



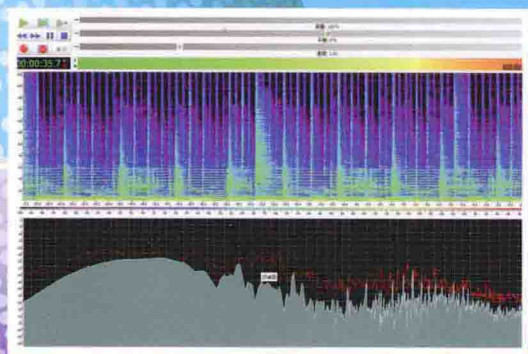
工业和信息化部“十二五”规划教材

◎ 电子信息科学与工程类专业 规划教材

离散随机信号处理基础

Fundamental of Discrete Stochastic Signal Processing

◎ 王惠刚 马 艳 编著



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>



工业和信息化部“十二五”规划教材
电子信息科学与工程类专业规划教材

离散随机信号处理基础

Fundamental of Discrete
Stochastic Signal Processing

◎ 王惠刚 马 艳 编著



电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

内 容 简 介

本书涵盖了随机信号处理的基本知识,主要阐述了离散随机过程的性质和基本分析方法。全书共分7章。第1章为所需基础知识介绍;第2章讨论离散随机过程的性质、相关概念和一些基础理论;第3章重点阐述随机信号建模,即如何求解各种常用随机模型的参数;第4章针对常用的自回归模型,深入讨论一种快速算法 Levinson-Durbin 递归,以及由此引出的格型滤波结构;第5章介绍非参数化功率谱估计、参数化功率谱估计和频率估计等常用方法;第6章针对 FIR 和 IIR 滤波器结构,给出了最小均方误差准则下的最佳滤波器;针对随时间慢变的随机过程和系统,第7章讨论了可实现的、近似最佳的自适应滤波器,分析了常用的几种最小均方算法和递归最小二乘算法。最后的附录补充了部分数学知识。

本书可作为电子信息工程、通信工程或相关专业的高年级本科生教材,以及信息与通信学科或其他相关学科的研究生教材,也可作为一些工程技术人员的参考书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

离散随机信号处理基础 / 王惠刚, 马艳编著. —北京: 电子工业出版社, 2014. 8

电子信息科学与工程类专业规划教材

ISBN 978-7-121-23900-7

I. ①离… II. ①王… ②马… III. ①离散信号-随机信号-信号处理-高等学校-教材 IV. ①TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 170180 号

策划编辑: 马 岚

责任编辑: 马 岚 特约编辑: 马爱文

印 刷: 三河市双峰印刷装订有限公司

装 订: 三河市双峰印刷装订有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 18 字数: 461 千字

版 次: 2014 年 8 月第 1 版

印 次: 2014 年 8 月第 1 次印刷

定 价: 45.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010)88258888。

前 言

随机现象在日常生活中经常遇到,如汽车噪声、接收机噪声、各种振动噪声等;在工程应用领域,测量某些物理量时,由于受环境和测量误差的影响,测量数据或多或少会引入一些测量噪声。另外,有些信号本身就是随机的,如语音信号本身、雷达杂波、潜艇的辐射噪声等,因此随机信号处理更显得尤为重要。许多读者遇到这些随机信号,不知道应该如何分析和处理数据,并从中提取有用的信息。目前大多数系统都是采用计算机或者微处理器进行数字运算的,因此本教材就集中在时间离散的随机信号处理方法上。

《离散随机信号处理基础》已经以讲义的形式在教学中试用了8年,并根据编者自身的教学实践和学生的反馈意见改编而成,也参考了由 Monson H. Hayes 所著的 *Statistical Digital Signal Processing and Modeling* 一书。本教材概念清楚,例题翔实,公式推导详细,非常适合有一定基础的读者自学,教师也可根据自身教学的需要灵活地选择授课内容。为了便于学生巩固所学知识,教材配备了大量的习题,难易结合,很多习题具有一定的拓展和提高,希望读者能积极主动地完成每章的习题。另外,为了便于学生自学和提高,对于一些成熟的算法,在理论推导和分析后,教材还给出了 MATLAB 编写的函数,读者可直接调用这些函数用于后续的计算机编程练习。

我们提供了书中所有由计算机绘制图形的 MATLAB 源程序,同时也提供了部分习题的解题指南,供有需要的教师参考使用。教师可登录华信教育资源网(www.hxedu.com.cn)注册下载相关资料。为了进一步拓展对教材的理解,我们自第3章起编写了每章的计算机练习指南,每个计算机练习既包含一些必要的理论推导和分析,又包含计算机编程验证。鉴于篇幅原因,计算机练习并没有列入本书。采用本书作为教材的教师,可联系作者(wanghg74@gmail.com),获取计算机练习的实验指导书和基于 MATLAB 的示例。

