



普通高等教育“十二五”规划教材

大学数学教学丛书

# 微积分 (下册) (第二版)

主 编 张 琴  
编 者 朱立勋 闫 厉  
单国栋 张志尚

经管类



科学出版社

014060317

0172-43

69-2

V2

普通高等教育“十二五”规划教材

大学数学教学丛书

# 微积分(经管类)

(下 册)(第二版)

主 编 张 琴

编 者 朱立勋 闫 厉

单国栋 张志尚



科 学 出 版 社

北 京



北航

C1747470

0172-43

69-2

V2

## 内 容 简 介

本书由一线数学教师结合多年的教学实践编写而成. 全书把微积分和相关经济学知识有机结合, 内容的深度和广度与经济类、管理类各专业微积分教学要求相符.

全书分上、下两册, 共 12 章. 本书是下册, 内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程、MATLAB 在微积分中的应用. 各节均配有一定量的习题, 章末附有自测题, 书后附有习题答案.

本书可供普通高等院校经济类、管理类各专业及相关专业教学使用, 也可供学生自学.

### 图书在版编目(CIP)数据

微积分(经管类)下册/张琴主编. —2 版. —北京: 科学出版社, 2014.8  
普通高等教育“十二五”规划教材·大学数学教学丛书  
ISBN 978-7-03-041403-8

I. 微… II. 张… III. 微积分-高等学校-教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 159631 号

责任编辑: 张中兴 / 责任校对: 朱光兰  
责任印制: 阎 磊 / 封面设计: 迷底书装

**科学出版社** 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

保定市**中画美凯印刷有限公司** 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2010 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2014 年 8 月第 二 版 印张: 17 1/2

2014 年 8 月第七次印刷 字数: 352 000

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 目 录

|                        |    |
|------------------------|----|
| 第 7 章 空间解析几何与向量代数      | 1  |
| §7.1 空间直角坐标系           | 1  |
| 7.1.1 空间直角坐标系的概念       | 1  |
| 7.1.2 空间中点的坐标          | 2  |
| 7.1.3 空间中两点的距离公式       | 2  |
| §7.2 向量及其线性运算          | 3  |
| 7.2.1 向量的概念            | 3  |
| 7.2.2 向量的线性运算          | 4  |
| 7.2.3 利用坐标作向量的线性运算     | 6  |
| 7.2.4 向量的模、方向角、投影      | 7  |
| 习题 7.2                 | 9  |
| §7.3 数量积 向量积 * 混合积     | 9  |
| 7.3.1 数量积 (点积、内积)      | 9  |
| 7.3.2 向量积 (叉积、外积)      | 12 |
| *7.3.3 混合积             | 14 |
| 习题 7.3                 | 15 |
| §7.4 平面及其方程            | 15 |
| 7.4.1 平面的点法式方程         | 15 |
| 7.4.2 平面的一般方程          | 17 |
| 7.4.3 两平面的夹角           | 18 |
| 7.4.4 点到平面的距离          | 20 |
| 习题 7.4                 | 21 |
| §7.5 空间直线及其方程          | 21 |
| 7.5.1 空间直线的一般方程        | 21 |
| 7.5.2 空间直线的对称式方程与参数式方程 | 21 |
| 7.5.3 两直线的夹角           | 22 |
| 7.5.4 直线与平面的夹角         | 23 |

|                    |    |
|--------------------|----|
| 习题 7.5             | 25 |
| §7.6 曲面及其方程        | 25 |
| 7.6.1 曲面方程的概念      | 25 |
| 7.6.2 旋转曲面         | 27 |
| 7.6.3 柱面           | 29 |
| 7.6.4 二次曲面         | 30 |
| 习题 7.6             | 33 |
| §7.7 空间曲线及其方程      | 33 |
| 7.7.1 空间曲线的一般方程    | 33 |
| 7.7.2 空间曲线的参数方程    | 34 |
| *7.7.3 曲面的参数方程     | 36 |
| 7.7.4 空间曲线在坐标面上的投影 | 37 |
| 习题 7.7             | 38 |
| 章末自测 7             | 39 |
| 第 8 章 多元函数微分学      | 42 |
| §8.1 多元函数的基本概念     | 42 |
| 8.1.1 多元函数的概念      | 42 |
| 8.1.2 二元函数的极限与连续   | 44 |
| 习题 8.1             | 46 |
| §8.2 偏导数           | 47 |
| 8.2.1 偏导数的概念       | 47 |
| 8.2.2 二阶偏导数        | 50 |
| 8.2.3 偏导数在经济学中的应用  | 53 |
| 习题 8.2             | 54 |
| §8.3 全微分           | 55 |
| 8.3.1 全微分的概念       | 55 |
| 8.3.2 全微分在近似计算中的应用 | 57 |
| 习题 8.3             | 59 |
| §8.4 多元复合函数求导法则    | 59 |
| 8.4.1 多元复合函数的求导法则  | 59 |
| 8.4.2 全微分形式不变性     | 64 |
| 习题 8.4             | 65 |

