高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

Spark® 星火书业

概率论与数理统计辅导及习题精解

（与浙江大学第三版教材配套）

主编 张天德 教授

联系考研，渗透精讲历年考研真题

- 知识图表 清晰梳理考点重点难点
- 典型例题 深入讲解思路方法技巧
- 习题答案 权威提供详尽准确解析
- 同步自测 快速升华应用应试能力

赠《重要公式及性质》手册

第3版 最新修订

中国社会出版社

前 言

《概率论与数理统计》是专门研究随机现象及其数量规律的一个数学分支，在生物、医学、金融以及其他高新技术领域存在着广泛的应用。这门课程是高等院校理工科专业和部分文科专业一门重要的基础课程，也是历年硕士研究生入学考试的重点科目。

浙江大学编写的《概率论与数理统计》是一套深受广大教师和学生欢迎的、被全国很多高校普遍采用的优秀教材。经过修订后的第三版，更是结构严谨、逻辑清晰、层次分明、行文流畅，在讲授基础知识的同时又注意提炼和渗透数学思想方法，质量、体例均臻于炉火纯青。

为了帮助广大高校在校生和正在准备考研的学子学好、复习好《概率论与数理统计》这门课程，我们本着“选好教材、做好辅导”的宗旨，以上述的浙江大学盛骤、谢式千、潘承毅编写的《概率论与数理统计》(第三版)为针对教材，编写了这本与之章节、内容完全同步的《概率论与数理统计辅导及习题精解》配套辅导用书，为您系统梳理知识结构、清晰提炼重点考点、深入讲解思路技巧方法、权威提供课后习题答案，让您学深、吃透教材知识，打好基础。同时，又注意紧密联系考研、精讲历年真题，设计同步自测、提供高效练习，让您在学好教材的同时积极准备考研。

全书章节内容设置与教材完全同步，共分十二章，每一章又分为若干节，循着教材顺序对每一章每一节内容清晰梳理、深入讲解，每一章内容讲完后，再对整章内容 …该章教材上的习题答案详解，设计该章同 …导完毕后，书的最后附上 2007 考研真题供

每一章中每节内容讲解 这部分由两块组成：该节知识结构图表，该节重点考点提炼，该节题型例题方法。

一、内容解析 包括两部分：知识结构图表、重点考点提炼

1. 知识结构图表 这一部分用直观、形象的图表形式，将该节知识结构、相互联系、逻辑关系清晰地展示给读者，也便于读者对比各个概念、性

质和定理，在比较中加深理解，使知识更加系统化。

2. 重点考点提炼　这一部分将该节一些重要的知识点、考点清晰、准确地提炼出来，并用简洁的语言对这些重点、考点需要注意的问题一一点明，让读者一下子抓住重点、针对复习。

二、题型例题方法　这一部分是每一节讲解中的核心内容，也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和研究生入学考试试题研究经验，将该节教材内容中学生需要掌握的、考研中经常考到的重点、难点、考点，归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出大量的精选例题、考研真题，举一反三、深入讲解，务必使您对每一个考查点扎实掌握、悟透吃透，并能熟练运用在具体解题中，可谓基础知识梳理、重点考点深讲、真题考题透析三重互动、一举突破，从而使读者的实际应用应试能力全面提升。

每一例题讲解中穿插出现的"思路探索"、"方法点击"，更是巧妙点拨处处呵护，让您举一反三、触类旁通，在读者更高的层次上去领会和掌握数学思想。

每一章后教材习题答案　这一部分对该章教材上的全部习题给出详细、准确的答案解析，解析中同时给出思路点拨、方法点击，让您做好习题的同时，回顾、巩固、深化前面的内容讲解。

每一章后同步自测练习　这一部分是作者基于自己多年的教学经验并结合历年考研数学试题特点科学设计的，目的是在读者对各章内容有了全面了解之后，给读者提供进一步检测、巩固的机会，以使读者进一步消化知识、夯实考点、提高能力。本部分设有自测练习答案详解。同时提醒，许多读者觉得学习时一看就懂，一做就错，实质上还是基础知识不扎实，练习少的表现。