本教材共分7章和两个附录,参考学时为48学时。

第1章简要概述了本教材所用到的基础数学知识,主要包括基本的离散时间信号、离散时间系统及性质; z 变换及离散时间傅里叶变换;向量和矩阵的基本定义和性质、线性方程求解及矩阵的特征分解;等式约束最优化的相关理论等。

第2章介绍了随机变量和随机过程的定义和性质,随机过程统计量的定义和估计;谱分解定理;随机过程的滤波及基本的随机序列模型。如果先修过“随机信号分析”或者“随机过程”课程,可简要回顾或者跳过前两章。

第3章重点阐述了信号建模,包括确定性信号建模和随机信号建模。主要介绍了在已知观测数据和模型假定的条件下,如何估计不同模型的参数,并介绍了一些常用的算法。

第4章针对具有 Toeplitz 结构的线性方程组求解问题,介绍了一种阶递归的 Levinson-Durbin 递归快速算法,并由此引出了 FIR 滤波器的格型结构。

第5章针对离散随机过程囊括了目前较常用的功率谱估计方法,包括几种非参数化功率谱估计、最小方差法、参数化功率谱估计方法;针对特殊的谐波过程,研究了几种基于特征分解的频率估计方法。

第 6 章考虑在已知系统输入和期望信号时,如何设计最佳的维纳滤波器,使滤波器的输出在均方意义下逼近期望信号,分别针对 FIR 滤波器、非因果的 IIR 滤波器及因果的 IIR 滤波器展开讨论。

第 7 章考虑在时变输入或时变系统下,采用自适应方法来调整 FIR 滤波器参数,使滤波器输出逼近期望信号;分别介绍了两类算法:最小均方算法和递归最小二乘算法,并给出在线性预测和回声抵消中的应用。

附录 A 列举了一些常用的 MATLAB 命令、运算符号和函数;附录 B 给出了一些特殊矩阵的定义。

学好本课程,读者需要具备信号与系统、随机信号分析、数字信号处理和线性代数等相关知识。本教材由西北工业大学航海学院王惠刚担任主编,第 1 章、第 2 章和第 6 章由马艳编写,第 3 章至第 5 章及第 7 章由王惠刚编写。本教材适合电子工程、通信工程等专业的二年级本科生或者硕士研究生阅读学习,也可用来作为相关工程技术人员和科研工作者的参考书。

在本教材的撰写过程中,得到电子工业出版社马岚编辑的鼓励和大力支持,在此表示感谢。由于编者水平有限,难免有错误的地方,敬请读者批评指正。

编 者

目 录

| | |
|------------------------------|----|
| 第 1 章 离散时间信号和系统 | 1 |
| 1.1 引言..... | 1 |
| 1.2 离散时间信号处理..... | 1 |
| 1.2.1 离散时间信号 | 1 |
| 1.2.2 离散时间系统 | 2 |
| 1.2.3 线性移不变滤波器的时域描述 | 4 |
| 1.2.4 离散时间傅里叶变换 | 5 |
| 1.2.5 z 变换 | 6 |
| 1.2.6 滤波器的分类 | 8 |
| 1.2.7 滤波器流图 | 8 |
| 1.2.8 离散傅里叶变换和快速傅里叶变换..... | 9 |
| 1.3 线性代数 | 10 |
| 1.3.1 向量和矩阵..... | 10 |
| 1.3.2 线性独立、向量空间和基向量 | 12 |
| 1.3.3 矩阵 | 13 |
| 1.3.4 线性方程..... | 17 |
| 1.3.5 二次型和埃尔米特型 | 20 |
| 1.3.6 特征值和特征向量 | 21 |
| 1.4 最优化理论 | 25 |
| 1.4.1 无约束最优化理论 | 25 |
| 1.4.2 线性等式约束最优化理论..... | 26 |
| 1.5 小结 | 27 |
| 习题..... | 27 |
| 第 2 章 离散时间随机过程 | 30 |
| 2.1 引言 | 30 |
| 2.2 离散时间随机信号 | 30 |
| 2.2.1 离散时间随机信号定义及其概率描述 | 31 |
| 2.2.2 随机序列的数字特征 | 32 |
| 2.2.3 平稳随机序列 | 36 |
| 2.2.4 随机序列的各态历经性 | 38 |
| 2.2.5 功率密度谱..... | 40 |
| 2.2.6 自相关矩阵和自协方差矩阵..... | 43 |
| 2.2.7 特殊随机序列 | 45 |
| 2.2.8 随机信号的抽样定理 | 47 |

