Gailülun Yu Shuli Tongji Fangfa

概率论与数理统计方法

刘瑞芹 主编

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

概率论与数理统计方法

主　编　刘瑞芹
副主编　孙彩云　王　涛　高艳辉　仓定帮
参　编　许　璐　杨文光
主　审　贾　敬

中国矿业大学出版社

内容提要

本书共八章，主要内容包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、二维随机变量和其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验. 每章包括重要知识点、主要考核点、典型题型详解、自测题及答案等内容.

本书是本科院校非数学类专业学生学习概率论与数理统计的辅助教材，也可作为考研复习的指导用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计方法/刘瑞芹主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2012.12

ISBN 978-7-5646-1749-3

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 305248 号

书　　名　概率论与数理统计方法

主　　编　刘瑞芹

责任编辑　陈振斌　于世连

出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司

（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）

营销热线　(0516)83885307　83884995

出版服务　(0516)83885767　83884920

网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**：cumtpvip@cumtp.com

印　　刷　淮安淮海印务有限公司

开　　本　787×1092　1/16　**印张** 8.25　**字数** 206 千字

版次印次　2012 年 12 月第 1 版　2012 年 12 月第 1 次印刷

定　　价　23.00 元

（图书出现印装质量问题，本社负责调换）

前　言

概率论与数理统计是探讨广泛存在的随机现象规律性及其应用的数学学科，是培养学生利用随机思维模式看待和处理随机现象的一门重要数学基础课程，其分析与解决问题的方法直接指导人们的研究与实践. 概率论与数理统计是高等学校理工科和经济管理类各专业的一门主要基础理论课程，是硕士研究生、MBA 等入学考试的主考课程之一. 学生学好概率论与数理统计课程是十分必要的.

概率论与数理统计的概念众多，内容繁杂，前后知识相互联系、相互渗透、环环相扣，在知识体系与逻辑推理方式上独树一帜. 初学者往往感到迷茫和困惑，而教材因受到课时及篇幅的限制，不可能对所有的问题都做出详尽的陈述，也不可能对前后相关的知识进行系统的归纳总结并介绍较多的解题方法. 目前，各种数学复习资料、辅导材料充斥市场，让学生眼花缭乱，无所适从. 为了正确引导学生的概率论与数理统计学习，从繁杂的深浅不一的复习资料中解放出来，我们几位长年从事在数学教学一线的教师认真总结多年来的教学经验，汲取众多复习资料的营养，集体编撰了这本《概率论与数理统计方法》. 本书的内容浓缩了经典教材的知识精华，对这门课程中所有可能的题型进行了系统的分析归类，精心选编和解析了大量的经典例题，旨在帮助学生提高学习效率，轻松自如地应对大学课程考试和研究生入学考试.

此书每个章节分四个板块：重要知识点、主要考核点、典型题型详解、自测题及答案. 例题内容丰富，典型性强，覆盖面广，且有层次，既有基本题，也有综合提高题；例题中有适当的分析过程，有些还给出了一题多解的方法. 选题类型齐全，针对性强，其中包括选择题、填空题、计算题、证明题，并附有答案供练习时参考. 这样既有利于学生自查对知识点的掌握和理解，又有利于学生拓宽解题思路，使所学的知识能够融会贯通，可最大限度地满足学生的需求.

书中第一章、附录Ⅰ、附录Ⅱ由刘瑞芹编写，第二章由仓定帮编写，第三章由王涛编写，第四章由孙彩云编写，第五、六章由高艳辉编写，第七章由许璐编写，第八章由杨文光编写. 最后全书由贾敬主审.

由于水平有限，书中难免出现疏漏与不足，恳请广大读者提出宝贵意见.

编　者

2012 年 9 月

目　录

第一章　概率论的基本概念

§1　重要知识点

1. 样本空间和随机事件的概念

(1) 随机试验. 如果一个试验满足以下条件:在相同条件下可以重复进行,而每次试验的可能结果不止一个,但在进行一次试验之前却不能断言它出现哪个结果,则称这种试验为**随机试验**.

(2) 样本空间. 随机试验 E 的可能结果组成一个集合,称为样本空间,用 Ω 表示. 样本空间的元素(即每一个试验结果)称为**样本点**.