2007 年考研数学试题解析　书的最后，附上 2007 年考研数学试题及解析，让那些将来准备或正在准备考研的读者能够对最新考研真题内容及命题趋势有一个具体的了解，同时检测自我能力水平，找出差距、调整复习。

全书内容编写系统、新颖、清晰、独到，充分体现了如下三大特色：

一、知识梳理清晰、简洁　直观、形象的图表总结，精炼、准确的考点提炼，权威、独到的题型归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的教材知识结构，以便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，从而为后面提高解题能力和数学思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、互动　所有重点、难点、考点，统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出丰富的精选例题、考研真题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力高效结合、浑然一体，一举完成。

三、联系考研密切、实用　本书是一本教材同步辅导，也是一本考研复习用书，书中处处联系考研：例题中有考研试题，同步自测中也有考研试题，最后还附上 2007 年考研数学试题及解析，更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等，为的就是让同学们同步完成考研备考，达到考研要求的能力。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分，在此向这些书籍的作者表示感谢。同时，由于我们水平所限，不足之处，在所难免，诚恳希望读者提出宝贵意见，以便再版时改进、修正。

编者

目 录

第一章 概率论的基本概念

本章介绍了随机试验、随机事件的概念，事件间的关系及其运算，主要介绍了古典概率、条件概率的定义，概率的加法公式、乘法公式，全概率公式和贝叶斯公式，同时对独立性和伯努利概型也做了重点论述.

第一节 随机试验 样本空间 随机事件

一、内容简析

【知识结构】

- 随机试验 — 样本空间
  - 随机事件
  - 随机事件间的关系
    - 包含 $A\subset B$，相等 $A=B$
    - 对立事件 $\overline{A}$，互斥 $AB=\varnothing$
  - 随机事件间的运算
    - 和事件 $A\cup B$
    - 差事件 $A-B$
    - 积事件 AB

【重要知识点和考点分析】

1. 正确理解随机事件的相关概念

(1) 随机试验：在概率论中将具备下列三个条件的试验称为随机试验，简称试验：

1°. 在相同条件下可重复进行；

2°. 每次试验的结果具有多种可能性；

3°. 在每次试验之前不能准确预言该次试验将出现何种结果，但是所有结果明确可知.

(2) 样本空间：随机试验的所有可能结果构成的集合，常用 Ω 表示.

(3) 随机事件：大量随机试验中具有某种规律性的事件.

(4) 基本事件：不能分解为其他事件组合的最简单的随机事件.

(5) 必然事件：每次试验中一定发生的事件，常用 Ω 表示.

(6) 不可能事件：每次试验中一定不发生的事件，常用 $\varnothing$ 表示.

2. 准确理解互斥事件与对立事件的区别与联系

(1) 互斥事件：在试验中，若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称 A、B 为互斥事件. 显然，基本事件间是互斥的.

(2) 对立事件：每次试验中，“事件 A 不发生”的事件称为事件 A 的对立事件. A 的对立事件常记为 $\overline{A}$.

容易看出:对立事件一定是互斥事件,但互斥事件不一定是对立事件.

3. 事件的运算律:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$.

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律 $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$,$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$.

(4) 摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

(5) 对减法运算满足 $A-B=A\overline{B}$.

上述五条运算规律非常重要,特别是(4),(5)两条,希望读者熟练掌握.对于较复杂的事件运算,可采用文氏图帮助分析和理解.

二、题型、例题、方法

基本题型:考查事件的关系与运算

【思路探索】 充分利用事件的定义、事件的关系和运算律.

例1 在电炉上安装了4个温控器,其显示温度的误差是随机的.在使用过程中,只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0,电炉就断电.以 E 表示事件"电炉断电",而 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为4个温控器显示的按递增顺序排列的温度值,则事件 E 等于( ).(2000年,研,数学三、四)

(A) $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$ (B) $\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$ (C) $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$ (D) $\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$

解:$\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$表示四个温控器显示温度均不低于 t_0

$\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$表示至少三个温控器显示温度均不低于 t_0

$\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$表示至少二个温控器显示温度均不低于 t_0

$\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$表示至少一个温控器显示温度均不低于 t_0

故应选(C).