| | | |
|------------|----------------------------|-----------|
| 2.3 | 随机序列数字特征的估计 | 47 |
| 2.3.1 | 估计准则 | 47 |
| 2.3.2 | 均值的估计 | 48 |
| 2.3.3 | 方差的估计 | 50 |
| 2.3.4 | 随机序列自相关函数的估计 | 50 |
| 2.4 | 平稳随机序列通过线性系统 | 52 |
| 2.4.1 | 输出的均值、相关函数和平稳性分析 | 52 |
| 2.4.2 | 输出的功率谱密度 | 53 |
| 2.5 | 谱分解 | 55 |
| 2.6 | 时间序列信号模型 | 57 |
| 2.6.1 | 自回归滑动平均过程 | 57 |
| 2.6.2 | 自回归过程 | 59 |
| 2.6.3 | 滑动平均过程 | 62 |
| 2.6.4 | 谐波过程 | 63 |
| 2.7 | 小结 | 64 |
| | 习题 | 64 |
| 第3章 | 随机信号模型 | 68 |
| 3.1 | 引言 | 68 |
| 3.2 | 最小二乘方法和 Pade 逼近法 | 69 |
| 3.2.1 | 最小二乘建模 | 69 |
| 3.2.2 | Pade 逼近法 | 70 |
| 3.3 | 零极点模型建模方法 | 77 |
| 3.3.1 | Prony 方法 | 77 |
| 3.3.2 | Shanks 方法 | 85 |
| 3.3.3 | 全极点模型 | 90 |
| 3.3.4 | 信号建模的应用: FIR 最小二乘逆滤波 | 94 |
| 3.4 | 有限长度数据下的信号建模 | 100 |
| 3.4.1 | 自相关方法 | 101 |
| 3.4.2 | 协方差方法 | 104 |
| 3.5 | 零极点模型的迭代方法 | 108 |
| 3.6 | 随机信号建模 | 111 |
| 3.6.1 | 自回归滑动平均建模 | 112 |
| 3.6.2 | 自回归模型 | 115 |
| 3.6.3 | 滑动平均模型 | 116 |
| 3.6.4 | 应用: 功率谱估计 | 119 |
| 3.7 | 小结 | 121 |
| | 习题 | 121 |

| | |
|-------------------------------------|-----|
| 第 4 章 Levinson 递归和格型结构 | 127 |
| 4.1 引言..... | 127 |
| 4.2 Levinson-Durbin 递归 | 127 |
| 4.2.1 递归式的推导 | 127 |
| 4.2.2 格型滤波器 | 133 |
| 4.2.3 Levinson-Durbin 递归的性质 | 134 |
| 4.3 Levinson 递归 | 139 |
| 4.4 FIR 格型滤波器..... | 143 |
| 4.5 小结..... | 147 |
| 习题 | 147 |
| 第 5 章 功率谱估计 | 150 |
| 5.1 引言..... | 150 |
| 5.2 非参数化方法..... | 151 |
| 5.2.1 周期图法 | 151 |
| 5.2.2 周期图的性能 | 154 |
| 5.2.3 修改的周期图 | 160 |
| 5.2.4 Bartlett 方法: 周期图平均 | 163 |
| 5.2.5 Welch 方法: 修改的周期图平均 | 166 |
| 5.2.6 Blackman-Tukey 方法: 周期图平滑..... | 169 |
| 5.2.7 性能比较 | 172 |
| 5.3 最小方差谱估计..... | 174 |
| 5.4 参数化方法..... | 179 |
| 5.4.1 自回归谱估计 | 180 |
| 5.4.2 滑动平均(MA)谱估计 | 185 |
| 5.4.3 自回归滑动平均(ARMA)谱估计 | 187 |
| 5.5 频率估计..... | 188 |
| 5.5.1 自相关矩阵的特征分解 | 188 |
| 5.5.2 Pisarenko 谐波分解 | 193 |
| 5.5.3 MUSIC 算法 | 197 |
| 5.5.4 其他特征向量方法..... | 198 |
| 5.5 小结..... | 201 |
| 习题 | 202 |
| 第 6 章 最佳滤波 | 208 |
| 6.1 引言..... | 208 |
| 6.2 维纳滤波器的离散形式..... | 209 |
| 6.2.1 维纳滤波器时域求解方法 | 209 |
| 6.2.2 维纳-霍夫方程 | 210 |
| 6.3 FIR 维纳滤波器..... | 211 |