(3) 随机事件. 样本空间的子集称为随机试验 E 的随机事件,简称事件,用 $A,B,C,\cdots$ 表示. 不含有样本点的子集(即空集)称为**不可能事件**,用 $\varnothing$ 表示;含有一个样本点的子集称为基本事件,含有多个样本点的子集称为复合事件,含有所有样本点的子集(即样本空间 Ω)称为**必然事件**.

(4) 随机事件的发生. 若做一次随机试验,某一个随机事件中一个样本点出现了,就称该事件发生了.

2. 随机事件的关系和运算

(1) 子事件:若 A 发生则 B 发生,称 A 是 B 的子事件,记为 $A \subset B$. A 和 B 互为子事件称为相等,记为 $A = B$.

(2) 积事件:A 和 B 同时发生的事件称为 A 和 B 的积事件,记为 $A \cap B$ 或 AB. 若 $A \cap B = \varnothing$,则称 A 和 B 为互不相容事件.

(3) 和事件:A 或 B 发生的事件称为 A 和 B 的和事件,记为 $A \cup B$ 或 $A + B$.

(4) 差事件:A 发生 B 不发生的事件称为 A 和 B 的差事件,记为 $A - B$.

(5) 对立事件:若 $A \cap B = \varnothing$ 且 $A \cup B = \Omega$,则称 A 和 B 为对立事件,记为 $B = \overline{A}$.

(6) 事件的运算律:

交换律:$A \cup B = B \cup A$,$A \cap B = B \cap A$;

结合律:$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

分配律:$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

德·摩根律:$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

3. 随机事件的概率与性质

(1) 概率的公理化定义:

设 Ω 为样本空间,A 为事件,对每一个事件 A 都有一个实数 $P(A)$,若满足下列三个条件:

① $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

② $P(\Omega)=1$；

③ 对于两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots$ 有 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$，则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

(2) 概率的性质：

① $P(\varnothing)=0$；

② 对于两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$；

③ 若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$；

④ $P(A)\leqslant 1$；

⑤ $P(A)=1-P(\overline{A})$；

⑥ 对于事件 A 和 B，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

4. 随机事件概率的计算

(1) 古典概型：若随机试验的结果有有限个，且出现每一个结果的可能性是一样的，则称为古典概型. 随机事件 A 发生的概率为：

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点的个数}}{\Omega\text{ 中所含样本点的个数}}.$$

(2) 几何概型：$P(A)=\dfrac{A\text{ 所占区域的面积}}{\Omega\text{ 所占区域的面积}}$.

(3) 条件概率：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

(4) 随机事件 A 与 B 相互独立：$P(AB)=P(A)P(B)$.

三个事件 A,B,C 相互独立：$P(AB)=P(A)P(B),P(BC)=P(B)P(C),P(AC)=P(A)P(C),P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.

(5) 全概率公式和贝叶斯公式：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是样本空间的一个划分，B 为一个随机事件，则 $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i),P(A_i|B)=\dfrac{P(A_iB)}{P(B)}$.

(6) 伯努利概型：n 次实验相互独立，每次可能结果只有两个，事件 A 发生或不发生，$P(A)=p$，则 $P(\text{事件 }A\text{ 发生 }k\text{ 次})=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,\cdots,n$.

§ 2　主要考核点

本章中的基本概念、定理、公式较多，透彻地理解它们是复习好概率论的基础. 本章较为重要的考核内容包括：

(1) 概率的定义及其基本性质.

(2) 随机事件的关系与概率的运算.

(3) 条件概率与事件的独立性.

(4) 等可能概型问题.

(5) 全概率公式及贝叶斯公式.

§3　典型题型详解

1. 事件的关系和运算

例 1　在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的. 在使用的过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电. 以 E 表示事件"电炉断电"，设 $T_1 \leqslant T_2 \leqslant T_3 \leqslant T_4$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则 E 等于(　　).

(A) $\{T_1 \geqslant t_0\}$　　(B) $\{T_2 \geqslant t_0\}$　　(C) $\{T_3 \geqslant t_0\}$　　(D) $\{T_4 \geqslant t_0\}$

【分析】　"电炉断电"意味着至少两个显示的温度值 $\geqslant t_0$，一定是第三个温度值 $\geqslant t_0$.