例2 设 A 和 B 是任意两个随机事件,则与 $A\cup B=B$ 不等价的是( )(2001年,研,数学四)

(A) $A\subset B$ (B) $\overline{B}\subset\overline{A}$ (C) $A\overline{B}=\varnothing$ (D) $\overline{A}B=\varnothing$

解:根据题干的信息,$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}\Leftrightarrow A\overline{B}=\varnothing$.所以选项(D)不正确.

例3 设任意两个随机事件 A 和 B 满足条件 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$,则( ).

(A) $A\cup B=\varnothing$ (B) $A\cup B=\Omega$ (C) $A\cup B=A$ (D) $A\cup B=B$

解:方法一:排除法

注意到 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$,那么 A,B 的地位是"对等"的,从而(C),(D)均不成立.(A)不正确是显然的.故(B)正确.

方法二:直接法

运用摩根律,$AB=\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$,那么

$A\cup B=(A\cup B)\cup AB=(A\cup B)\cup\overline{A\cup B}=\Omega$.

故应选(B).

例4 用 A 表示事件"甲种产品畅销,乙种产品滞销",则其对立事件 $\overline{A}$ 为( )

(A)“甲种产品滞销,乙种产品畅销”　　(B)“甲、乙两种产品均畅销”

(C)“甲种产品滞销”　　(D)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”

解:本题考查摩根律

令 B 和 C 分别表示事件“甲种产品畅销”、“乙种产品滞销”,则 $A=BC$,$\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}$,即事件 $\overline{A}$ 表示“甲种产品滞销或乙种产品畅销”,故应选(D).

例 5　对于任意两个随机事件 A 与 B,其对立的充要条件为(　　)

(A) A 与 B 至少必有一个发生

(B) A 与 B 不同时发生

(C) A 与 B 至少必有一个发生,且 A 与 B 至少必有一个不发生

(D) A 与 B 至少必有一个不发生

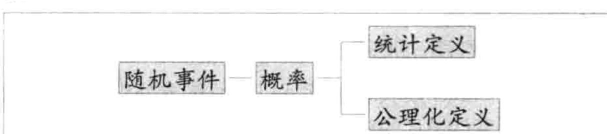
解:A 与 B 对立$\Leftrightarrow A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing\Leftrightarrow\overline{A}\cup\overline{B}=\Omega$ 且 $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$. 由此不难判定(C)正确.

【方法点击】　选择题主要考查基本概念、性质、定理,一般来说难度并不太大. 选择题大致可分为两类:概念性、理论性选择题和计算性选择题,对于前者,主要运用基本概念、定理、公理、公式、法则及逻辑关系等基本工具对问题进行分析和逻辑推理从而确定正确答案. 对于计算性选择题,需要经过计算才能选出正确选项. 而有些问题的处理,则需要采用概念和计算相结合的方法.

第二节　频率与概率

一、内容简析

【知识结构】



【重要知识点和考点分析】

1. 概率的统计定义:在相同的条件下,重复进行 n 次试验,事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动. 且一般说来,n 越大,摆动幅度越小,则称常数 p 为事件 A 的概率,记作 $P(A)$.

概率的统计定义仅仅指出了事件的概率是客观存在的,但这个定义不能用来计算 $P(A)$. 事实上,人们往往采用一次大量试验的频率或一系列频率的均值作为 $P(A)$ 的近似值.

2. 概率的公理化定义:设 Ω 是一样本空间,称满足下列三条公理的集函数 $P(\cdot)$ 为定义在 Ω 上的概率:

(1) 非负性　对任意事件 A,$P(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性　$P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性　若两两互不相容的事件列$\{A_n\}$是可列的，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

2. 概率的性质

(1)$P(\varnothing)=0$

(2) 有限可加性　若n个事件$A_1,\cdots,A_n$两两互不相容，则

$$P(A_1+\cdots+A_n)=P(A_1)+\cdots+P(A_n).$$

(3) 两对立事件概率之和为1，即

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

大家应该注意上式的一个变形$P(A)=1-P(\overline{A})$，这是一个非常重要的表达形式，在今后的解题中经常被用到.