|                        |     |
|------------------------|-----|
| §8.5 隐函数的求导法则          | 66  |
| 8.5.1 一个方程确定的隐函数的求导法则  | 66  |
| 8.5.2 一个方程组确定的隐函数的求导法则 | 68  |
| 习题 8.5                 | 70  |
| §8.6 二元函数的极值和最值        | 71  |
| 8.6.1 二元函数的极值          | 71  |
| 8.6.2 条件极值             | 74  |
| 8.6.3 拉格朗日乘数法          | 75  |
| 习题 8.6                 | 77  |
| 章末自测 8                 | 78  |
| 第 9 章 重积分              | 83  |
| §9.1 二重积分的概念与性质        | 83  |
| 9.1.1 二重积分的概念          | 83  |
| 9.1.2 二重积分的性质          | 86  |
| §9.2 二重积分的计算           | 87  |
| 9.2.1 直角坐标系下二重积分的计算    | 87  |
| 9.2.2 极坐标系下二重积分的计算     | 93  |
| 习题 9.2                 | 96  |
| 章末自测 9                 | 98  |
| 第 10 章 无穷级数            | 102 |
| §10.1 常数项级数的概念与性质      | 102 |
| 10.1.1 常数项级数的概念        | 102 |
| 10.1.2 收敛级数的基本性质       | 106 |
| 10.1.3 收敛级数的必要条件       | 108 |
| 习题 10.1                | 109 |
| §10.2 正项级数及其审敛法        | 110 |
| 10.2.1 正项级数的概念         | 110 |
| 10.2.2 正项级数的审敛法        | 110 |
| 习题 10.2                | 118 |
| §10.3 任意项级数            | 118 |
| 10.3.1 交错级数            | 119 |
| 10.3.2 绝对收敛与条件收敛       | 121 |

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| 习题 10.3                       | 124 |
| §10.4 幂级数                     | 124 |
| 10.4.1 函数项级数                  | 124 |
| 10.4.2 幂级数及其收敛性               | 125 |
| 10.4.3 幂级数的运算和性质              | 129 |
| 习题 10.4                       | 134 |
| §10.5 函数的幂级数展开                | 134 |
| 10.5.1 泰勒级数                   | 134 |
| 10.5.2 函数展开成幂级数               | 136 |
| 10.5.3 函数展开成幂级数的应用            | 141 |
| 习题 10.5                       | 143 |
| 章末自测 10                       | 144 |
| 第 11 章 微分方程与差分方程              | 147 |
| §11.1 微分方程                    | 147 |
| 11.1.1 引例                     | 147 |
| 11.1.2 微分方程的基本概念              | 148 |
| 习题 11.1                       | 151 |
| §11.2 可分离变量方程与齐次方程            | 152 |
| 11.2.1 可分离变量方程                | 152 |
| 11.2.2 齐次方程                   | 154 |
| 习题 11.2                       | 157 |
| §11.3 一阶线性微分方程                | 157 |
| 11.3.1 一阶线性微分方程的概念            | 157 |
| *11.3.2 伯努利方程                 | 162 |
| 习题 11.3                       | 164 |
| §11.4 可降阶的高阶微分方程              | 165 |
| 11.4.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型微分方程 | 165 |
| 11.4.2 $y'' = f(x, y')$ 型微分方程 | 166 |
| 11.4.3 $y'' = f(y, y')$ 型微分方程 | 167 |
| 习题 11.4                       | 169 |
| §11.5 线性微分方程解的性质与解的结构         | 169 |
| 11.5.1 二阶线性齐次方程解的结构           | 170 |

