"十二五"应用型本科系列规划教材

复变函数与积分变换

Complex Function and Integral Transform

主编　杜洪艳　尤正书　侯秀梅

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十二五"应用型本科系列规划教材

复变函数与积分变换

主　编　杜洪艳　尤正书　侯秀梅
参　编　刘　军　张清平　阳彩霞

机械工业出版社

复变函数与积分变换是电气、电子、通信、电信、自动化等专业的必修课程，其理论与方法在自然科学与工程技术领域均有广泛的应用. 本书是复变函数与积分变换课程教材，全书共分为9章. 前5章介绍了19世纪中叶建立的经典复变函数的基本内容：复数与复平面、解析函数、复积分、级数、留数及其应用. 保形映射为复解析函数所特有的基本结论之一. 最后3章介绍了积分变换，包括傅里叶变换、拉普拉斯变换和快速傅里叶变换.

本书内容丰富、逻辑严密、重点突出，对基本概念、理论、方法的叙述力求深入浅出、清晰准确，每章最后还配置了适量的习题以供读者巩固练习. 除第9章外，每章还配置了自测题以供读者自我检测. 本书可作为普通高等院校工科类学生学习复变函数与积分变换的教材，也可作为科技工作者的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换/杜洪艳，尤正书，侯秀梅主编. —北京：机械工业出版社，2014.8

“十二五”应用型本科系列规划教材

ISBN 978-7-111-47239-1

Ⅰ.①复… Ⅱ.①杜…②尤…③侯… Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材②积分交换-高等学校-教材 Ⅳ.①O174.5②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第147859号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 陈崇昱
版式设计：霍永明 责任校对：陈秀丽
封面设计：路恩中 责任印制：刘 岚
北京京丰印刷厂印刷
2014年8月第1版·第1次印刷
190mm×210mm·11.666印张·340千字
标准书号：ISBN 978-7-111-47239-1
定价：35.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　言

复变函数理论创立于19世纪，直至今日还在不断的发展，它是一门既古老而又富有生命力的学科.

复变函数主要描述了复数之间的相互依赖关系，复变函数课程的主要研究对象是解析函数. 在某些方面它是实变函数微积分学的推广与发展，因此，无论是在内容上还是在研究问题的方法和逻辑结构上，它们都有着许多相似之处. 但是，复变函数能成为一门独立的课程，还是因为它有其自身独特的研究对象和处理方法. 对于涉及分析中对理论要求比较高的内容，如关于共形映射的黎曼定理等，我们并没有写入本书，如果读者有兴趣，可以从参考书中找到相关的内容.

积分变换是通过积分运算将一个函数变换成另一个函数的变换，本书中所说的积分变换特指傅里叶变换和拉普拉斯变换. 另外，书中还简要介绍了快速傅里叶变换，因为它们是数字信号处理的基础积分变换，与复变函数有着密切的联系，它与复变函数一样，也是在实函数微积分学的基础上发展起来的.

复变函数与积分变换的理论和方法已被广泛地应用于自然科学的各领域，如电子工程、控制工程、理论物理、流体力学、热力学、空气动力学、电磁学、地质学等等. 随着计算机科学的飞速发展，数字化已成为现代科学发展的一个重要方向，数字信号处理应用的领域会越来越广泛，对数字信号的理论和技术也就有更多的要求. 因此，复变函数与积分变换的基本理论和方法是高等院校理工科类学生必须具备的数学基础知识之一.

本书结合初学者的特点，逻辑严密，用语力求简洁、准确. 对基本概念、基本理论和基本方法的叙述深入浅出、清晰明了、重点突出、通俗易懂，并且适当地介绍了本学科与其他学科之间的联系，以期能最大限度地培养学生运用所学知识解决实际问题的能力. 本书共分9章，建议54学时完成. 本书由杜洪艳（武昌理工学院）、尤正书（湖北大学知行学院）、侯秀梅（武汉生物工程学院）担任主编，刘军、阳彩霞、张清平参编. 各参编人员分工为：杜洪艳编写第1、8、9章、附录、各章自测题；尤正书编写第5、6章；侯秀梅编写第4章；刘军编写第7章；阳彩霞编写第3章；张清平编写第2章. 全书的合成统稿由主编杜洪艳完成.

希望本书的出版能为普通高校理工科学生提供一本比较系统、完整并能切合学生实际的学习“复变函数与积分变换”的教材，但由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，敬请广大专家读者批评指正.