(4) 若$A\subset B$，则有　$P(B-A)=P(B)-P(A)$.

(5) 若A,B是任意两个事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

此式又被称为广义加法法则.

上式还能推广到多个事件的情况. 例如，设A_1,A_2,A_3为任意三个事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

一般，对于任意n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$，可以用归纳法证得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

二、题型、例题、方法

基本题型：与概率基本性质、加法公式有关的问题

例1　设随机事件A,B及其和事件$A\cup B$的概率分别是0.4，0.3，0.6. 若$\overline{B}$表示B的对立事件，那么积事件$A\overline{B}$的概率$P(A\overline{B})=$ 0.3

解：因为$A\overline{B}=A(\Omega-B)=A-AB$，

所以$P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$
$=P(A\cup B)-P(B)=0.6-0.3=0.3$

【方法点击】　充分运用加法公式的各种变形. 特别注意以下方法在解决此类问题中的应用.

设A,B是任意两个随机事件，$A-B=A-AB=A(\Omega-B)=A\overline{B}$. 事实上，这是一个很容易理解的变形，不妨按下列方式理解：$A-B$表示事件"A发生B不发生"，$A-AB$表示事件"在A发生的事件中除掉AB一起发生的事件"，$A\overline{B}$表示事件"A发生B不发生"，很明显这三个事件是一样的.

例2　设A,B为随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则$P(\overline{AB})=$ ______

解：先求$\overline{AB}$的对立事件AB发生的概率$P(AB)$.

由题意，

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.3$$

则

$$P(AB)=P(A)-0.3=0.7-0.3=0.4$$

那么

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$$

例 3 已知$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6}$，则事件$A,B,C$全不发生的概率为________.

【思路探索】 应用摩根律、加法法则，对立事件的概念.

解：因为$P(AB)=0$，所以$P(ABC)=0$.

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]\\&=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+0\right)=\frac{7}{12}.\end{aligned}$$

例 4 设当事件A与B同时发生时，事件C必发生，则（ ）.

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$ (B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C) $P(C)=P(AB)$ (D) $P(C)=P(A\cup B)$

解：由题意"当A,B发生时，C必然发生"，从而$AB\subseteq C$，所以$P(AB)\leqslant P(C)$，那么

$$\begin{aligned}P(C)&\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)\\&\geqslant P(A)+P(B)-1\end{aligned}$$

$P(A\cup B)\leqslant 1$

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

故应选(B).

【方法点击】 此题考查概率的"单调性"，即若$A\subseteq B$是两个随机事件，则

$$0\leqslant P(A)\leqslant P(B)\leqslant 1$$

事实上，因为$A\subset B$，所以$B-A$与A互不相容，并且满足$B=(B-A)+A$，由概率的非负性和加法公式得

$$P(B)=P(B-A)+P(A)$$

从而$0\leqslant P(A)\leqslant P(B)$.

例 5 设时于事件A,B,C，有$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，则$A,B,C$三个事件中至少出现一个的概率为________

解：因为$ABC\subset AB$，所以$P(ABC)=0$，从而

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

例 6 设A,B是任意两个随机事件，则

$P\{(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})\}=$________

解:注意到

$$(A+B)(\bar{A}+\bar{B})=A(\bar{A}+\bar{B})+B(\bar{A}+\bar{B})=A\bar{B}+\bar{A}B$$

$$(\bar{A}+B)(A+\bar{B})=\bar{A}(A+\bar{B})+B(A+\bar{B})=\bar{A}\,\bar{B}+AB$$

那么

$$(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})=(A\bar{B}+\bar{A}B)(\bar{A}\,\bar{B}+AB)=\varnothing$$

则

$$P\{(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})\}=P(\varnothing)=0.$$

【方法点击】 在有关事件运算或者是化简的问题中,要学会熟练应用事件的运算法则.尤其是关系式 $A=AB+A\bar{B}$, $\bar{A}=\bar{A}B+\bar{A}\,\bar{B}$.

