数学思想方法

SHUXUE SIXIANG FANGFA

纪明　主编

大连理工大学出版社
大连理工大学电子音像出版社

数学思想方法

主　编　纪　明
副主编　刘　严　刘　石
　　　　刘晓纲

大连理工大学出版社
大连理工大学电子音像出版社

数学思想方法

主编　纪　明

大连理工大学出版社
大连理工大学电子音像出版社　出版

地址:大连市软件园路 80 号　邮编:116023

发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466

E-mail:dzcb@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn

大连理工印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm　　印张:8.75　　字数:220 千字

2006 年 11 月第 1 版　　2006 年 11 月第 1 次印刷

责任编辑:王影琢　　责任校对:达　理

封面设计:宋　蕾

ISBN 7-900699-16-3　　定价:13.50 元

前　言

数学思想是对数学知识本质上的认识，是从数学内容中提炼出来的数学基本观点，是应用数学解决问题的基本思想。数学方法是为解决问题而采用的方式或手段。数学思想是数学方法的概括和提炼，数学方法是数学思想的具体表现，因为数学思想常表现为数学方法的形式，所以通常统称为“数学思想方法”。

现代教育要求我们要注重提高学生的基本素质，培养他们的思维能力和创新意识。数学思想方法是解决数学问题的指导思想和基本策略，是数学的灵魂。因此，在数学教学中让学生领悟和掌握以数学知识为载体的数学思想方法，是提高学生数学思维能力，发展学生数学应用意识和创新意识，提高学生提出、分析和解决问题的能力，提高学生的数学素养，使其真正懂得数学的价值，建立科学的数学观念的保证。

本书编写围绕中学数学的内容，遵循启发思维、培养能力、提高素质的原则，讲述了五种目前中学数学课程中起主导作用的、解决问题的最基本、最有用的思想。在编写的过程中，既注重内容的理论性、系统性，又考虑到方法的应用性，便于学习和讲授。

本书可作为大学高年级“数学思想方法”课程的教材，也可作为中学数学教师的教学参考书。

由于编者水平有限，难免有不妥之处，敬请读者指正。

编　者

2006 年 9 月

目　录

第一章　总　论

数学方法就是为解决问题而采用的手段、步骤或程序，属于过程性知识。而数学思想，则是数学的基本观点，是对数学的概念、原理、方法、发现法则本质的认识。对于解题，数学思想就是解题策略，它能沟通问题与知识、方法间的联系，调节解题，是解题的指导思想，属于策略性知识。因为数学思想常常表现为数学方法的形式，所以通常把两者统称为“数学思想方法”。但要明确两者的关系：数学思想就是数学方法的概括和提炼，思想比方法有更高的层次；数学方法是数学思想的具体表现，具有模式化与操作化的特征。因此，每一种数学思想的应用要点，就是统一在该思想策略下的各个基本数学方法或基本模式。因此，我们研究、总结、提炼每一种数学思想时，就应该清晰地划分为“基本观点与解题策略”和“基本方法”这两个方面。

我们主要探讨五种数学思想系统，下面先给出中学数学思想系统表，然后加以评注。

一、猜证结合思想	基本证明方法：综合法，分析法，比较法，穷举法，数学归纳法，发证法，举反例
	基本猜想方法：特殊化，一般化，类比法，归纳法
二、分类与分步思想	分类讨论，反分类（整体解决） 分步解决，反分步（直解）
三、化归思想	等价转化，分合法，构造法，映射法，递归模式，回归定义
四、数形结合思想	坐标法，向量法，复数法，三角法，图解法
五、函数与方程思想	笛卡儿坐标系，判别式，基本函数模型方法，构造函数与方程，换元法，参数法

对于“五种数学思想系统”，我们评注四点：

(1) 五种数学思想系统是怎样形成的？

① 在数学发展的历史过程中，特别是 17 世纪以后，形成了许多重要的数学思想。除了上述五种数学思想外，还有公理化、符号化、极限思想、固本思想等等。本书所提的五种数学思想是目前中学数学课程中起主导作用的思想，是问题解决的最基本、最有用的思想，对学生今后的学习与发展更为重要。