编　者

目　　录

第 1 章　复数与复平面

复数是复变函数的基础. 本章主要介绍复数的概念、性质、运算及复平面点集和扩充复平面，为后面复变函数的学习与研究作准备.

本章预习提示：复数、向量的定义及平面点集的基本概念.

1.1　复数

1.1.1　复数的概念

我们将形如

$$a + \mathrm{i}b$$

或

$$a + b\mathrm{i}$$

的数称为**复数**，其中 a 和 b 为任意实数，i 称为**虚数单位**且满足于

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

或

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1}.$$

全体复数所构成的集合称为复数集，用 **C** 表示.

对于复数 $z = a + \mathrm{i}b$，实数 a 和 b 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记作

$$\mathrm{Re}\, z = a, \quad \mathrm{Im}\, z = b.$$

当虚部 $b = 0$ 时，$z = a$ 就是一个实数；当虚部 $b \neq 0$ 时，z 称为**虚数**；当实部 $a = 0$ 且虚部 $b \neq 0$ 时，$z = \mathrm{i}b$ 称为**纯虚数**，特别地，当 $a = b = 0$ 时，z 就是实数 0.

显然，实数集 **R** 是复数集 **C** 的真子集，复数是实数的推广.

当且仅当两个复数的实部和虚部分别都相等时，我们才称这两个复数相等. 一般情况下，两个复数不能比较大小，而只能说相等

或不相等.

设 $z=a+ib$ 是一个复数，则称 $a-ib$ 为 z 的**共轭复数**，记作 $\bar{z}$. 显然，$\overline{(\bar{z})}=z$.

1.1.2 复数的模与辐角

1. 复平面

由复数的概念可知：一个复数 $z=a+ib$ 可唯一地对应一个有序实数对(a, b)，而有序实数对(a, b)与坐标平面上的点(a, b)是一一对应的. 于是复数 z 就与坐标平面上的点一一对应. 由此，可建立复数集与平面直角坐标系中的点集之间的一一对应，如图 1-1 所示.

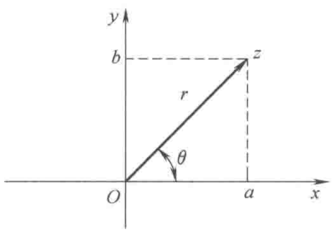

图 1-1

点 z 的横坐标为 a，纵坐标为 b，复数 $z=a+ib$ 可用点 $z(a, b)$表示，这个建立了用直角坐标系表示复数的平面称为**复平面**，在复平面中 x 轴称为**实轴**，y 轴称为**虚轴**. 显然，实轴上的点表示实数；除原点外，虚轴上的点表示纯虚数. 为了方便起见，今后我们将不再区分复数与复平面上的点，即我们说，点 $z(a, b)$与复数 $z=a+ib$ 表示同一意义. 在这种点、数等同的观点下，一个复数集合就是一个平面点集，我们可用平面点集来研究复数.

2. 复数的模与辐角

平面点集与该平面上以原点为起点的平面向量集是一一对应的. 这样，复数与平面上的向量也建立了一一对应关系(见图 1-1)，复数 $z=a+ib$ 可以用向量$\overrightarrow{Oz}$来表示，a，b 分别是向量$\overrightarrow{Oz}$在实轴和虚轴上的投影.

我们把复数 z 所对应向量$\overrightarrow{Oz}$的长度称为**复数 z 的模**，记为 $|z|$ 或 r，因此，有

$$|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0.$$

显然

$$|a|\leqslant|z|\leqslant|a|+|b|,$$
$$|b|\leqslant|z|\leqslant|a|+|b|.$$

即

$$|\operatorname{Re} z|\leqslant|z|\leqslant|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|,$$
$$|\operatorname{Im} z|\leqslant|z|\leqslant|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|.$$

当 $z\neq 0$ 时(即点 z 不是原点时)，向量$\overrightarrow{Oz}$与 x 轴正向的夹角 θ 称为复数 z 的**辐角**，记为

$$\operatorname{Arg} z=\theta.$$

显然有

$$\begin{cases} a=|z|\cos\theta, \quad b=|z|\sin\theta, \\ \tan\theta=\dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

若 θ_1 为复数 z 的一个辐角，则 $\theta_1+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 也是复数 z 的辐角. 因此，任何一个非零复数 z 都有无穷多个辐角，它们之间相差 2π 的整数倍，记为

$$\operatorname{Arg} z=\theta_1+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z},$$

其中，满足 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的辐角是唯一的，称其为 $\operatorname{Arg} z$ **的主值**，记作 $\arg z=\theta$，因此有

$$\begin{cases} -\pi<\arg z\leqslant\pi, \\ \operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}. \end{cases}$$

注意 当 $z=0$ 时，辐角无意义.