例 7 已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\bar{A}\,\bar{B})$,且 $P(A)=p$,则 $P(B)=$________.

解:因为 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\,\bar{B}$, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

又 $P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\bar{A}\,\bar{B})$

所以 $P(A)+P(B)=1$

即 $P(B)=1-p$

故应填 $1-p$.

例 8 某奶厂生产 A,B,C 三种奶,经过调查,一城市居民中订购 A 奶的占 45%,订购 B 奶的占 35%,订购 C 奶的占 30%,同时订购 A、B 两种奶的占 10%,同时订购 A、C 两种奶的占 8%,同时订购 B、C 两种奶的占 5%,同时订购 A,B,C 三种的占 3%.试计算下列各事件的概率:

(1) 仅订购 A 奶的; (2) 仅订购 A,B 奶的;

(3) 仅订购一种奶的; (4) 恰好订购两种奶的;

(5) 至少订购一种奶的; (6) 不订购任何奶的;

(7) 最多订购一种奶的.

解:由题意知 $P(A)=0.45$, $P(B)=0.35$, $P(C)=0.30$, $P(AB)=0.10$,

$P(AC)=0.08$, $P(BC)=0.05$, $P(ABC)=0.03$.

(1) $P(A\bar{B}\bar{C})=P(A\,\overline{B\cup C})=P(A-A(B+C))$

$=P(A)-P(A(B+C))=P(A)-P(AB+AC)$

$=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$

$=0.45-0.10-0.08+0.03=0.30.$

(2) $P(AB\bar{C})=\cancel{P(AB-C)}=P(AB-ABC)=P(AB)-P(ABC)$

$=0.10-0.03=0.07.$

(3) $P(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\,\bar{B}C)$

$=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\,\bar{B}C)$

$=0.30+P(B-B(A+C))+P(C-C(A+B))$

$=0.30+P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)+P(C)-P(AC)$

$-P(BC)+P(ABC)$

$=0.30+0.35-0.10-0.05+0.03+0.30-0.08-0.05+0.03$
$=0.73.$

(4) $P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)$
$=P(AB)+P(AC)+P(BC)-3P(ABC)$
$=0.10+0.08+0.05-3\times0.03=0.14.$

(5) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$
$=0.45+0.35+0.30-0.10-0.08-0.05+0.03$
$=0.90.$

(6) 注意(5),不难想到运用对立事件的概念,从而
$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.90=0.10.$

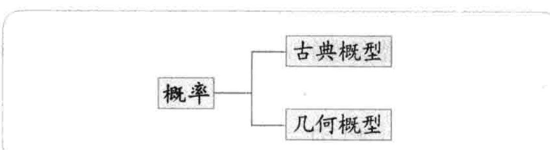
(7) $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C)$
$=P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})+P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)$
$=0.10+0.73=0.83.$

【方法点击】 注意到事件间的互不相容性,并充分应用加法公式.

第三节 古典概型

一、内容简析

【知识结构】



【重要知识点和考点分析】

1. 古典概型试验:具有下列两个特点的试验称为古典概型试验.

(1) 每次试验只有有限种可能的试验结果;

(2) 每次试验中,各基本事件出现的可能性完全相同.

对于古典概型试验,事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件数}}=\frac{m}{n}.$$

2. 几何概型

如果随机试验的样本空间是一个区域(例如直线上的区间、平面或空间中的区域),而且样本空间中每个试验结果的出现具有等可能性,那么规定事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测度(长度、面积、体积)}}{\text{样本空间的测度(长度、面积、体积)}}$$

3. 计算古典型概率是本节的重点内容,也是考研的基本内容之一.计算古典型概率 $P(A)$ 的关键是找出 A 中的基本事件数,在计算过程中常常用到排列组合的知识,

有时也需要用列举法逐一分析 A 中的基本事件.