解　选 C.

【评注】　事件的表示问题要注意理解事件本质的含义.

例 2　以 A 表示"甲种产品畅销，乙种产品滞销"，则 A 的对立事件 $\overline{A}$ 为：(　　).

(A)"甲种产品滞销，乙种产品畅销"

(B)"甲乙两种产品均畅销"

(C)"甲种产品滞销"

(D)"甲种产品滞销或乙种产品畅销"

【分析】　设出事件，由德·摩根律求出即可.

解　设 $B = \{$甲畅销$\}$，$C = \{$乙滞销$\}$，则 $A = B \cap C$.

由德·摩根律得：$\overline{A} = \overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C}$，即 $\overline{A} = \{$甲滞销或乙畅销$\}$，选择 D.

【评注】　设事件，找出事件之间的联系是解决这类题目的关键.

例 3　若事件 A、B、C 满足 $A \cup C = B \cup C$，则 $A = B$ 是否正确？

【分析】　主要考查的是和事件的运算，题目中事件是任意的，满足一定条件也成立.

解　设 $A \subset C$，$B \subset C$，$A \neq B$，满足 $A \cup C = B \cup C$，则 $A \neq B$，故不正确.

【评注】　特殊量代入是常用的解题方法，对一般满足的对特殊的也满足.

例 4　对于任意事件 A、B，与 $A \cup B = B$ 不等价的是：(　　).

(A) $A \subset B$　　(B) $\overline{B} \subset \overline{A}$　　(C) $A\overline{B} = \varnothing$　　(D) $\overline{A}B = \varnothing$

【分析】　做选择题时排除法是很重要的方法，而特殊量代入也是常用的手段.

解　设 $A = \varnothing$，$B = \Omega$，显然 $A \subset B$，排除 A；$\overline{A} = \Omega$，$\overline{B} = \varnothing$ 则 $\overline{B} \subset \overline{A}$，排除 B；$A\overline{B} = \varnothing$，排除 C；故选 D.

另解　设 $A \subset B$ 且 $B - A \neq \varnothing$，满足 $A \cup B = B$，则 $\overline{A}B = B - A \neq \varnothing$，故选 D.

【评注】　多种方法结合使用，做选择题较快.

例 5　设事件 A、B 是任意两个概率不为 0 的互不相容的事件，则下列结论中肯定正确的是：(　　).

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容　　(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

(C) $P(AB) = P(A)P(B)$　　(D) $P(A - B) = P(A)$

【分析】　利用差事件的概率计算公式和互不相容的条件计算.

解　因为 A、B 是任意两个概率不为 0 的互不相容的事件，则 $AB = \varnothing$，$A - B = A$，$P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(\varnothing) = P(A)$，故选 D.

【评注】　互不相容和相互独立一般情况下没有因果关系，但两个概率不为 0 的互不相

容的事件一定不独立.

例 6 设事件 A、B、C 两两独立,则相互独立的充要条件为:(　　).

(A) A 与 BC 独立　　(B) AB 与 $A\cup C$ 独立

(C) AB 与 AC 独立　　(D) $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

【分析】 事件 A、B、C 相互独立的充要条件除三个事件两两独立外还要满足 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$,只要验证哪个条件能推出该结果即可.

解 事件 A、B、C 相互独立 $\Leftrightarrow P(ABC)=P(A)P(BC)=P(A)P(B)P(C)$,故选 A.

【评注】 注意区别两两独立和相互独立两个概念.相互独立一定两两独立,反之未必.

例 7 将一枚硬币独立地掷两次,引进事件:$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$,$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$,$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$,$A_4=\{$正面出现两次$\}$,下列说法正确的是:(　　).

(A) A_1,A_2,A_3 相互独立　　(B) A_2,A_3,A_4 相互独立

(C) A_1,A_2,A_3 两两独立　　(D) A_2,A_3,A_4 两两独立

【分析】 按照相互独立与两两独立的定义进行验算即可,注意应先检查两两独立,若成立,再检验是否相互独立.