辐角主值 $\arg z(z\neq 0)$ 与反正切 $\arctan\dfrac{b}{a}$有如下关系，如图 1-2 所示：

$$\arg z=-\arg\bar{z}=\begin{cases} \arctan\dfrac{b}{a} & a>0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & a=0,\ b>0, \\ \arctan\dfrac{b}{a}+\pi, & a<0,\ b\geqslant 0, \\ \arctan\dfrac{b}{a}-\pi, & a<0,\ b<0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & a=0,\ b<0. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$z\neq 0$，$-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{b}{a}<\dfrac{\pi}{2}$.

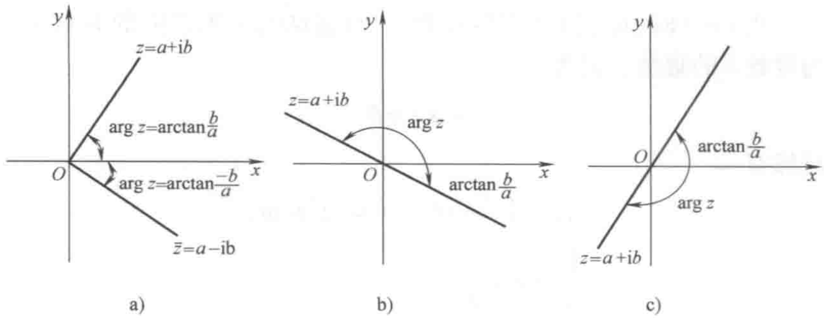

图　1-2

显然，$|\bar{z}| = |z|$，$\arg \bar{z} = -\arg z$.

例 1　试求复数 $3-4\mathrm{i}$ 与 $-2+2\mathrm{i}$ 的模和辐角.

解　$|3-4\mathrm{i}| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}(3-4\mathrm{i}) &= \arg(3-4\mathrm{i}) + 2k\pi \\ &= \arctan\frac{-4}{3} + 2k\pi \\ &= -\arctan\frac{4}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.\end{aligned}$$

$|-2+2\mathrm{i}| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}(-2+2\mathrm{i}) &= \arg(-2+2\mathrm{i}) + 2k\pi \\ &= \arctan\left(\frac{2}{-2}\right) + \pi + 2k\pi \\ &= -\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}.\end{aligned}$$

1.1.3　复数的三角表示与指数表示

考虑复平面上不为零的点 $z=x+\mathrm{i}y$，利用直角坐标与极坐标之间的变换关系，这个点有极坐标：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$. 所以复数 z 还可以用模 $r=|z|$ 和辐角 $\theta=\mathrm{Arg}\,z$ 来表示，即

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

上式称为**复数 z 的三角表示式**. 再应用**欧拉公式** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，由三角表示式可以得到

$$z = re^{i\theta}.$$

上式称为**复数 z 的指数表示式**.

在理论研究和实际应用中，可根据不同的需要采用不同的复数表示式.

例 2 试将复数$\sqrt{3}+\mathrm{i}$表示成三角形式和指数形式.

解 $r=\sqrt{3+1}=2$，$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

因为与$\sqrt{3}+\mathrm{i}$对应的点在第一象限，所以

$$\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})=\frac{\pi}{6}.$$

于是

$$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

所以可得指数表示式

$$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2e^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}.$$

1.2 复数的运算及几何意义

1.2.1 复数的加法和减法

设复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则**复数的加法**定义如下：

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2). \tag{1.2}$$

复数的减法是加法的逆运算. 如果存在复数 z 使 $z_1=z_2+z$，则 $z=z_1-z_2$. 因此

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2). \tag{1.3}$$

若复数 z_1、z_2 分别用对应的向量$\overrightarrow{Oz_1}$、$\overrightarrow{Oz_2}$表示，则复数的加减法与向量的加减法一致，于是在平面上以$\overrightarrow{Oz_1}$、$\overrightarrow{Oz_2}$为边的平行四边形的对角线$\overrightarrow{Oz}$就表示复数 z_1+z_2，如图 1-3 所示，对角线$\overrightarrow{z_2z_1}$就表示复数 z_1-z_2. 若将向量$\overrightarrow{z_2z_1}$平移至向量$\overrightarrow{Oz_3}$，则向量$\overrightarrow{Oz_3}$就表示复数 z_1-z_2（见图 1-3）.