|                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------|-----|
| 11.5.2 线性非齐次方程解的结构                                                       | 171 |
| 习题 11.5                                                                  | 172 |
| §11.6 二阶常系数齐次线性微分方程                                                      | 172 |
| 习题 11.6                                                                  | 176 |
| §11.7 二阶常系数非齐次线性微分方程                                                     | 176 |
| 11.7.1 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 型                                    | 176 |
| 11.7.2 $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$ 型 | 180 |
| 习题 11.7                                                                  | 182 |
| §11.8 差分方程                                                               | 183 |
| 11.8.1 差分的一般概念                                                           | 183 |
| 11.8.2 差分方程的一般概念                                                         | 185 |
| 11.8.3 一阶常系数线性差分方程                                                       | 186 |
| 11.8.4 二阶常系数线性差分方程及其解的性质                                                 | 190 |
| 11.8.5 二阶常系数线性齐次差分方程的解                                                   | 190 |
| 11.8.6 二阶常系数线性非齐次差分方程的解法                                                 | 192 |
| 习题 11.8                                                                  | 194 |
| §11.9 微分方程和差分方程的应用                                                       | 195 |
| 11.9.1 一阶微分方程的应用                                                         | 195 |
| 11.9.2 二阶微分方程的应用                                                         | 202 |
| 11.9.3 微分方程在经济中的应用                                                       | 209 |
| 11.9.4 差分方程在经济中的应用                                                       | 211 |
| 习题 11.9                                                                  | 213 |
| 章末自测 11                                                                  | 213 |
| 第 12 章 MATLAB 在微积分中的应用                                                   | 216 |
| §12.1 MATLAB 基础                                                          | 216 |
| §12.2 MATLAB 在一元函数微分学中的应用                                                | 221 |
| 12.2.1 应用 MATLAB 求一元函数的极限                                                | 221 |
| 12.2.2 应用 MATLAB 求一元函数的导数与微分                                             | 222 |
| 12.2.3 一元函数微分学的应用在 MATLAB 中实现                                            | 224 |
| §12.3 MATLAB 在一元函数积分学中的应用                                                | 229 |
| 12.3.1 应用 MATLAB 求一元函数的不定积分与定积分                                          | 229 |
| 12.3.2 一元函数的积分学的应用在 MATLAB 中实现                                           | 233 |

|        |                            |     |
|--------|----------------------------|-----|
| §12.4  | MATLAB 在多元函数微积分学中的应用       | 236 |
| 12.4.1 | 应用 MATLAB 求多元函数的极限、偏导数与全微分 | 236 |
| 12.4.2 | 多元函数微分学的应用在 MATLAB 中的实现    | 237 |
| 12.4.3 | 应用 MATLAB 计算二重积分           | 241 |
| §12.5  | MATLAB 在级数和微分方程中的应用        | 243 |
| 12.5.1 | 应用 MATLAB 求级数的和及判别级数的敛散性   | 243 |
| 12.5.2 | 应用 MATLAB 求函数的泰勒展开式        | 245 |
| 12.5.3 | 求解微分方程在 MATLAB 中实现         | 245 |
| 12.5.4 | 应用 MATLAB 绘图               | 246 |
| 习题答案   |                            | 250 |
| 参考文献   |                            | 272 |

## 第7章 空间解析几何与向量代数

自然界中的很多量既有大小、又有方向, 对它们进行抽象、研究和发展, 就得到了数学中的向量. 向量在自然科学与工程技术中有着广泛的应用, 是一种重要的数学工具. 平面解析几何使一元函数的微积分有了直观的几何意义; 相应的, 为了学习多元函数的微积分, 必须先学习空间解析几何的知识.

本章首先介绍空间直角坐标系, 进而引进向量的概念, 然后利用向量学习平面的方程和直线的方程及其解法, 最后介绍空间曲面方程的基本概念、空间曲线的基本概念, 使学生完成从二维到三维的思维跨越.

### §7.1 空间直角坐标系

#### 7.1.1 空间直角坐标系的概念

为了确定平面上任意一点的位置, 我们建立了平面直角坐标系. 现在, 为了确定空间任意一点的位置, 相应的就要引入空间直角坐标系.

在空间中任意取定一点  $O$  (称为原点), 过  $O$  点作三条两两垂直的直线, 就确定了三条都以  $O$  为原点的两两垂直的数轴 (有刻度和单位长度), 依次记作  $x$  轴 (横轴)、 $y$  轴 (纵轴)、 $z$  轴 (竖轴), 统称为坐标轴. 它们构成一个直角坐标系, 称为  $Oxyz$  坐标系 (图 7-1-1). 具体作图时, 通常把  $x$  轴和  $y$  轴配置在水平面上, 而  $z$  轴则是铅垂线. 按要求, 它们的三个正方向之间符合右手规则: 即右手握住  $z$  轴, 当右手的四个手指从  $x$  轴的正向以  $90^\circ$  角度转向  $y$  轴的正向时, 大拇指的指向就是  $z$  轴的正向.

