\cup(B-C)$.

(C) $(A\cup B)-C$.　　　　(D) $(A\cup B)-BC$.

【分析】 因 $A-B=A\overline{B}$，故

$$(A-B)\cup(B-C)=A\overline{B}\cup B\overline{C}.$$

而

$$\begin{aligned}(A\cup B)-BC&=(A\cup B)\,\overline{BC}\\&=(A\cup B)(\overline{B}\cup\overline{C})\\&=A\overline{B}\cup A\overline{C}\cup B\overline{B}\cup B\overline{C}\\&=A\overline{B}\cup A\overline{C}\cup B\overline{C}\\&=A\overline{B}\cup(A\overline{B}\cup AB)\overline{C}\cup B\overline{C}\\&=(A\overline{B}\cup A\overline{B}\overline{C})\cup(AB\overline{C}\cup B\overline{C})\\&=A\overline{B}\cup B\overline{C}.\end{aligned}$$

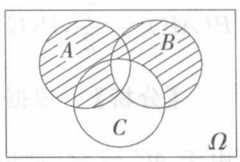

图 1–2

所以答案应选(D).

【评注】 本题是选择题，不要求写出详细推导过程. 可以用文氏图直接判断：

不难看出 $(A-B)\cup(B-C)$ 就是图中阴影部分，且等于 $(A\cup B)-BC$，直接得到选(D).

【例 1.3】 (1991) 随机事件 A,B 满足 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$ 和 $P(A\cup B)=1$，则必有

学习笔记

(A)$A \cup B = \Omega$. (B)$AB = \varnothing$.

(C)$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$. (D)$P(A-B) = 0$.

【分析】 根据概率的加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

将题给条件代入得

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - P(AB),$$

即

$$P(AB) = 0.$$

由选项(C)

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1.$$

答案应选(C).

【评注】 本题是1991年的考题，当年有部分考生错误地认为：

由 $P(A \cup B) = 1$ 就可以推出 $A \cup B = \Omega$；

或者从 $P(AB) = 0$ 就可以推出 $AB = \varnothing$.

事实上，仅给出概率是得不出事件的结论，而本题题干中给出的全是概率，所以作为事件结论的选项(A)，(B)根本不用被考虑.

【例 1.4】 (2012) 设 A、B、C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB) = \frac{1}{2}$，$P(C) = \frac{1}{3}$，则 $P(AB \mid \overline{C}) =$ ______.

【分析】 根据条件概率的定义 $P(AB \mid \overline{C}) = \dfrac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}$

由于 $AC = \varnothing$，所以 $A \subset \overline{C}$，也就有 $AB \subset \overline{C}$，$AB\overline{C} = AB$.

所以 $P(AB \mid \overline{C}) = \dfrac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{P(AB)}{1-P(C)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{4}$.

答案应填 $\frac{3}{4}$.

【例 1.5】 (2013) 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B) = 0.5$，$P(A-B) = 0.3$，则 $P(B-A) =$

(A)0.1. (B)0.2. (C)0.3. (D)0.4.

【分析】 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 均相互独立.

$$P(A-B) = P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}).$$

根据题设条件就有

$$0.3 = P(A-B) = P(A)P(\overline{B}) = P(A) \times 0.5$$

所以 $P(A) = 0.6$.

学习笔记

$P(B-A)=P(B\overline{A})=P(B)P(\overline{A})=0.5\times 0.4=0.2.$

答案应选 B.

【例 1.6】 已知随机事件 A,B,C 中,满足 $P(AB)=1$. 则事件 $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$

(A) 相互独立. (B) 两两独立,但不一定相互独立.

(C) 不一定两两独立. (D) 一定不两两独立.

【分析】 讨论事件 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 的独立性,可等价的考虑 A,B,C 的独立性.

因为 $P(AB)=1$. 可知 $P(A)=P(B)=1$,

而概率等于 1 的事件与所有的事件相互独立.

所以成立: $P(AB)=P(A)P(B)$

$P(AC)=P(A)P(C)$

$P(BC)=P(B)P(C)$

又因 $P(AB)=1$. 所以事件 AB 与 C 也相互独立,

$$P(ABC)=P(AB)P(C)=P(A)P(B)P(C).$$

总之 A,B,C 相互独立.

答案应选 A.

【例 1.7】 有两个盒子,第一盒中装有 2 个红球,1 个白球,第二盒中装一半红球,一半白球. 现从两盒中各任取一球放在一起,再从中取一球,问:

(Ⅰ) 这个球是红球的概率;

(Ⅱ) 若发现这个球是红球,问第一盒中取出的球是红球的概率.

【解】 (Ⅰ) 设事件 A_i 为从第 i 个盒中取出一个红球,$i=1,2$,事件 B 为最后取红球.