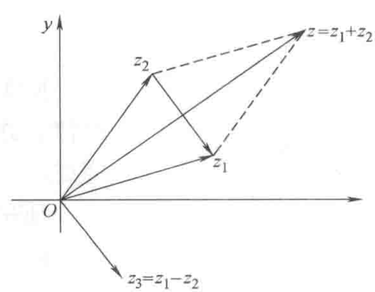

图 1-3

由复数的几何意义可知，显然有下列两个不等式成立：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|, \tag{1.4}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|, \tag{1.5}$$

其中，$|z_1-z_2|$表示向量$\overrightarrow{z_1z_2}$的长，也就是复平面上点 z_1，z_2 之间的距离.

1.2.2 复数的乘法和除法

复数的乘法定义如下

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= (x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1). \end{aligned} \tag{1.6}$$

由乘法定义，可验证

$$\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=(0+1\cdot\mathrm{i})(0+1\cdot\mathrm{i})=-1.$$

复数的除法是乘法的逆运算. 当 $z_2\neq0$ 时，$z=\dfrac{z_1}{z_2}$就表示 $z_1=z\cdot z_2$，其计算方法如下：

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{x_2^2+y_2^2} \\ &= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

例如，

$$\begin{aligned} \frac{2-3\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}} &= \frac{(2-3\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}{(3+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})} \\ &= \frac{(6-6)+\mathrm{i}(-9-4)}{3^2+2^2} \\ &= -\mathrm{i}. \end{aligned}$$

同实数的四则运算一样，复数的加法与乘法均满足交换律与结合律，并满足乘法对加法的分配律，相关证明请读者作为练习自行完成.

现在，利用复数的三角表示式来讨论复数的乘法与除法.

设
$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

则由复数的乘法得

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\
&= r_1 r_2 [(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \\
&\quad \mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)] \\
&= r_1 r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].
\end{aligned}
$$

于是得

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|, \tag{1.8}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2. \tag{1.9}$$

由式(1.8)及式(1.9)可知：

两个复数乘积的模等于它们模的乘积，两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和.

值得注意的是，由于辐角的多值性，式(1.9)应理解为对于左端 $\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2)$的任一值，必有右端 $\mathrm{Arg}\, z_1$ 与 $\mathrm{Arg}\, z_2$ 的各一值相加得出的和与之对应，反之亦然.

复数乘法的几何意义是：乘积 $z_1 \cdot z_2$ 所表示的向量可以从 z_1 所表示的向量沿逆时针方向旋转一个角度 $\mathrm{Arg}\, z_2$，并伸长$|z_2|$倍获得，如图 1-4a 所示.

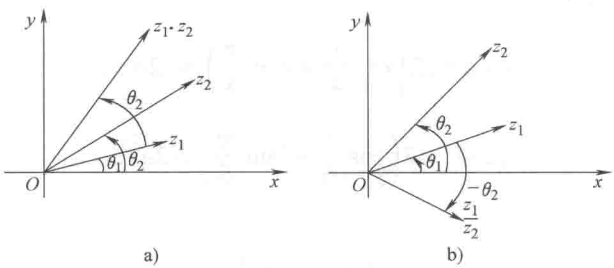

图 1-4

复数除法是复数乘法的逆运算，故当 $z_2 \neq 0$ 时，有

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)], \tag{1.10}$$

或者写成

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \mathrm{Arg}\,\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Arg}\, z_1 - \mathrm{Arg}\, z_2. \tag{1.11}$$

因此，除法也有其几何意义(见图 1-4b)，即

两个复数商的模等于它们模的商，两个复数商的辐角等于分子与分母辐角的差.

若利用复数的指数表示式 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$，则有

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \tag{1.12}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)},\ r_2\neq 0. \tag{1.13}$$

例 1 用三角表示式计算 $(\sqrt{3}-i)(1+\sqrt{3}i)$.

解 因为

$$\sqrt{3}-i=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right],$$

$$1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

所以

$$(\sqrt{3}-i)(1+\sqrt{3}i)=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}+2i.$$

例 2 用指数表示式计算 $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$.