| | | |
|--------------|--------------------|------------|
| 6.3.1 | 滤波 | 211 |
| 6.3.2 | 线性预计 | 213 |
| 6.3.3 | 噪声抵消 | 217 |
| 6.4 | IIR 维纳滤波器 | 219 |
| 6.4.1 | 非因果 IIR 维纳滤波器 | 219 |
| 6.4.2 | 因果的 IIR 维纳滤波器 | 223 |
| 6.5 | 小结 | 230 |
| | 习题 | 230 |
| 第 7 章 | 自适应滤波 | 233 |
| 7.1 | 引言 | 233 |
| 7.2 | FIR 自适应滤波器 | 236 |
| 7.2.1 | 最速下降自适应滤波器 | 237 |
| 7.2.2 | 最小均方算法 | 241 |
| 7.2.3 | 最小均方算法的收敛性 | 242 |
| 7.2.4 | 归一化最小均方算法 | 248 |
| 7.2.5 | 其他基于最小均方的自适应算法 | 250 |
| 7.2.6 | 应用: 噪声抵消 | 253 |
| 7.2.7 | 应用: 信道均衡 | 256 |
| 7.3 | 递归最小二乘 | 259 |
| 7.3.1 | 指数加权递归最小二乘算法 | 260 |
| 7.3.2 | 滑动窗的递归最小二乘算法 | 265 |
| 7.4 | 小结 | 267 |
| | 习题 | 268 |
| 附录 A | MATLAB 相关知识 | 275 |
| 附录 B | 特殊矩阵 | 277 |
| 参考文献 | 参考文献 | 279 |

第 1 章 离散时间信号和系统

1.1 引言

离散时间信号处理是信号处理领域最为重要的基础课程之一，而线性代数是表示它的重要工具。在这一章，我们仅仅对这门课程将要用到的离散时间信号处理和线性代数中的知识进行总结。第一部分总结了离散时间信号处理的基础知识，包括离散时间信号处理的一些重要专题，如线性滤波、差分方程、离散时间傅里叶变换(DTFT)、 z 变换和离散傅里叶变换(DFT)；第二部分概括了在后几章中用到的线性代数基础知识和最优化理论，包括向量和矩阵运算、线性方程的解、特征值和特征向量，以及二次型的最小化。

1.2 离散时间信号处理

1.2.1 离散时间信号

离散时间信号是实数或复数的有序排列。因而离散时间信号是整数变量 n 的函数，定义为 $x(n)$ 。尽管独立变量 n 不一定代表“时间”(也可以表示空间坐标或距离)，但一般还是把 $x(n)$ 看成时间的函数。由于离散时间信号对非整数的 n 没有定义， $x(n)$ 的图形类似于“棒棒糖”的形式，如图 1.1 所示。

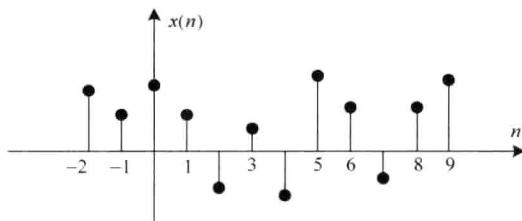


图 1.1 离散时间信号 $x(n)$ 的图例

离散时间信号可看成连续时间信号的抽样。例如，连续信号经过模数(A/D)转换器的输出，连续时间信号 $x_a(t)$ 按每秒 $f_s = 1/T_s$ 个样本来抽样，抽样信号 $x(n)$ 和 $x_a(t)$ 的关系如下：

$$x(n) = x_a(nT_s)$$

然而，并不是所有离散时间信号都是以这种方式获得的。特别是，有些信号本身就应该离散时间序列，不存在类似的模数转换器。这些信号的部分例子是每天的股票市场价格、人口统计、仓库的存货量，以及 Wolfer 太阳黑子数。

1.2.1.1 常用离散时间信号

常用的简单离散时间信号包括单位脉冲抽样、单位阶跃和复指数信号。

单位脉冲抽样信号定义为 $\delta(n)$ ，

$$\delta(n) = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ 0; & \text{其他} \end{cases}$$

它在离散时间信号处理中的作用类似于连续时间信号处理中的单位脉冲。可把任意离散信号 $x(n)$ 分解为加权且移位的单位抽样的和，

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

这个分解就是连续时间信号中移位特性的离散形式。

单位阶跃信号定义为 $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1; & n \geq 0 \\ 0; & \text{其他} \end{cases}$$