解 因为

$$P(A_1)=\frac{1}{2},P(A_2)=\frac{1}{2},P(A_3)=\frac{1}{2},P(A_4)=\frac{1}{4},$$

且

$$P(A_1A_2)=\frac{1}{4},P(A_1A_3)=\frac{1}{4},P(A_2A_3)=\frac{1}{4},$$

$$P(A_2A_4)=\frac{1}{4},P(A_1A_2A_3)=0,$$

可得

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2),P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3),$$
$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3),P(A_2A_4)\neq P(A_2)P(A_4),$$
$$P(A_1A_2A_3)\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

故 A_1,A_2,A_3 两两独立但不相互独立;A_2,A_3,A_4 不两两独立更不相互独立,应选 C.

【评注】 严格地说题中应假定硬币是均匀的,否则结论不一定成立.考查两两独立与相互独立的差异.

例 8 对于任意事件 A、B,下列说法正确的是:(　　).

(A) $AB\neq\varnothing$,则 A、B 一定独立　　(B) 若 $AB\neq\varnothing$,则 A、B 可能独立

(C) 若 $AB=\varnothing$,则 A、B 一定独立　　(D) 若 $AB=\varnothing$,则 A、B 一定不独立

【分析】 本题考查独立与互斥事件之间的关系,事实上,独立与互不相容事件之间没有必然的互推关系.互不相容 $\Leftrightarrow AB=\varnothing$,相互独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$.

解 $AB\neq\varnothing$ 推不出 $P(AB)=P(A)P(B)$,因此推不出 A、B 一定独立,排除 A;若 $AB=\varnothing$,则 $P(AB)=0$,但 $P(A)P(B)$ 是否为零不确定,因此 C,D 也不成立,故正确选项为 B.

【评注】 当 $P(A)\neq 0$,$P(B)\neq 0$ 时,若 A、B 相互独立,则一定有 $P(AB)=P(A)P(B)\neq 0$,从而有 $AB\neq\varnothing$.可见,当 A、B 相互独立时,往往 A、B 并不是互斥的.

2. 通过事件关系求概率

例 9　设事件 A、B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4,0.3 和 0.6,若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件,积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$ ________.

【分析】　利用差事件的概率就可以求出 $P(A\overline{B})$.

【评注】　利用文氏图可以直观理解 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$.

解　$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B)=0.6-0.3=0.3$.

【评注】　$P(A)=0.4$ 是多余的条件.

例 10　设事件 A 与事件 B 互不相容,则可得:(　　).

(A) $P(\overline{AB})=0$　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A)=1-P(B)$　　(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

【分析】　题目条件只知道互不相容,对于各个选项要逐一验证是否正确.

解　因为 A、B 互不相容,所以 $P(AB)=0$;

$P(\overline{AB})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$,因为 $P(A\cup B)$ 不一定等于1,所以 A 不正确.

当 $P(A)$,$P(B)$ 不为 0 时,B 不成立,故排除.

只有当 A,B 互为对立事件的时候才成立,故 C 排除.

$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1$,故 D 正确.

【评注】　逐一验证排除错误选项是做选择题常用方法,答案如唯一,验证到正确就行.

例 11　已知 A、B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$ 且 $P(A)=p$,则 $P(B)=$ ________.

【分析】　利用德·摩根律、对立事件、加法公式进行计算.

解　$P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$,

故 $P(A)+P(B)=1\Rightarrow P(B)=1-p$.

【评注】　概率的运算性质要综合运用.

例 12　已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{6}$,则事件 A、B、C 全不发生的概率为________.

【分析】　利用对立事件、加法公式进行计算.

解　因为 $ABC\subset AB$,由 $P(AB)=0\Rightarrow P(ABC)=0$.

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)\\
&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]\\
&=1-(\frac{1}{4}\times 3-0-\frac{1}{6}\times 2+0)=\frac{7}{12}.
\end{aligned}
$$

【评注】　广义加法公式也是重要的考试内容.

例 13　设 A、B 为随机事件,且 $B\subset A$,则下列式子正确的是:(　　).

(A) $P(A\cup B)=P(A)$　　(B) $P(AB)=P(A)$

(C) $P(B\mid A)=P(B)$　　(D) $P(B-A)=P(B)-P(A)$

【分析】　利用事件的包含关系计算.