② 国家考试中心在 1993 年提出的四种数学思想：数形结合思想、函数与方程思想、分类讨论思想、化归思想。我们在四种数学思想的基础上做两点补充：

第一应该提出“猜证结合思想”。因为：问题解决靠推理，而数学推理有两种：一是证明推理，二是似真推理。其中似真推理就是数学猜想。“证明”只能证明真理，却不能发现真理；发现真理靠的是猜想，但猜想不能代替证明。由此可知猜证结合的思想是问题解决的最高策略。但在传统教学中，只教证明，不教猜想，整个教学困扰在证明的魔圈之中，成为数学教育史上的严重问题。数学教育家波利亚早在 1953 年提出了一个划时代的口号：“让我们教猜想吧！”此后许多先进国家的数学教育转向“教猜想”。但在半个世纪后的今天，我国仍然很少教猜想。尤其面对当今的创新时代，没有猜想的数学思想远远落后于时代，无法在更高的层面上推进创新能力和实践能力的素质教育。由于猜想和证明是不可分离的，所以我们提出猜证结合的数学思想，并将其列为五种数学思想之首。以尽快地跳出“证明魔圈”，尽力启发学生的创造性思维，复兴中华民族的数学发现。

第二应该将“分类讨论思想”改为“分类与分步思想”。因为：“分类”与“分步”是人们解决问题的两种基本策略。在哲学上，“分类”与“分步”是矛盾分化思想的两个不同方法，只讲“分类”不讲“分步”是一个很大的偏缺。

由 ① 和 ②，我们提出五种数学思想，即猜证结合思想、分类与分步思想、化归思想、数形结合思想、函数与方程思想。并且，我们把高

中数学中重要的数学方法进行归纳，统一在这五种数学思想之下，从而形成了“五种数学思想系统”。

(2) 数学思想系统是发现的归纳系统。

每种数学思想都是历史的结晶，每种数学思想的策略和方法都是前人解题经验的归纳与总结，都是数学的发现。并且这条数学发现的道路永无止境，这个数学思想系统还有待于充实、创新和完善。数学思想系统是一个永无完结的开放系统。对于所给的五种数学思想系统表：一方面，该表起着系统化、明确化的作用，为数学思想方法的发现奠定了相对的基础。因此，那种认为数学思想方法只能是渗透的、模糊的、散乱的观点是错误的，我们的这张系统表就是对这种错误观点的批判。另一方面，不要把该表当做死定的条条、框框，生搬硬套，而要自我地实践它，在问题解决中自我地归纳它、发现它。因此，数学思想方法的学习，不能依靠别人的“讲解”，必须靠“自我做题”加“自我总结、归纳和发现”。这是学习的主要方法。

(3) 上述数学思想方法还没有严谨的逻辑划分，仅是为了实用而做的经验总结。

所给的五种数学思想方法不是独立平行的，而是相互渗透、交叉的。例如，特殊化方法和一般化方法既是基本猜想方法，又是化归思想中的构造法(构造特殊的辅助问题，构造一般的辅助问题)。又例如，换元法和参数法既是化归思想中的“关系映射”，又是函数与方程思想中的“变量相对论”。我们反对脱离实际地追求严密分类，而追求数学思想在问题解决中的实际应用。

(4)“数学思想教学大纲”是第一次提出的“数学能力大纲”。

迄今为止，还没有数学能力培养大纲。普遍认为能力培养是一个复杂、变动不居的动态过程，而且能力的内涵和外延都是开放的，因而各学科能力培养大纲还在争论之中。在问题解决的中心意义上，数学思想方法就是数学能力，从而本书把能力培养化归为思想方法的教学，用数学思想教学大纲代替数学能力大纲。这样做，就抓住了能力培养的意义，同时将抽象的数学能力化归为具体的可操作的数学

思想方法，将只能是“领悟”化归为“操作加领悟”，将“散乱的渗透”化归为“系统化、明确化”。所以我们建议将五种数学思想系统作为数学能力培养大纲的主要内容。

根据上述评注，通过本书的学习，应达到下述学习目标：

应在自己的头脑中主动地建构“五种数学思想系统”(如上面的系统表)，使自己的数学思想方法达到“系统化”和“明确化”两大目标。为此，在学习中要盯住三点：

① 掌握每种数学思想的基本观点与解题策略(主要是通用的策略)；

② 掌握每种数学思想的基本方法；

③ 通过“例中学”和“做中学”(即示例演练)，归纳和总结解题策略，领悟策略形成的本质和采用不同策略的原因，开发自己的大脑，学会数学思维，能在数学思想方法上有所发现。

第二章　猜证结合思想

2.1　基本观点与解题策略

解题的核心是逻辑推理，因此我们着力研究：怎样进行逻辑推理。“逻辑”一词的歧义很多，本书所说“逻辑”是指“思维的规律”。因此，本书所说的逻辑推理是广义的，它不仅包括形式逻辑推理，而且包括辩证逻辑推理以及各种非形式化的逻辑推理，如形象思维、直觉思维等等。我们尽力引入运动和辩证法，用哲学思想揭开数学推理的秘密，全面而深刻地学会推理。

一、推理有几种?什么是证明推理、似真推理?
什么是数学猜想?