它和单位抽样的关系是

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$$

复指数信号是周期信号

$$e^{jn\omega_0} = \cos(n\omega_0) + j\sin(n\omega_0)$$

其中, ω_0 是某个实常数。复指数信号常用于信号的傅里叶分解, 将在 1.2.4 节讨论。

1.2.1.2 离散时间信号的分类

离散时间信号可根据持续时间或长度来分类。例如, 如果离散时间序列在 n 处于区间 $[N_1, N_2]$ 以外时为零, 则称其为“有限长度序列”。反之, 如果信号长度不是有限的, 则称为“无限长度序列”, 如单位阶跃和复指数序列。如果存在某个整数 n_0 , 使得 $n < n_0$ 时无限长序列等于零, 则可认为该序列是“右边序列”, 如单位阶跃信号。同样, 如果存在某个整数 n_0 , 使得 $n > n_0$ 时无限长序列 $x(n) = 0$, 则称 $x(n)$ 是“左边序列”。如

$$x(n) = u(n_0 - n) = \begin{cases} 1; & n \leq n_0 \\ 0; & n > n_0 \end{cases}$$

是单位阶跃的时间反转和延迟形式。如果无限长度序列既不是右边序列也不是左边序列, 如复指数序列, 则称为双边序列。

1.2.2 离散时间系统

离散时间系统可认为是一个数学运算或映射, 通过某种规则或函数, 把一个信号(输入)变换到另一个信号(输出)。符号 $T[-]$ 来表示一个普通系统, 如图 1.2 所示, 通过变换 $T[-]$ 把输入 $x(n)$ 变换为输出 $y(n)$ 。系统的输入/输出性质可用许多不同方式来表示。例如, 输入和输出的关系可用简洁的数学规则或函数来表示, 如

$$y(n) = x^2(n)$$

或

$$y(n) = 0.5y(n-1) + x(n)$$

然而, 也可以用算法来描述系统, 对输入信号值采用一组指令或运算。例如,

$$\begin{cases} y_1(n) = 0.5y_1(n-1) + 0.25x(n) \\ y_2(n) = 0.25y_2(n-1) + 0.5x(n) \\ y_3(n) = 0.4y_3(n-1) + 0.5x(n) \\ y(n) = y_1(n) + y_2(n) + y_3(n) \end{cases}$$

有时也可用一个表来定义系统, 给出所有可能的输入/输出关系对。

离散时间系统具有很多性质, 最常用的性质有线性特性、移不变特性、因果性、稳定性和可逆性等。

下面将依次进行讨论。

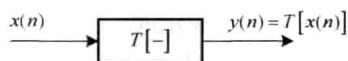


图 1.2 离散时间系统的输入/输出关系图

1. 线性特性

如果系统 $T[-]$ 的任意两个输入 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$, 对任意两个常数 a 和 b 满足

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$$

则称该系统是线性系统。换句话说, 线性系统对两个信号之和的响应等于这两个响应之和, 用常数对输入加权, 输出的加权也为同样的常数。如果输入能够分解为多个加权, 且移位的单位抽样之和, 即

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

则输出为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) \quad (1.1)$$

其中, $h_k(n) = T[\delta(n-k)]$ 是系统对延迟的单位抽样 $\delta(n-k)$ 的响应。式(1.1)称为“叠加和”, 它表明一旦信号 $h_k(n)$ 已知, 则线性系统就给定。

2. 移不变特性

输入序列的移位或延迟将引起输出序列相应的移位或延迟。 $y(n)$ 是系统对输入 $x(n)$ 的响应, 如果对输入任意移位 $x(n-n_0)$, 则对应的系统响应为 $y(n-n_0)$ 。也就是说, 移不变特性表明系统的性质并不随时间改变。

如果系统既有线性特性又有移不变特性, 则称该系统为线性移不变(LSI)系统。如果定义移不变系统对单位抽样 $\delta(n)$ 的响应为 $h(n) = T[\delta(n)]$, 则对 $\delta(n-k)$ 的响应为 $h(n-k)$ 。因此式(1.1)给出的叠加和对线性移不变系统可简化为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (1.2)$$

称为“卷积和”, 可简化为

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

卷积和可以计算线性移不变系统对任意输入 $x(n)$ 的响应, 而线性移不变系统又被其对单位抽样的响应 $h(n)$ 唯一确定, $h(n)$ 称为系统的“单位脉冲响应”, 也称为“单位抽样响应”。

3. 因果性

如果对于任意 n_0 , 系统在 $n=n_0$ 时刻的响应仅与 $n \leq n_0$ 的输入值有关, 则称该系统是因果的。对于因果系统, 输出的变化不可能超过输入的变化。

例如, 后向差分系统 $y(n) = x(n) - x(n-1)$ 是因果的, 因为在 $n=n_0$ 时刻的输出仅与 n_0

和 $n_0 - 1$ 时刻的 $x(n)$ 有关。而前向差分系统 $y(n) = x(n+1) - x(n)$ 则是非因果的, 因为在 $n = n_0$ 时刻的输出与 $n_0 + 1$ 的输入有关。如果系统是线性移不变的, 只要所有的 $n < 0$ 时 $h(n) = 0$, 则该系统就是因果的。