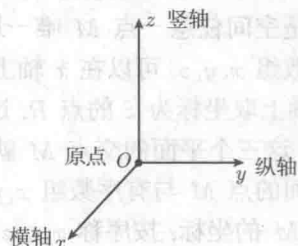


图 7-1-1

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面, 这三个平面统称为坐标面.  $x$  轴和  $y$  轴所确定的坐标面称为  $xOy$  面, 另两个面由  $y$  轴及  $z$  轴和  $z$  轴及  $x$  轴所确定的坐标面分别称为  $yOz$  面及  $zOx(xOz)$  面.

三个坐标面把空间分成八个部分, 每一个部分称为一个卦限. 包含  $x$  轴和  $y$  轴及  $z$  轴的正半轴的那个卦限称为第一卦限; 第二卦限、第三卦限、第四卦限, 同样在  $xOy$  面的上方, 按逆时针方向 (视线在  $z$  轴正方向) 确定. 第五至第八卦限, 在

$xOy$  面的下方, 在第一卦限之下的部分称为第五卦限, 其他第六、第七、第八卦限同样按逆时针方向确定. 这八个卦限分别由字母 I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII 表示, 如图 7-1-2 所示.

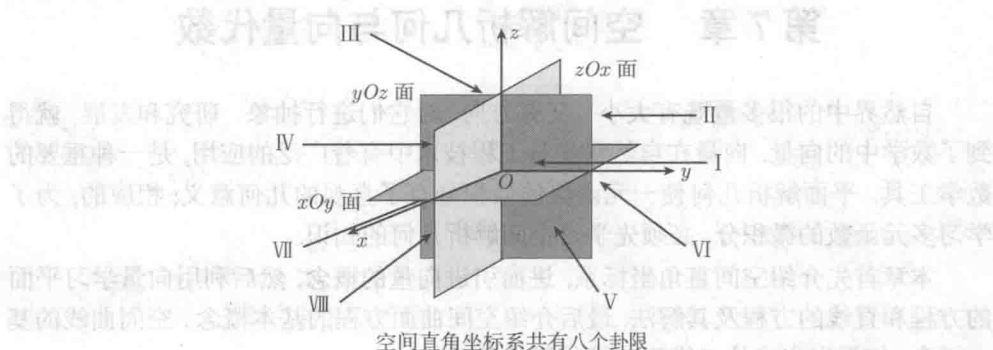


图 7-1-2

总结: 空间直角坐标系的核心知识可以概括为 1, 3, 3, 8. 即: 一个原点; 三条坐标轴; 三个坐标面; 八个卦限.

### 7.1.2 空间中点的坐标

设  $M$  是空间中的任意一点, 过  $M$  作三个平面分别垂直于  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴, 并和  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴分别交于  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  三点. 点  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  分别称为点  $M$  在  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴上的投影. 设这三个投影在  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴上的坐标依次为  $x, y, z$ . 于是空间任意一点  $M$  唯一地确定了一个有序数组  $x, y, z$ . 反过来, 对于给定的有序数组  $x, y, z$ , 可以在  $x$  轴上取坐标为  $x$  的点  $P$ , 在  $y$  轴上取坐标为  $y$  的点  $Q$ , 在  $z$  轴上取坐标为  $z$  的点  $R$ , 过点  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  分别作垂直于  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的三个平面, 这三个平面的交点  $M$  就是有序数组  $x, y, z$  确定的唯一一点 (图 7-1-2). 这样, 空间的点  $M$  与有序数组  $x, y, z$  之间就建立了一一对应的关系. 这组数  $x, y, z$  称为点  $M$  的坐标, 按序称  $x, y, z$  为点  $M$  的横坐标、纵坐标、竖坐标, 并把点  $M$  记为  $M(x, y, z)$ .