解　$B\subset A\Rightarrow A\cup B=A$,故 A 正确.

【评注】　设 A、B 为随机事件,且 $B\subset A$,则必有 $P(AB)=P(B)$,$P(B\mid A)\geqslant P(B)$,

$P(B-A)=P(\varnothing)=0$.

例 14 设当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则(　　).

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C) $P(C)=P(AB)$　(D) $P(C)=P(A\cup B)$

【分析】 利用事件之间的关系和加法公式计算.

解 事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，即 $AB\subset C$.

$P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$，选 B.

【评注】 注意 $A\subset B\Rightarrow P(A)\leqslant P(B)$.

3. 古典概型和几何概型问题

例 15 从 0，1，2，…，9 等 10 个数字中任意选出 3 个不同数字，求下列事件的概率：A_1："三个数字中不含 0 与 5"；A_2："三个数字中含 0 但不含 5".

【分析】 三个数字不考虑顺序，按组合计算.

解 $P(A_1)=\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$，$P(A_2)=\dfrac{C_8^2}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{30}$.

【评注】 本题考查的是古典概率的计算.

例 16 将 C、C、E、E、I、N、S 这七个字母随机地排成一行，求恰好排成 SCIENCE 的概率.

【分析】 七个字母随机地排成一行与顺序有关，用排列计算.

解 $P=\dfrac{1\times2\times1\times2\times1\times1\times1}{7!}=\dfrac{1}{1\,260}$.

【评注】 这是常规的古典概率的计算.

例 17 一批产品有 10 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不再放回，求第二次抽出的是次品的概率.

【分析】 此问题用抽签原理、古典概型、全概公式都可以做.

解 方法一：由抽签原理直接填写 $\dfrac{1}{6}$.

方法二：利用古典概率计算 $P(A)=\dfrac{11\times2}{12\times11}=\dfrac{1}{6}$.

【评注】 两种方法都可以做，抽签原理简单.

例 18 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B、C 分别是将一枚骰子接连掷两次先后出现的点数，求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.

【分析】 B、C 是随机变量，有实根，即 $B^2-4C\geqslant0$；有重根，即 $B^2-4C=0$.

解 B、C 所有可能结果共 36 个，满足 $B^2-4C\geqslant0$ 的有：

B	1	2	3	4	5	6
$B^2-4C\geqslant0$	0	1	2	4	6	6
$B^2-4C=0$	0	1	0	1	0	0

$$p=\frac{1+2+4+6+6}{36}=\frac{19}{36}.$$

$$q=\frac{1+1}{36}=\frac{1}{18}.$$

【评注】 本题使用的是古典概率的方法，也可以使用事件的独立性求概率. 例如，$q=P(B^2=4C)=P(B=2,C=1)+P(B=4,C=4)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$，求 p 项数多一些.

例 19 从数 $1,2,\cdots,n$ 中任意取两数，求所取两数之和为偶数的概率.

【分析】 "两数之和为偶数"需两次所取数都是奇数或偶数.

解 设 $A_i(i=1、2)$ 表示第 i 次取到奇数，A 表示"两次的和为偶数"，则

$$P(A)=P(A_1A_2\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}).$$

当 n 为奇数时，$P(A)=\dfrac{\frac{n-1}{2}+1}{n}\cdot\dfrac{\frac{n-1}{2}}{n-1}+\dfrac{\frac{n-1}{2}}{n}\cdot\dfrac{\frac{n-1}{2}-1}{n-1}=\dfrac{n-1}{2n}$；

当 n 为偶数时，$P(A)=\dfrac{\frac{n}{2}}{n}\cdot\dfrac{\frac{n}{2}-1}{n-1}+\dfrac{\frac{n}{2}}{n}\cdot\dfrac{\frac{n}{2}-1}{n-1}=\dfrac{n-2}{2(n-1)}$.

【评注】 要注意讨论齐全，不要遗漏.

例 20 从 5 双不同的鞋子中，任取 4 只，求至少有 2 只鞋子能配成一双的概率.

【分析】 4 只中至少有 2 只配成一双，正面看包括一双和两双，从对立事件看就是 4 只鞋都是单只的，从不同角度理解就有不同的解法.