解题是人类特别富有的智力活动，它必须遵循人类认识运动的规律。人的基本认识过程有两个：一是由特殊到一般；一是由一般到特殊。我们按照这两个基本认识过程，将推理分为两种：

1. 似真推理 —— 由特殊到一般

由个别的、特殊的结论，通过观察、实验、分析、比较等手段，概括出一般结论，这种推理叫做归纳推理。它是合情的或然性推理，其结论不一定真实，必须加以反驳和证明。结论的似真性是归纳推理的主要特征，因此把归纳推理叫做似真推理，也叫做数学猜想。这是创造性的逻辑推理。

“由特殊到特殊”或“由一般到一般”的推理，叫做类比推理。其认识过程仍包含于“由特殊到一般”这个基本认识过程之中，并且所推出的结论也是似真的。所以类比推理也是似真推理。

2. 证明推理 —— 由一般到特殊

由一般原理推出个别的、特殊的结论，这种推理叫做演绎推理。演绎的前提是真实的，且推理的形式又合乎逻辑，所以推出的结论一定是真实的。我们把演绎推理叫做证明推理。它与或然性的似真推理不同，是必然性推理。

总之，根据辩证唯物主义的认识论，我们认识到：第一，推理有似真推理和证明推理，简言为“猜想和证明”；第二，这两种推理必须相互连结、有机结合。数学推理总是这样“猜想 —— 证明 —— 再猜 —— 再证明”循环往复地进行的，直到问题解决或发现新问题。这就是数学推理的逻辑。由此凝聚了一个现代的解题思想 —— 猜证结合思想。

二、什么是猜证结合思想？

数学是系统的演绎科学，其核心是严谨的证明推理；数学又是实验性的归纳学科，其核心是合情的似真推理(即数学猜想)。人们必须学会这两种推理，靠猜想去发现，靠证明去反驳或证实发现。这就引出人类解题的两大策略 —— 猜想和证明。因为这两大策略各有优缺：“猜想”优于发现，但其结果是似真的，必须补加证明；“证明”能够证明真理，但难以发现真理。因此，在问题解决中，不但要善于应用“猜”、“证”两种策略，还要更善于“猜证结合”，使猜想和证明互补优缺、交互为用，使问题解决得又好又快。这就是猜证结合思想。

猜证结合思想的逻辑基础是辩证逻辑，是或然逻辑和必然逻辑的统一。猜证结合是综合能力较高的带有一定直觉性的高级认识过程，是人类智慧的一个高峰。

在我国的小学、中学和大学的数学教育中，只教证明，很少教猜想，更没有把数学猜想当做科学的现代的解题思想。应该重视猜想，更应该重视猜证结合，把猜证结合思想当做问题解决的第一策略。本书一方面揭示猜想的科学规律，系统地讲授猜想方法；另一方面把高中学过的证明方法加以总结和深化。然后把两种推理综合起来，在思

维中建构起较为明确的和系统的猜证结合思想。

在今后解题中，应注意批判两种错误的倾向：

(1) 忽视猜想，只会证明的倾向。这种倾向，认为猜想不是科学，没有规律，没有可学的内容。认为演绎证明是逻辑思维的一切。

(2) 猜想脱离证明的倾向。这种倾向表现为，解题时经常是瞎猜胡想。侥幸猜对了几个题目，于是夸大猜想，不再刻苦学习演绎证明。这是思维的肤浅。必须知道：脱离证明的猜想容易导致错误，没有扎实的证明推理的基础，是学不会猜想的。

三、试归纳一下猜证结合思想的基本观点与解题策略。

通过以上的讨论，我们归纳出猜证结合思想的基本观点与解题策略：

1. 推理有两种

(1) 似真推理（数学猜想）
- 归纳：特殊到一般
- 类比：特殊到特殊
　　　一般到一般

(2) 证明推理 —— 演绎：一般到特殊

要学会“猜想”和“证明”两种推理。在解题时特别注意区分：

(1) 是“猜想”，还是“证明”？

(2) 是合情猜想，还是瞎猜胡想？

2. 猜证结合，边猜边证

猜想和证明必须有机结合、交互为用，“边猜边证”是解题的通用策略。

3. 先猜后证

“先猜后证”是数学发现的常规做法，也是解题的常用策略。其模式是：

下面研究几个例题，请注意“新解法”与“旧解法”有何不同。

【例 1】 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率$e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$A$是左顶点，$F$是右焦点，$B$是短轴的一个端点，则$\angle ABF$等于(　　)。

A. 30°　　B. 60°　　C. 90°　　D. 120°

旧解法　在$\triangle ABF$中(如图 2-1)，由余弦定理得

$$\cos\angle ABF=\frac{(a^2+b^2)+a^2-(a+c)^2}{2a\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a^2-ac-c^2}{a\sqrt{a^2+b^2}}$$