### 7.1.3 空间中两点的距离公式

设  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  为空间两点, 则

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

**例 7-1-1** 求证以  $M_1(4, 3, 1)$ ,  $M_2(7, 1, 2)$ ,  $M_3(5, 2, 3)$  三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解 因为

$$|M_1M_2|^2 = (7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2 = 14,$$

$$|M_2M_3|^2 = (5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2 = 6,$$

$$|M_3M_1|^2 = (4-5)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2 = 6,$$

所以  $|M_2M_3| = |M_3M_1|$ , 即  $\triangle M_1M_2M_3$  为等腰三角形.

例 7-1-2 在  $z$  轴上求与两点  $A(-4, 1, 7)$  及  $B(3, 5, -2)$  等距离的点.

解 因为所求点在  $z$  轴上, 所以设该点为  $M(0, 0, z)$ , 依题意有

$$|MA| = |MB|,$$

即

$$\begin{aligned} & \sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} \\ &= \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2 + (-2-z)^2}, \end{aligned}$$

两边去根号, 解得

$$z = \frac{14}{9}.$$

所以, 所求点为  $M\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$ .

## §7.2 向量及其线性运算

### 7.2.1 向量的概念

客观世界中有这样一类量, 它们既有大小, 又有方向, 如位移、速度、加速度、力等, 这样一类既有大小又有方向的量则称为向量(或矢量).

数学中用一条有向线段来表示向量, 向量的表示符号是  $\boldsymbol{a}$  或  $\overrightarrow{M_1M_2}$  (以  $M_1$  为起点、 $M_2$  为终点的有向线段, 见图 7-2-1. 有向线段的长度表示向量的大小, 向量的大小则称为向量的模, 向量  $\boldsymbol{a}$  或  $\overrightarrow{M_1M_2}$  的模依次记作  $|\boldsymbol{a}|$  或  $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ . 模为 1 的向量则称为单位向量, 记作  $|\boldsymbol{a}^0|$  或  $|\overrightarrow{M_1M_2^0}|$ .

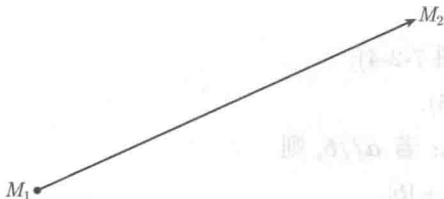


图 7-2-1

模长为 0 的向量则称为零向量, 记为  $0$ . 零向量的起点和终点重合, 它的方向可以看做是任意的.

数学中我们只研究与起点无关的向量, 不考虑起点位置的向量则称为自由向量(简称向量). 如果遇到起点位置有关的向量, 在一般的原则下做特殊处理.

如果两个向量  $a$  与  $b$  大小相等, 且方向相同, 则称向量  $a$  与  $b$  是相等的, 记作  $a = b$ . 由于我们只讨论自由向量, 经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

如果两个向量  $a$  与  $b$  大小相等但方向相反, 则称向量  $b$  是向量  $a$  的负向量, 记作  $a = -b$ . 空间直角坐标系中任一点与原点构成的向量称为向径. 两个非零向量  $a$  与  $b$  方向相同或相反的向量称为向量  $a$  与  $b$  平行, 记作  $a // b$  (可认为零向量与任何向量平行).

### 7.2.2 向量的线性运算

#### 1. 向量的加法

设两个向量  $a$  与  $b$ , 则  $a + b$  可以由下列两种方式 (法则) 表示 (本质是一样的):

(1) 平行四边形法则 (类似力学上求合力的平行四边形法则)  $a + b = c$ , 见图 7-2-2;

(2) 三角形法则  $a + b = c$ , 见图 7-2-3.

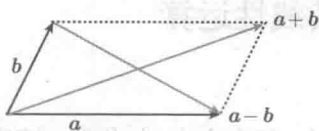


图 7-2-2

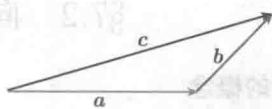


图 7-2-3

向量的加法符合下列运算规律:

- (1) 交换律  $a + b = b + a$ ;
- (2) 结合律  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

#### 2. 向量的减法

$(a + b) - b = a$  (图 7-2-4);

$a - b = c$  (图 7-2-5).

注意减法特殊情况: 若  $a // b$ , 则

- (1) 同向:  $|c| = |a| + |b|$ .
- (2) 反向:  $|c| = |a| - |b|$ .