二、题型、例题、方法

基本题型Ⅰ:整除、非整除问题

例1 从0,1,2,…,9十个号码中随机取出四个号码,排成一个四位数,求这个四位数能被5整除的概率. 0 或 5

解法一:因为要构成四位数,故首位不是零,而能被5整除,则末位是0或5.

$$P(A)=\frac{P_9^3+(P_9^3-P_8^2)}{P_{10}^4-P_9^3}=\frac{17}{81}.$$

解法二:利用乘法原理

$$P(A)=\frac{9\cdot 8\cdot 7+8\cdot 8\cdot 7}{9\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\frac{17}{81}$$

基本题型Ⅱ:分房问题

例2 有 n 个人,每人都有同等的机会被分配到 $N(n\leqslant N)$ 间房中的任一间去,试求下列各事件的概率.

(1)A="某指定的 n 间房中各有一人";

(2)B="恰有 n 间房各有一人";

(3)C="某指定的一间房中恰有 $m(m\leqslant n)$ 人".

解:(1)基本事件总数为 N^n. 将 n 个人分到某指定的 n 间房中,相当于 n 个元素的全排列,所以事件 A 包含的基本事件数为 $n!$,故

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

(2)n 间房中各有1人是指任意的 n 间房中各有1人,这共有 C_N^n 种情况,所以事件 B 包含的基本事件数为 $C_N^n n!$,故

$$P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}$$

(3)从 n 个人中选 m 个分配到指定的一间房中,有 C_n^m 种选法;而其余的 $n-m$ 个人分到其余 $N-1$ 间房,有 $(N-1)^{n-m}$ 种方法,所以事件 C 包含的基本事件数为 $C_n^m(N-1)^{n-m}$,故

$$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-m}$$

这实际上是第二章将要介绍的二项分布的特殊情形.

基本题型Ⅲ:配对问题

例3 从 n 双不同的手套中任取 $2r(2r<n)$ 只,求下列事件发生的概率:

(1) 没有成双的手套; (2) 只有一双手套;

(3) 恰有两双手套; (4) 有 r 双手套.

解:试验的基本事件总数为 C_{2n}^{2r}.

(1) 有利事件中的基本事件数是,先从 n 双中取 $2r$ 双,再从每双中取出一只,

即$\underbrace{C_n^{2r}C_2^1\cdots C_2^1}_{2r}=C_n^{2r}(C_2^1)2r$. 则所求的概率为

$$p=\frac{C_n^{2r}(C_2^1)^{2r}}{C_{2n}^{2r}}.$$

此类问题的关键是如何确定有利事件中的基本事件数.

(2) 有利事件中的基本事件数量，先从 n 双中取 1 双，再从剩下的 $n-1$ 双中取 $2r-2$ 双，并从每双中取出一只，即 $C_n^1C_{n-1}^{2r-2}(C_2^1)^{2r-2}$，则所求概率为

$$p=\frac{C_n^1C_{n-1}^{2r-2}(C_2^1)^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}.$$

(3) 有利事件中的基本事件数为，先从 n 双中任取 2 双，再从剩余的 $n-2$ 双中取 $2r-4$ 双，并从每双中取出一只，即 $C_n^2C_{n-2}^{2r-4}(C_2^1)^{2r-4}$ 则所求概率为

$$p=\frac{C_n^2C_{n-2}^{2r-4}(C_2^1)^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}.$$

(4) 有利事件中的基本事件数为，先从 n 双中任取 r 双，再将每双中的两只全部取出，即 $C_n^r(C_2^2)^r$. 故所求概率为

$$p=\frac{C_n^r(C_2^2)^r}{C_{2n}^{2r}}.$$

基本题型Ⅳ：摸球问题

例 4　假设某袋中共有 9 个球，4 个白球，5 个黑球，现从中任取两个，试求下列事件发生的概率.

(1) 两个均为白球；

(2) 两个球中一个是白球，另一个是黑球；

(3) 至少有一个黑球.