4. 稳定性

当且仅当每一个有界的输入都产生一个有界的输出时, 则称该系统在有界输入有界输出 (BIBO) 意义下是稳定的。如果系统是 BIBO 稳定的, 则对于任意有界输入, $|x(n)| \leq A < \infty$, 输出是有界的, $|y(n)| \leq B < \infty$ 。对于线性移不变系统, 只要单位脉冲响应是绝对可和的,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (1.3)$$

系统就是稳定的。例如, 线性移不变系统的 $h(n) = a^n u(n)$, 在 $|a| < 1$ 时是稳定的。

5. 可逆性

如果知道系统的输出, 系统的输入可唯一确定, 则称系统是可逆的。也就是说, 不同的输入必须有不同的输出。给定任意两个 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$, 且 $x_1(n) \neq x_2(n)$, 必定有 $y_1(n) \neq y_2(n)$ 。例如, 系统的输出定义为

$$y(n) = x(n)g(n)$$

只有对所有的 n 都满足 $g(n) \neq 0$, 则称该系统是可逆的。如果 $g(n)$ 对所有的 n 都是非零的, 给定输出 $y(n)$, 就可以用 $x(n) = y(n)/g(n)$ 来确定输入。

1.2.3 线性移不变滤波器的时域描述

线性移不变系统中的一类重要系统是由线性常系数差分方程 (LCCDE) 描述的, 输入 $x(n)$ 和输出 $y(n)$ 的关系可表示为

$$y(n) + \sum_{k=1}^p a(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^q b(k)x(n-k) \quad (1.4)$$

其中, p 和 q 是整数, 用来表示系统的阶数, $a(1), \dots, a(p)$ 和 $b(0), b(1), \dots, b(q)$ 是系统的滤波器系数。差分方程经常写成下列形式:

$$y(n) = \sum_{k=0}^q b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^p a(k)y(n-k) \quad (1.5)$$

这清楚地表明, 输出 $y(n)$ 等于过去的输出值 $y(n-k)$, $k=1, \dots, p$ 和过去及当前的输入值 $x(n-k)$, $k=0, \dots, q$ 之间的线性组合。对于 $p=0$ 的特例, 差分方程变为

$$y(n) = \sum_{k=0}^q b(k)x(n-k) \quad (1.6)$$

输出仅仅是过去及当前的输入值的线性组合。此时的单位脉冲响应的长度有限,

$$h(n) = \sum_{k=0}^q b(k)\delta(n-k)$$

这种系统称为有限长度脉冲响应 (FIR) 系统。然而, 如果 $p \neq 0$, 单位脉冲响应的长度一般是无限长的, 此时该系统称为无限长度脉冲响应 (IIR) 系统。对于

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

系统, 单位脉冲响应为 $h(n) = a^n u(n)$ 。

1.2.4 离散时间傅里叶变换

离散时间信号和系统的频率分析是一个非常重要的分析和设计工具,其中最重要的就是离散时间傅里叶变换(DTFT)。离散信号 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换是连续(频率)变量 ω 的复值函数,定义为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} \quad (1.7)$$

为了让信号的离散时间傅里叶变换定义有意义,式(1.7)中的和必须收敛。求和均匀收敛的充分条件是 $x(n)$ 是绝对可和的,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (1.8)$$

尽管大多数信号都存在离散时间傅里叶变换,但如单位阶跃信号和复指数信号等都不是绝对可和的,因此不存在离散时间傅里叶变换。然而,如果允许离散时间傅里叶变换包含更广,则复指数信号的离散时间傅里叶变换是脉冲

$$x(n) = e^{jn\omega_0} \rightarrow X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0); \quad |\omega| < \pi$$

其中, $\delta(\omega - \omega_0)$ 用来定义在频率 $\omega = \omega_0$ 处的脉冲。同样,单位阶跃的离散时间傅里叶变换是

$$u(n) \rightarrow U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi\delta(\omega); \quad |\omega| < \pi$$

离散时间傅里叶变换一般是 ω 的复值函数,因此经常用幅度和相位来表示

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\phi_x(\omega)}$$

如果 $x(n)$ 是实数,则 $X(e^{j\omega})$ 是共轭对称的,

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

对于实数信号, $X(e^{j\omega})$ 的幅度是偶函数, $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$, 其相位是奇函数, $\phi_x(-\omega) = -\phi_x(\omega)$ 。

线性移不变系统的单位脉冲响应的离散时间傅里叶变换为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega} \quad (1.9)$$

这个离散时间傅里叶变换称为滤波器的频率响应,它表明一个复指数信号通过系统后幅度和相位的变化。注意,式(1.8)给出的离散时间傅里叶变换存在条件等同于线性移不变系统的 BIBO 条件。因此,对于稳定的 BIBO 系统, $h(n)$ 的离散时间傅里叶变换存在。