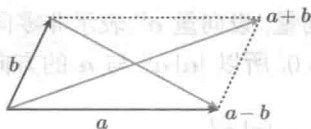


图 7-2-4

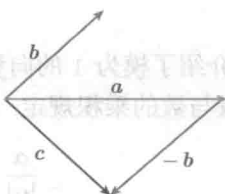


图 7-2-5

由于三角形两边之和大于第三边, 结合向量运算法则可得如下结论:

$$|a+b| \leq |a|+|b|, \quad |a-b| \leq |a|+|b|.$$

### 3. 向量与数的乘法

设  $\lambda$  是一个数, 向量  $a$  与  $\lambda$  的乘积记作  $\lambda a$ . 规定  $\lambda a$  为一个向量, 它的模和方向有如下情况 (图 7-2-6):

- (1) 当  $\lambda > 0$  时,  $\lambda a$  与  $a$  同向,  $|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$ ;
- (2) 当  $\lambda = 0$  时,  $\lambda a = 0$ ;
- (3) 当  $\lambda < 0$  时,  $\lambda a$  与  $a$  反向,  $|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$ .

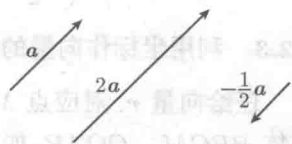


图 7-2-6

### 4. 数与向量的乘积的运算律

数与向量的乘积符合下列运算规律:

- (1) 结合律:  $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$ .
- (2) 分配律:  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ ,  $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ .

向量相加、减及数乘向量统称为向量的线性运算.

### 5. 两个向量的平行关系

两个向量的平行关系由下面定理描述.

**定理 7-2-1** 设向量  $a \neq 0$ , 那么, 向量  $b$  平行于向量  $a$  的充分必要条件是: 存在唯一的实数  $\lambda$ , 使  $b = \lambda a$ .

**证明** 条件的充分性显然, 下面证明条件的必要性.

设  $a // b$ , 取  $|\lambda| = \frac{|b|}{|a|}$ , 当  $a$  与  $b$  同向时  $\lambda$  取正值, 当  $a$  与  $b$  反向时  $\lambda$  取负值, 即有  $b = \lambda a$ . 这是因为此时  $b$  与  $\lambda a$  同向, 且

$$|\lambda a| = |\lambda| |a| = \frac{|b|}{|a|} |a| = |b|.$$

再证数  $\lambda$  的唯一性. 设  $b = \lambda a$ , 又设  $b = \mu a$ , 两式相减, 得  $(\lambda - \mu)a = 0$ , 即  $|\lambda - \mu||a| = 0$ . 因  $|a| \neq 0$ , 故  $|\lambda - \mu| = 0$ , 即  $\lambda = \mu$ .

定理证毕.

前面已经介绍了模为 1 的向量为单位向量, 设向量  $a^0$  表示非零向量  $a$  的单位向量, 按照向量与数的乘积规定, 由于  $|a| > 0$ , 所以  $|a|a^0$  与  $a$  的方向相同. 所以

$$\frac{a}{|a|} = a^0 \Rightarrow a = |a|a^0.$$

上式表明: 一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

**例 7-2-1** 化简  $a - b + 5\left(-\frac{1}{2}b + \frac{b-3a}{5}\right)$ .

**解**  $a - b + 5\left(-\frac{1}{2}b + \frac{b-3a}{5}\right) = a - b + \left(-\frac{5}{2}\right)b + b - 3a = -2a - \frac{5}{2}b$ .

### 7.2.3 利用坐标作向量的线性运算

任给向量  $r$ , 对应点  $M$ , 使  $r = \overrightarrow{OM}$ . 以  $OM$  为对角线、三条坐标轴为棱作长方体  $RBCM - OQAP$ , 如图 7-2-7 所示.

由此可有向量的坐标表示:  $r = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$ . 设  $\overrightarrow{OP} = xi$ ,  $\overrightarrow{OQ} = yj$ ,  $\overrightarrow{OR} = zk$ , 则  $r = \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk$ .