解 方法一：A 表示"4 只鞋子至少有两只能配成一双"，B 表示"4 只鞋子恰好有两只鞋子能配成一双"，C 表示"4 只鞋子恰好能配成两双"，则 $A=B\cup C$，如果从 5 双鞋中一次取出 4 只，则基本事件总数为 $C_{10}^4=210$. 有利于 B 的基本事件，可设想先从 5 双鞋中任取一双，再从余下的 4 双鞋中任取两双，然后从这两双中各取一只，$n_B=C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1$，同理 $n_C=C_5^2$，于是 $n_A=n_B+n_C=130$. 可得

$$P(A)=\frac{130}{210}=\frac{13}{21}.$$

说明：① 有利于 B 的基本事件，也可设想先从 5 双鞋中任取三双，然后取其中一双，再从余下的 2 双鞋各任取一只，$n_B=C_5^3C_3^2C_2^1C_2^1=120$.

还可以先取一双，再从剩余 4 双中任取两双，各取一只，$n_B=C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1=120$.

② 有利于 A 的基本事件，也可设想为先从 5 双鞋中任取一双，然后从剩下的 8 只鞋中任取 2 只，但此时"4 只鞋子恰好能配成两双"重复计算了一次，需减去. 故有 $n_A=C_5^1C_8^2-C_5^2=130$ 或 $n_A=C_5^1[C_8^2-C_4^1]=130$.

方法二：考虑 $\overline{A}=$"4 只鞋子中任何两只都不能配成一双"，有利于 $\overline{A}$ 的基本事件，可设想先从 5 双鞋中任取 4 双，再从 4 双鞋中各取一只，于是 $n_{\overline{A}}=C_5^1C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1=80$. 可得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{80}{210}=\frac{13}{21}.$$

方法三：设想从 5 双鞋中任取 4 只是逐一取出的，则基本事件总数为 $P_{10}^4=10\times9\times8\times7$. 有利于 $\overline{A}=$"4 只鞋子中任何两只都不能配成一双"的基本事件，可考虑先从 5 双 10 只鞋中任取一只（10 种取法），再从余下的 4 双 8 只鞋中任取一只（8 种取法），依次类推，可知 $n_{\overline{A}}=10\times8\times6\times4$. 可得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10\times 8\times 6\times 4}{10\times 9\times 8\times 7}=\frac{13}{21}.$$

错解　从5双中任取一双有C_5^1种取法，然后在余下的8只中任取两只共有C_8^2种取法，由乘法原理可知有利于A的总数为$C_5^1C_8^2$，故所求概率为：$P(A)=\frac{C_5^1C_8^2}{C_{10}^4}=\frac{2}{3}$.

方法四：$P(A)=\frac{C_5^1C_8^2-C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$.

【评注】　在计算古典概率时需要注意以下两点：① 计算中不要重复计数，也不要遗漏；② 一题多解是常见现象.

例 21　随机地向半圆$0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a为正常数）内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与x轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的概率为________.

【分析】　利用几何概型，算出原点和该点的连线与x轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的扇形面积与半圆面积相比.

解　如图1-1，所求面积为$S=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\pi a^2$.

$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\pi a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}=\frac{2+\pi}{2\pi}.$$

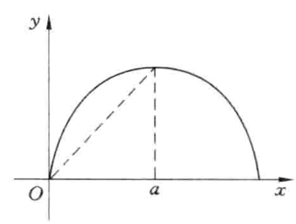

图 1-1

【评注】　计算面积时也可用定积分或二重积分计算.

例 22　在区间(0,1)中随机地取两个数，则这两个数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$的概率为________.

【分析】　根据题意可得两个随机变量服从区间(0,1)上的均匀分布，利用几何概型计算较为简便.

解　设所取的两个数分别为x和y，则以x为横坐标、以y纵坐标的点(x,y)随机地落在边长为1的正方形内.设事件A表示"所取两数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$"，则样本空间$\Omega=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$，事件$A$的样本点集合为区域$G$中所有的点，而$G=\left\{(x,y):0<x<1,0<y<1,|y-x|<\frac{1}{2}\right\}$.区域$\Omega$的面积$S_\Omega=1$，区域$G$的面积为：

$$S_G=S_\Omega-S_{G_1}-S_{G_2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

因此，$P(A)=\frac{S_G}{S_\Omega}=\frac{3}{4}$.