解 因为

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i},$$

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{\frac{\pi}{6}i},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}&=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}{2e^{\frac{\pi}{6}i}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{12}i}.\end{aligned}$$

1.2.3 复数的乘方和开方

运用数学归纳法，可得到 n 个复数 z_1，z_2，$\cdots$，z_n 相乘的公式：

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdot z_n&=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\\&\quad i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]\\&=r_1r_2\cdots r_ne^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}.\end{aligned}$$

其中，$z_k=r_k(\cos\theta_k+\mathrm{i}\sin\theta_k)=r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$，$k\in\mathbf{Z}_+$.

特别地，当 $z_1=z_2=\cdots=z_n=z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 时，就得到**复数 z 的 n 次幂**：

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta),\ n\in\mathbf{Z}_+. \tag{1.14}$$

若令 $|z|=r=1$，即 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，则得著名的**棣莫佛**(De Moivre)**公式**：

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta. \tag{1.15}$$

当 $n=3$ 时，即以 3 倍角为例，有

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3=\cos3\theta+\mathrm{i}\sin3\theta,$$

将等式左边展开得到

$$\begin{aligned}&\cos^3\theta+3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-\mathrm{i}\sin^3\theta\\&=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+\mathrm{i}(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta).\end{aligned}$$

分别比较等式两边的实部与虚部得到

$$\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta,$$
$$\sin3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta.$$

显然，用这种方法得到 3 倍角公式比中学的三角方法更简便.

设存在复数 w 和 z，若 $w^n=z$（n 为正整数），则称**复数 w 为 z 的 n 次方根**，记为

$$w=\sqrt[n]{z}.$$

如果 $z=0$，显然有 $w=0$. 为此，我们假定 $z\neq0$.

现令

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),\quad w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi),$$

则有

$$[\rho(\cos\varphi)+\mathrm{i}\sin\varphi)]^n=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

即

$$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

于是有

$$\begin{cases}\rho^n=r,\\ n\varphi=\theta+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

从而解得

$$\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r},\\ \varphi=\dfrac{1}{n}(\theta+2k\pi),\ k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

故得

$$w=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\tag{1.16}$$

其中，$k=0, \pm1, \pm2, \cdots$，$r^{\frac{1}{n}}$为 r 的算术根.

由于 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ 都是以 2π 为周期的周期函数，故当 $k=0, 1, \cdots, n-1$ 时，可得到 φ 的 n 个值，其中任意两个相差不是 2π 的整数倍，w 实际上有 n 个不同的值，当 k 取其他整数时，w 的这些值又重复出现. 为确定起见，可写成

$$w=|z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right),\tag{1.17}$$

其中，$k=0, 1, \cdots, n-1$.

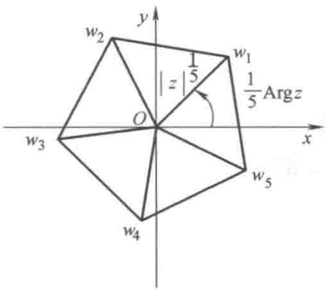

图 1-5

由于复数$\sqrt[n]{z}$的 n 个不同的值都具有相同的模 $\sqrt[n]{|z|}$，且对应相邻两个 k 值的方根的辐角均相差$\frac{2\pi}{n}$，所以在复平面上这 n 个点形成一个以原点为中心的正 n 边形的顶点. 它们同原点的距离是 $|z|^{\frac{1}{n}}$，其中一个点的辐角是$\frac{1}{n}\operatorname{Arg} z$，如图 1-5 所示.

特别地，当 $z=1$ 时，若令 $w=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$，则 1 的 n 次方根为 $1, w, w^2, \cdots, w^{n-1}$.

1.2.4 共轭复数的运算性质

设复数 $z=x+\mathrm{i}y$，$\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，则 z 和 $\bar{z}$ 是关于实轴对称的，如图 1-6 所示.

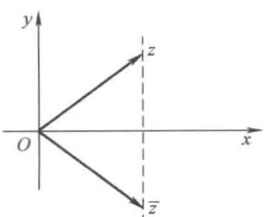

图 1-6

显然有：

(1) $|\bar{z}|=|z|$；

(2) $\operatorname{Arg}\bar{z}=-\operatorname{Arg} z$；

(3) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$；

(4) $z\cdot\bar{z}=|z|^2$；

(5) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$；