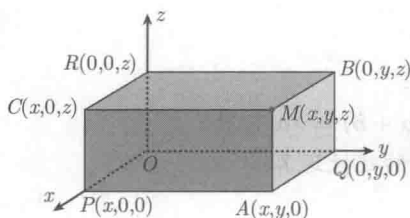


图 7-2-7

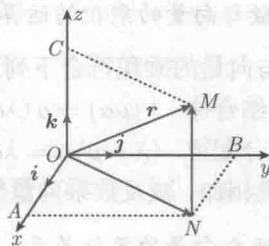


图 7-2-8

上式称为向量  $r$  的坐标分解式,  $xi, yj, zk$  称为三个坐标轴方向的分向量.  $i, j, k$  称为三个坐标轴方向的单位分向量, 见图 7-2-8.

$$a = (a_x, a_y, a_z), \quad b = (b_x, b_y, b_z) \quad (\lambda \text{ 为实数}),$$

$$a \pm b = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z),$$

$$\lambda a = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

当  $a \neq 0$  时

$$b // a \Leftrightarrow b = \lambda a$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}.$$

例 7-2-2 求解以向量为未知元的线性方程组  $\begin{cases} 5x-3y=a, \\ 3x-2y=b, \end{cases}$  其中  $a=(2,1,2)$ ,  $b=(2,2,1)$ .

解

$$x = 2a - 3b = 2(2, 1, 2) - 3(2, 2, 1) = (-2, -4, 1),$$

$$y = 3a - 5b = 3(2, 1, 2) - 5(2, 2, 1) = (-4, -7, 1).$$

#### 7.2.4 向量的模、方向角、投影

##### 1. 向量的模

设  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  为空间两点, 则

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

##### 2. 方向角与方向余弦

记  $\overrightarrow{OA} = a$ ,  $\overrightarrow{OB} = b$ ,  $\varphi = \angle AOB$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ) 称为向量  $a, b$  的夹角, 记作  $(a, b) = \varphi$  (图 7-2-9).

$r$  和  $i, j, k$  所成的角, 称为  $r$  的方向角, 依次记为  $\alpha, \beta, \gamma$  (图 7-2-10). 方向角的余弦称为其方向余弦.

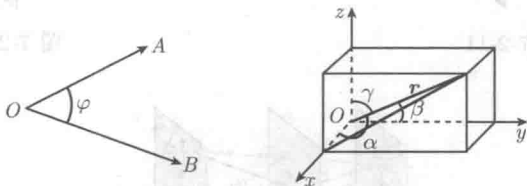


图 7-2-9

图 7-2-10

简单分析可得

$$\cos \alpha = \frac{x}{|r|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{|r|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{|r|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

方向余弦的性质

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

向量  $r$  的单位向量

$$r^0 = \frac{r}{|r|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

**例 7-2-3** 已知两点  $M_1(2, 2, \sqrt{2})$  和  $M_2(1, 3, 0)$ , 计算向量  $\overrightarrow{M_1M_2}$  的模、方向余弦和方向角.

解

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1 - 2, 3 - 2, 0 - \sqrt{2}) = (-1, 1, -\sqrt{2}),$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 1 + 2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \frac{1}{2}, \quad \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{3\pi}{4}.$$

### 3. 空间一向量在轴上的投影

设点  $O$  及单位向量  $e$ , 确定  $u$  轴. 任给向量  $\overrightarrow{OM} = r$ , 点  $M'$  是点  $M$  在  $u$  轴上的投影, 则向量  $\overrightarrow{OM'}$  称为向量  $r$  在  $u$  轴上的分向量 (图 7-2-11). 设  $\overrightarrow{OM'} = \lambda e$ , 则数值  $\lambda$  称为  $r$  在  $u$  轴上的投影 (图 7-2-12), 记作  $\text{Prj}_u r$ .

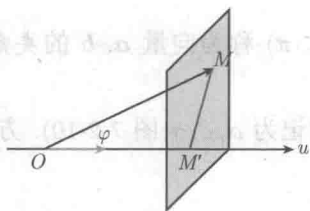


图 7-2-11

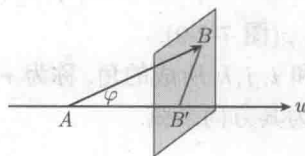


图 7-2-12

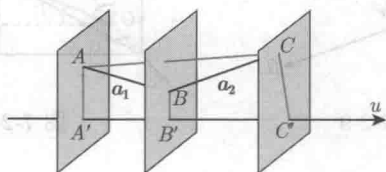


图 7-2-13

### 4. 向量投影的性质

性质 1: 关于向量的投影定理 I. 向量  $\overrightarrow{AB}$  在轴  $u$  上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角的余弦

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi.$$

性质 2: 关于向量的投影定理 II. 两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和 (图 7-2-13) (可以推广):

$$\text{Prj}_u (a_1 + a_2) = \text{Prj}_u a_1 + \text{Prj}_u a_2.$$