【评注】　本题也可先写出两个随机变量的概率密度，然后利用它们的独立性求得所求概率.

例 23　在平面上画出等距离$a(a>0)$的一些平行线，向平面上随机地投掷一根长$l(l<a)$的针，求针与任一平行线相交的概率.

【分析】　将问题归纳为几何概型再计算.

解　设 $A=$“针与某平行线相交”,针落在平面上的情况不外乎图 1-2 中所示的几种情况.

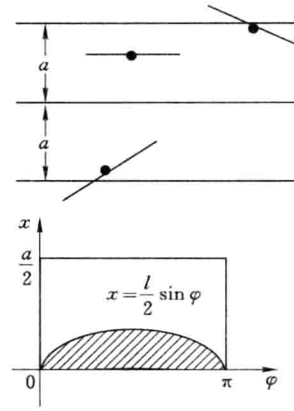

图 1-2

设 x 为针的中点到最近的一条平行线的距离,φ 为针与平行线的夹角,则有:$0<x<\dfrac{a}{2}$,$0<\varphi<\pi$,不等式确定了平面上的一个区域 S.

A 发生 $\Leftrightarrow x\leqslant \dfrac{l}{2}\sin\varphi$,不等式确定 S 的子域 A.

故
$$P(A)=\frac{1}{\frac{a}{2}\pi}\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{2l}{a\pi}.$$

【评注】　找到 A 子域是问题的关键.

4. 利用条件概率和事件独立性计算概率

例 24　已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$,随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$,及条件概率 $P(B|A)=0.8$,则和事件 $A\cup B$ 的概率 $P(A\cup B)=$ ________.

【分析】　利用乘法公式先求出 $P(AB)$,再利用加法公式求出即可.

解　因为　$P(AB)=P(A)P(B|A)=0.5\times0.8=0.4$,所以
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7.$$

【评注】　考查加法公式和乘法公式.

例 25　已知 $0<P(B)<1$,且 $P(A_1+A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$,则下列选项成立的是:(　　).

(A) $P(A_1+A_2|\overline{B})=P(A_1|\overline{B})+P(A_2|\overline{B})$

(B) $P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

(C) $P(A_1+A_2)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$

(D) $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

【分析】　应用条件概率公式将已知条件变形,再用概率的性质即可.

解　因为
$$P(A_1+A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$$
所以
$$\frac{P[(A_1+A_2)B]}{P(B)}=\frac{P(A_1B)}{P(B)}+\frac{P(A_2B)}{P(B)}.$$

由 $0 < P(B) < 1$，两边消去 $P(B)$ 得：

$P[(A_1 + A_2)B] = P(A_1B + A_2B) = P(A_1B) + P(A_2B)$，故选择 B.

【评注】 在 D 中貌似全概率公式，但 A_1、A_2 未必是完备事件组.

例 26 已知 A、B 为两个随机事件，已知 $P(\overline{A}) = 0.4$，$P(B) = 0.5$，$P(A|\overline{B}) = 0.8$，求 $P(A|B)$.

【分析】 利用条件概率的计算公式需要求出 $P(AB)$，再用差事件的概率公式去求.

解 由 $P(A\overline{B}) = P(\overline{B})P(A|\overline{B}) = 0.4 = P(A) - P(AB)$ 得，$P(AB) = 0.2$，

故
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4.$$

【评注】 要注意综合应用计算公式.

例 27 设 A、B、C 是随机事件，A、C 互不相容，$P(AB) = \frac{1}{2}$，$P(C) = \frac{1}{3}$，则 $P(AB|\overline{C}) =$ ________.

【分析】 利用条件概率的计算公式和差事件的概率公式即可.

解
$$P(AB|\overline{C}) = \frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})},$$
$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

A、C 互不相容，则 $AC = \varnothing \Rightarrow ABC = \varnothing$.

$$P(AB\overline{C}) = P(AB) - P(ABC) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2},$$
$$P(AB|\overline{C}) = \frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{3}{4}.$$

【评注】 在条件概率的计算公式中，事件是任意事件.