离散时间傅里叶变换是一个可逆变换,即给定信号 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, 就可通过离散时间傅里叶逆变换(IDTFT)来恢复信号

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \quad (1.10)$$

离散时间傅里叶逆变换不但可以从 $X(e^{j\omega})$ 中计算 $x(n)$, 还可看成把 $x(n)$ 分解为复指数信号的线性组合。

如表 1.1 所示,离散时间傅里叶变换除了具有对称性之外,还具有许多重要性质,最重要的就是**卷积定理**和**Parseval 定理**。

卷积定理: 两个信号的卷积

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

的离散时间傅里叶变换等于各自信号离散时间傅里叶变换的乘积,

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

Parseval 定理: 信号 $x(n)$ 的平方和等于它的离散时间傅里叶变换的平方的积分,

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (1.11)$$

函数 $|X(e^{j\omega})|^2$ 称为能量密度谱, 它决定了信号能量在频域中的分布。所以, Parseval 定理表明信号在时域的能量和频域的能量是平衡的。

表 1.1 DTFT 的性质

| 性 质 | 序列 $x(n)$ | 变换 $X(e^{j\omega})$ |
|-------------|--|---|
| 延迟 | $x(n-n_0)$ | $e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$ |
| 调制 | $e^{j\omega_0 n} x(n)$ | $X(e^{j(\omega-\omega_0)})$ |
| 共轭 | $x^*(n)$ | $X^*(e^{-j\omega})$ |
| 时间反转 | $x(-n)$ | $X(e^{-j\omega})$ |
| 卷积 | $x(n) * y(n)$ | $X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$ |
| 乘积 | $x(n)y(n)$ | $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$ |
| 乘 n | $nx(n)$ | $j \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega})$ |
| Parseval 定理 | $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n)$ | $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$ |

1.2.5 z 变换

离散时间信号的 z 变换是和连续时间信号的拉普拉斯变换互相对应的, 是离散时间傅里叶变换的推广, 离散时间傅里叶变换不是对所有序列都收敛的, 许多没有离散时间傅里叶变换的信号可采用 z 变换来表示。离散时间信号 $x(n)$ 的 z 变换定义为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (1.12)$$

其中 $z = re^{j\omega}$ 是复数变量。在 $r=1$ 或 $z = e^{j\omega}$ 时, z 变换就简化为离散时间傅里叶变换,

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

与离散时间傅里叶变换类似, 只有当式(1.12)的和收敛时, z 变换的定义才有意义。一般来说, 求和并不是对所有的 z 都收敛的, 因此每个 z 变换都存在一个收敛域, 定义为求和式收敛时 z 的值。对于有限长序列, 式(1.12)的求和仅包含有限项。因此有限长序列的 z 变换是 z 的多项式, 其收敛域包含所有的 z 值(有可能不包含 $z=0$ 或 $z=\infty$)。而对于右边序列, 收敛域是外圆 $|z| > R_-$ 。对于左边序列, 收敛域是内圆 $|z| < R_+$, 其中 R_- 和 R_+ 是正数。对于双边序列, 收敛域是环

$$R_- < |z| < R_+$$

与离散时间傅里叶变换类似, z 变换有许多重要性质, 表 1.2 总结了其中一些性质。

另外, 如果 $x(n)$ 是共轭对称序列,

$$x(n) = x^* (-n)$$

则它的 z 变换满足

$$X(z) = X^*(1/z^*) \quad (1.13)$$

这个性质是表 1.2 中共轭性质和时间反转性质的组合。在表 1.3 中给出了一些常用的级数求和形式的表达式，在用式(1.12)计算 z 变换时很有用。

表 1.2 z 变换的性质

| 性 质 | 序列 $x(n)$ | 变换 $X(z)$ |
|------------|---------------|------------------------|
| 延迟 | $x(n - n_0)$ | $z^{-n_0} X(z)$ |
| 被 a^n 调制 | $a^n x(n)$ | $X(z/a)$ |
| 共轭 | $x^*(n)$ | $X^*(z^*)$ |
| 时间反转 | $x(-n)$ | $X(z^{-1})$ |
| 卷积 | $x(n) * h(n)$ | $X(z)H(z)$ |
| 乘 n | $nx(n)$ | $-z \frac{d}{dz} X(z)$ |

表 1.3 一些常用的级数求和形式

| | |
|---|--|
| $\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad ; \quad a < 1$ |
| $\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2} \quad ; \quad a < 1$ |
| $\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2} N(N-1)$ | $\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6} N(N-1)(2N-1)$ |