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3},P(B\mid A_1A_2)=1,$$

同理 $P(A_1\overline{A}_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3},P(B\mid A_1\overline{A}_2)=\frac{1}{2}$,

$$P(\overline{A}_1A_2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6},P(B\mid \overline{A}_1A_2)=\frac{1}{2},$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6},P(B\mid \overline{A}_1\overline{A}_2)=0.$$

由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(B\mid A_1A_2)P(A_1A_2)+P(B\mid A_1\overline{A}_2)P(A_1\overline{A}_2)\\&\quad+P(B\mid \overline{A}_1A_2)P(\overline{A}_1A_2)+P(B\mid \overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_1\overline{A}_2)\\&=\frac{7}{12}.\end{aligned}$$

学习笔记

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{II})P(A_1 \mid B) &= P(A_1A_2 + A_1\overline{A}_2 \mid B) \\
&= P(A_1A_2 \mid B) + P(A_1\overline{A}_2 \mid B) \\
&= \frac{P(B \mid A_1A_2)P(A_1A_2) + P(B \mid A_1\overline{A}_2)P(A_1\overline{A}_2)}{P(B)} \\
&= \frac{6}{7}.
\end{aligned}
$$

【评注】 全概率公式和贝叶斯公式的应用首先要对问题中所涉及的事件作假设，如 A_i，B 等；其次要确定 Ω 的完备事件组，本题中为 A_1A_2，$A_1\overline{A}_2$，$\overline{A}_1A_2$，$\overline{A}_1\overline{A}_2$；余下就是根据题设条件，计算相应概率，代入公式求出结果.

本题中采用的完备事件组也可以为：

设事件 A_i 为从两盒中各取一球放在一起后含有 i 个红球，$i=0$，1，2. 这时，全概率公式为：$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B \mid A_i)$. 由此计算（Ⅰ）的结果也是 $\frac{7}{12}$. 这里完备事件组只有三个 A_0，A_1，A_2. 看似简单. 但在求（Ⅱ）时就不好计算了.

【例 1.8】 假设有两箱同种零件：第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装 30 件，其中 18 件一等品. 现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中先后随机取出两个零件（取出的零件均不放回）. 试求：

（Ⅰ）先取出的零件是一等品的概率 p；

（Ⅱ）在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的条件概率 q.

【解】 设事件 B_i 为第 i 次取出的零件是一等品（$i=1,2$），事件 A 为被挑出的是第一箱. A 与 $\overline{A}$ 构成一个 Ω 的完备事件组，且 $P(A)=P(\overline{A})=\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）应用全概率公式，知

$$
\begin{aligned}
p = P(B_1) &= P(B_1 \mid A)P(A) + P(B_1 \mid \overline{A})P(\overline{A}) \\
&= \frac{10}{50}\cdot\frac{1}{2} + \frac{18}{30}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{5}.
\end{aligned}
$$

（Ⅱ）设事件 C 为先取的零件是一等品的条件下，再取出的零件仍是一等品，则

$$q = P(C) = P(C \mid A)P(A) + P(C \mid \overline{A})P(\overline{A}).$$

$P(C \mid A)$ 是在挑出为第一箱前提下，从这箱挑出第一个零件为一等品的条件下. 这时箱内还剩包含 9 件一等品的 49 件产品，因此再挑一零件仍为一等品的概率为 $\frac{9}{49}$.

学习笔记

同理 $P(C\mid\overline{A})=\frac{17}{29}$，所以

$$q=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\cdot\frac{17}{29}=0.3849.$$

【评注】 本题是1987年的考题，当年对(Ⅱ)有很多考生用了一种错误解法：

$$\begin{aligned}q&=P(B_2\mid B_1)=\frac{P(B_2B_1)}{P(B_1)}\\&=\frac{P(B_2B_1\mid A)P(A)+P(B_2B_1\mid\overline{A})P(\overline{A})}{P(B_1\mid A)P(A)+P(B_1\mid\overline{A})P(\overline{A})}\\&=\frac{\frac{10\cdot 9}{50\cdot 49}\cdot\frac{1}{2}+\frac{18\cdot 17}{30\cdot 29}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{10}{50}\cdot\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{0.1942}{0.4}\\&=0.4855.\end{aligned}$$

这种解法的错误在于应用公式 $q=P(B_2\mid B_1)=\frac{P(B_2B_1)}{P(B_1)}$ 时，其中的 B_1,B_2 必须是在同一箱(因先挑一箱，然后取出两个零件)，而且分母中 B_1 与分子中的 B_1 是同一 B_1.

但是当应用公式

$$\frac{P(B_2B_1)}{P(B_1)}=\frac{P(B_2B_1\mid A)P(A)+P(B_2B_1\mid\overline{A})P(\overline{A})}{P(B_1\mid A)P(A)+P(B_1\mid\overline{A})P(\overline{A})}$$

时. 分子式中把 B_1B_2 分成第一箱或者第二箱，且 B_1 与 B_2 在同一箱. 同时分母的 B_1 也分成两箱，这就没法保证公式中的分子的 B_1 与分母中的 B_1 在同一箱了.

也有考生使用公式：

$$q=P(B_2\mid B_1)=P(B_2\mid B_1A)P(A)+P(B_2\mid B_1\overline{A})P(\overline{A}).$$

显然根本不存在这种公式.

【例 1.9】 甲袋中有 2 个白球 3 个黑球，乙袋中一半白球一半黑球. 现从甲袋中任取 2 球与从乙袋中任取一球混合后，再从中任取一球为白球的概率为

(A) $\frac{11}{30}$.　(B) $\frac{6}{15}$.　(C) $\frac{13}{30}$.　(D) $\frac{7}{15}$.

【分析】 设事件 A 为最后取出的球为白球，事件 B 为球来自甲袋，显然，$\overline{B}$ 为球来自乙袋. 且 $B,\overline{B}$ 构成一个 Ω 的完备事件组，

由全概率公式 $P(A)=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid\overline{B})P(\overline{B})$

$P(B)=\frac{2}{3}$，因为最后三个球中二个球是从甲袋中来. 所以取出的