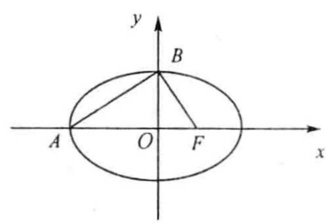

图 2-1

因为

$$a^2-ac-c^2=a^2(1-e-e^2)=a^2\left[1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\right]=0$$

所以$\cos\angle ABF=0$，得$\angle ABF=90^\circ$。因此选 C。

新解法　考察极端：在四个选项中，90°是个极端，先猜想$\angle ABF=90^\circ$。

因为

$$k_{AB}\cdot k_{BF}=\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{c}\right)=-\frac{b^2}{ac}=\frac{c^2-a^2}{ac}=e-\frac{1}{e}=-1$$

所以$\angle ABF=90^\circ$正确。因此选 C。

说明　旧解法是演绎法，其计算量较大，并且用已知量$e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$来求$\cos\angle ABF$很费思索。新解法是猜证结合：先猜想$\angle ABF$是直角，然后用$k_{AB}\cdot k_{BF}=-1$证明它。其计算量已化为极小。新解法比旧解法快过一倍。新解法是带有一定直觉性的高级思维

活动,其猜想方法是特殊化法。

【例 2】 定义在$(-\infty,+\infty)$上的偶函数$f(x)$满足:$f(x+1)=-f(x)$,且在$[-1,0]$上是增函数。下面是关于$f(x)$的判断:

①$f(x)$是周期函数;

②$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称;

③$f(x)$在$[0,1]$上是增函数;

④$f(x)$在$[1,2]$上是减函数;

⑤$f(2)=f(0)$。

其中正确的判断是______。

旧解法 两次使用$f(x)=-f(x+1)(x\in \mathbf{R})$,得

$$f(x)=-f(x+1)=-[-f(x+2)]=f(x+2)$$

即$f(x)$是周期为2的周期函数。

所以①和⑤是正确的。

由$f(x)$的周期为2,且已知$f(x)$在$[-1,0]$上是增函数,得$f(x)$在$[1,2]$上也是增函数。所以④是错误的。

由$f(x)$是偶函数,且在$[-1,0]$上是增函数,得$f(x)$在$[0,1]$上是减函数。所以③是错误的。

由$f(x)$是偶函数,得

$$f(x)=f(-x)$$

所以
$$\begin{aligned}f(x+1)&=-f(x)=-f(-x)\\&=-[-f(-x+1)]=f(1-x)\end{aligned}$$

即$f(1+x)=f(1-x)$。所以$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称,即②是正确的。

综上,正确的判断是①、②、⑤。

新解法 把1类比为π,把偶函数$f(x)$类比为$\cos x$,则余弦函数$y=\cos x$满足全部已知条件。根据$y=\cos x$的周期为2π,其图象关于直线$x=\pi$对称,在$[0,\pi]$上是减函数,在$[\pi,2\pi]$上是增函数,类比得①、②、⑤正确;③、④不正确。因此正确的判断是①、②、⑤。

说明 旧解法是演绎证明,在推证①、②时非常困难,这使本

题成为难题，只有极好的学生才能答对。新解法是类比猜想，这种现代的解法，使本题“一望得解”。

【例 3】 已知 $a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{2a_n-9}{a_n-4}(n=1,2,\cdots)$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解法一 先猜：$a_1=1=3-\dfrac{2}{1}$

$$a_2=\frac{7}{3}=3-\frac{2}{3}$$

$$a_3=\frac{13}{5}=3-\frac{2}{5}$$

所以猜想
$$a_n=3-\frac{2}{2n-1}\quad(n\in\mathbf{N})\qquad①$$

下面用数学归纳法证明：

(1) 当 $n=1$ 时，$a_1=3-\dfrac{2}{2\times1-1}=1$，所以公式 ① 成立。

(2) 假设 $a_k=3-\dfrac{2}{2k-1}$，则

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=\frac{2a_k-9}{a_k-4}=2-\frac{1}{a_k-4}\\&=2-\frac{1}{\left(3-\dfrac{2}{2k-1}\right)-4}\\&=2+\frac{2k-1}{2k+1}=3-\frac{2}{2(k+1)-1}\end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 时公式 ① 也成立。

解法二 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n-9}{a_n-4}=2-\dfrac{1}{a_n-4}$

即
$$a_{n+1}-2=-\frac{1}{a_n-4}\qquad②$$

作代换
$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=a_{n+1}-2\quad\left(\frac{x_1}{x_2}=a_2-2=\frac{1}{3}\right)\qquad③$$