单位脉冲响应的 z 变换，

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

称为“系统函数”。

对于式(1.6)给出的用 LCCDE 描述的 FIR 滤波器，系统函数是 z^{-1} 的多项式，

$$H(z) = \sum_{k=0}^q b(k)z^{-k} = b(0) \prod_{k=1}^q (1 - z_k z^{-1}) \quad (1.14)$$

多项式的根为 z_k ，也称为滤波器的零点。对于 FIR 滤波器 $H(z)$ 的这种形式，称为全零点滤波器。对于用式(1.5)给出的差分方程描述的 IIR 滤波器，系统函数是两个 z^{-1} 的多项式的比，

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^q b(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a(k)z^{-k}} = b(0) \frac{\prod_{k=1}^q (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - p_k z^{-1})} \quad (1.15)$$

分子多项式的根为 z_k ，是 $H(z)$ 的零点，分母多项式的根为 p_k ，称为极点。如果分子多项式的阶数为零， $q=0$ ，则

$$H(z) = \frac{b(0)}{1 + \sum_{k=1}^p a(k)z^{-k}} = \frac{b(0)}{\prod_{k=1}^p (1 - p_k z^{-1})} \quad (1.16)$$

此时的 $H(z)$ 称为全极点滤波器。

如果系统函数的系数 $a(k)$ 和 $b(k)$ 是实数(或 $h(n)$ 是实数), 则

$$H(z) = H^*(z^*)$$

此时, $H(z)$ 的零极点是共轭成对出现的, 即如果 $H(z)$ 在 $z=a$ 处存在极点(零点), 则 $H(z)$ 在 $z=a^*$ 有一个极点(零点)。表 1.4 给出了一些有用的 z 变换对。

表 1.4 一些常用的 z 变换对

| 序列 | 变换 | 收敛域 |
|----------------------------|--|-------------------------------|
| $\delta(n)$ | 1 | 所有的 z |
| $\alpha^n [u(n) - u(n-N)]$ | $\frac{1 - \alpha^N z^{-N}}{1 - \alpha z^{-1}}$ | $ z > 0$ |
| $\alpha^n u(n)$ | $\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$ | $ z > \alpha$ |
| $-\alpha^n u(-n-1)$ | $\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$ | $ z < \alpha$ |
| $\alpha^{ n }$ | $\frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha z)}$ | $ \alpha < z < 1/ \alpha $ |

1.2.6 滤波器的分类

在后面的章节中经常会遇到几类特殊的滤波器。其中一类是线性相位滤波器, 它在语音和图像处理中非常重要, 其频率响应形式为

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{j(\beta - a\omega)} \quad (1.17)$$

其中, $A(e^{j\omega})$ 是 ω 的实函数, α 和 β 是常数。

如果要求因果滤波器具有线性相位, 并且能用有限阶线性常系数差分方程来表示, 则该滤波器必定是 FIR 滤波器。并且, 单位脉冲响应 $h(n)$ 或者是共轭对称的,

$$h^*(n) = h(N-1-n)$$

或者是共轭反对称的,

$$h^*(n) = -h(N-1-n)$$

这些约束使系统函数 $H(z)$ 的零点以共轭倒数对的形式出现,

$$H^*(z^*) = \pm z^{N-1} H(1/z)$$

也就是说, 如果 $H(z)$ 在 $z = z_0$ 处存在零点, 则 $H(z)$ 必定在 $z = 1/z_0^*$ 处存在零点。

另外一类是全通滤波器, 它在相位均衡中非常有用, 其频率响应具有恒定的幅度

$$|H(e^{j\omega})| = A$$

如果全通滤波器具有有理函数形式, 则 $H(z)$ 可表示为

$$H(z) = z^{-n_0} A \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - \alpha_k^*}{1 - \alpha_k z^{-1}}$$

如果 $H(z)$ 在 $z = \alpha_k$ 有零点(极点), 则 $H(z)$ 在 $z = 1/\alpha_k^*$ 也必定有极点(零点)。

第三类是最小相位滤波器。对于稳定的因果滤波器, 如果滤波器具有有理函数形式, 且它的零点和极点都在单位圆内, 则称该滤波器为“最小相位滤波器”。对于最小相位滤波器, 式(1.15)中的 $|z_k| < 1$, 且 $|p_k| < 1$ 。该滤波器具有一个稳定的因果逆 $1/H(z)$, 它也是最小相位的。这个性质在 2.5 节推导谱分解定理和第 6 章推导因果的维纳滤波器时非常有用。

1.2.7 滤波器流图

LCCDE 定义了滤波器输入 $x(n)$ 和滤波器输出 $y(n)$ 之间的关系。在硬件和软件中使用滤波器时, 有许多不同方式来计算 n 时刻的输出 $y(n)$ 的值。