例 28 设 A、B 是随机事件，且 $0 < P(A) < 1$，$P(B) > 0$，$P(B|A) = P(B|\overline{A})$ 则必有：(　　).

(A) $P(B|A) = P(\overline{A}|B)$

(B) $P(A|B) \neq P(\overline{A}|B)$

(C) $P(AB) = P(A)P(B)$

(D) $P(AB) \neq P(A)P(B)$

【分析】 利用条件概率的计算公式推导.

解
$$P(B|A) = P(B|\overline{A}),$$
$$\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(\overline{A}B)}{1 - P(A)},$$
$$P(AB)[1 - P(A)] = P(A)P(\overline{A}B) = P(A)[P(B) - P(AB)],$$

所以 $P(AB) = P(A)P(B)$. 故选 C.

【评注】 从条件推结果是做选择题常用的方法.

例 29 设 A、B 是任意事件，其中 A 的概率不等于 0 和 1，则证明 $P(B|A) = P(B|\overline{A})$ 是事件 A 与 B 独立的充分必要条件.

【分析】 由独立性的概念只要证 $P(B|A) = P(B|\overline{A}) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.

证明：必要性：

由事件 A 与 B 独立，知事件 $\overline{A}$ 与 B 独立，则

$$P(B|A)=P(B),P(B|\overline{A})=P(B).$$

故
$$P(B|A)=P(B|\overline{A}).$$

充分性：

$$P(B|A)=P(B|\overline{A})\Rightarrow\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}\Rightarrow P(AB)P(\overline{A})=P(\overline{A}B)P(A)$$

$$\Rightarrow P(AB)[1-P(A)]=[P(B)-P(AB)]P(A)\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B).$$

所以事件 A 与 B 独立.

【评注】 充分必要条件要从两个方面推证.

例 30 设两两相互独立的三事件 A、B、C 满足 $ABC=\varnothing$，$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则 $P(A)=$ ________.

【分析】 利用广义加法公式和独立性可以求出 $P(A)$.

解 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.

两两相互独立得 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$.

由 $ABC=\varnothing$ 得 $P(ABC)=0$，则

$$\frac{9}{16}=3P(A)-3\left(P(A)\right)^2\Rightarrow P(A)=\frac{1}{4}\text{或}\frac{3}{4}.$$

由 $P(A)<\frac{1}{2}$ 得 $P(A)=\frac{1}{4}$.

【评注】 题中 $P(A)<\frac{1}{2}$ 可以去掉. 事实上，假设 $P(A)=\frac{3}{4}\geqslant\frac{9}{16}=P(A\cup B\cup C)$，自相矛盾.

例 31 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$ ________.

【分析】 利用对立事件的概率和独立性可以求出 $P(A)$.

解 由 A 和 B 相互独立知：$\overline{A}$ 和 $\overline{B}$，A 和 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 和 B 也独立.

$$P(A\overline{B})=P(B\overline{A})\Rightarrow P(A)P(\overline{B})=P(B)P(\overline{A}),$$

$$P(A)[1-P(B)]=P(B)[1-P(A)]\Rightarrow P(A)=P(B),$$

$$P(\overline{AB})=P(\overline{A})P(\overline{B})=[1-P(A)]^2=\frac{1}{9}\Rightarrow P(A)=\frac{2}{3}.$$

【评注】 A 和 B 相互独立与 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$，A 和 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 和 B 相互独立是等价的.

例 32 为了防止意外事故，在矿内同时安装两种报警系统 A 和 B，每种系统单独使用时，其有效概率 A 为 0.92，B 为 0.93，在 A 失灵的条件下 B 有效概率为 0.85，求：(1) 发生意外时，这两种报警系统至少有一个有效的概率；(2) 在 B 失灵条件下，A 有效的概率.

【分析】 "至少有一个有效"为 $A\cup B$，"在 B 失灵条件下，A 有效"为条件概率.

解 令 A 表示"系统 A 有效"，B 表示"系统 B 有效".

已知 $P(A)=0.92$，$P(B)=0.93$，则 $P(B|\overline{A})=0.85$.

对问题(1) 所要求的概率为：