解：(1) 方法一：设随机试验与选球的先后次序无关，易知基本事件总数为 C_9^2，且每事件等可能地发生，有利于取两个白球的事件 A 的基本事件数为 C_4^2，故

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{1}{6}$$

方法二：设随机试验与选球的先后次序有关，则基本事件总数为 P_9^2，且每事件等可能地发生，有利于取两个白球的事件 A 的基本事件数为 P_4^2，所以

$$P(A)=\frac{P_4^2}{P_9^2}=\frac{1}{6}$$

(2) 方法一：设随机试验与选球的先后次序无关，基本事件总数为 C_9^2，有利于取一白一黑事件 B 的基本事件个数为 $C_4^1C_5^1$，所以

$$P(B)=\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}=\frac{5}{9}$$

方法二：设随机试验与选球的先后次序有关，基本事件总数为 P_9^2，“两球中一白一黑”这一事件等价于{“先取到白球，后取到黑球”；“先取到黑球，后取到白球”}，则有利于取一白一黑事件 B 的基本事件个数为 $P_4^1P_5^1+P_5^1P_4^1=2P_4^1P_5^1$，所以

$$P(B)=\frac{2P_4^1P_5^1}{P_9^2}=\frac{5}{9}.$$

(3) 令事件 C 表示“至少有一个黑球”,由对立事件的定义知 $\overline{C}=A$,从而

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

例 5 设一个袋中装有 a 个黑球,b 个白球,现将球随机地一个个摸出,问第 k 次摸出黑球的概率是多少?($1\leqslant k\leqslant a+b$)

解:方法一:令 A 表示事件“第 k 次摸到黑球”.

将这 $a+b$ 个球编号,并将球依摸出的先后次序排队,易知基本事件总数为 $(a+b)!$. 事件 A 等价于在第 k 个位置上放一个黑球,在其余 $a+b-1$ 个位置上放余下的 $(a+b-1)$ 个球,则 A 包含的基本事件数为 $a(a+b-1)!$. 那么所求概率为

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

方法二:本题也可以只考虑前 k 个位置,则 $P(A)=\dfrac{C_a^1\cdot P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^{k}}=\dfrac{a}{a+b}$

基本题型Ⅴ:抽签问题

例 6 某普通话考试中有 7 份试卷,其中有 3 份较简单,有 7 位同学抽签决定自己的试卷(每份试卷对应一根签),甲同学先抽,乙同学随后抽. 请问甲、乙两同学分别抽到较简单试卷的概率是否相等? 并证明你的结论.

解:利用古典概型解决此问题.

分别用 A、B 表示事件“甲先抽到简单试卷”和“乙第二个抽到简单试卷”. 把 7 个签所有可能的排列作为基本事件总数 $7!$. 事件 A 等价于第一个位置排列简单试卷,其余六个位置随意排列试卷,所以有 $C_3^1 6!$,即

$$P(A)=\frac{C_3^1 6!}{7!}=\frac{3}{7}$$

事件 B 等价于第二个位置排列简单试卷,其余六个位置随意排列试卷,所以有 $C_3^1 6!$,即

$$P(B)=\frac{C_3^1 6!}{7!}=\frac{3}{7}.$$

注意比较例 5 和例 6.

从而 A、B 两事件发生的概率相等.

基本题型Ⅵ:其他形式问题

例 7 从 0,1,2,…,9 等十个数字中任意选出三个不同的数字,试求下列事件的概率:

$A_1=\{$三个数字中不含 0 和 5$\}$;$A_2=\{$三个数字中不含 0 或 5$\}$.

解:基本事件总数为 C_{10}^3,A_1 的基本事件数为 C_8^3,A_2 的基本事件数为 $2C_9^3-C_8^3$. 由古典型概率公式得

$$P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15},P(A_2)=\frac{2C_9^3-C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}.$$

例 8 将 C,C,E,E,L,I,N,S 等七个字母随机地排成一行,那么,恰好排成英文单词 $SCIENCE$ 的概率为______