



重庆市高职高专规划教材
应用高等数学系列

■ 总主编 曾乐辉
■ 总编审 龙 辉

应用

YINGYONG

GAODENG SHUXUE

高等数学

文经管类

主 编 ■ 胡先富 彭光辉

副主编 ■ 刘家英 胡春健 周昌芹



重庆大学出版社

<http://www.cqup.com.cn>



重庆市高职高专规划教材
应用高等数学系列

■ 总主编 曾乐辉
■ 总主审 龙 辉

应用

YINGYONG

GAODENG SHUXUE

高等数学

文经管类

主 编 ■ 胡先富 彭光辉

副主编 ■ 刘家英 胡春健 周昌芹

重庆大学出版社

内容提要

本教材是以教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》为依据,以重庆市重点教改研究课题《基于学分制的高职高等数学适应性教学改革研究与实践》为理论指导,并结合文经管类专业对数学的要求编写而成的。

本教材是重庆市高职高专规划教材,内容包括经济中常用的函数、极限与连续、一元函数的导数与微分及其应用、一元函数的积分及其应用、矩阵代数、简单的线性规划、概率论初步、数理统计基础。每章末有 MATLAB 应用案例、数学实践、数学人文知识。书后附有初等数学常用公式、积分表及各种概率统计表。

本教材可作高职高专、专科层次的各类成人教育文经管类专业的数学教材,也可作为文经管类专业从业人员的数学参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学:文经管类/胡先富,彭光辉主编.

—重庆:重庆大学出版社,2012.6

重庆市高职高专规划教材.应用高等数学系列

ISBN 978-7-5624-6689-5

I. ①应… II. ①胡… ②彭… III. ①高等数学—高等
职业教育—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 080270 号

重庆市高职高专规划教材

应用高等数学系列

应用高等数学

文经管类

主 编 胡先富 彭光辉

副主编 刘家英 胡春健 周昌芹

责任编辑:范春青 刘颖果 版式设计:范春青

责任校对:邹 忌 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:邓晓益

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编:401331

电话:(023) 88617183 88617185(中小学)

传真:(023) 88617186 88617166

网址:<http://www.cqup.com.cn>

邮箱:fxk@cqup.com.cn(营销中心)

全国新华书店经销

重庆升光电力印务有限公司印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:16.75 字数:418 千

2012 年 6 月第 1 版 2012 年 6 月第 1 次印刷

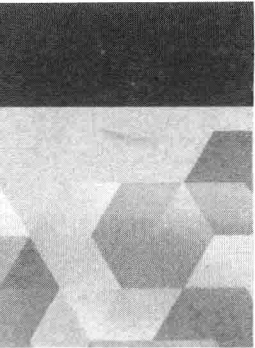
印数:1—8 000

ISBN 978-7-5624-6689-5 定价:32.00 元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

版权所有,请勿擅自翻印和用本书

制作各类出版物及配套用书,违者必究



前言

当前,我国的高职高专教育正在进入一个长足发展的时期,从规模到质量都在不断迈上新的台阶,教材建设作为高职高专教育的一个重要组成部分也要与时俱进,适应新形势的需要。

本教材根据教育部制定的《高职高专教育专业人才培养目标及规格》和《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》精神,由一批富有高职高专教育经验的专家、教授编写而成。本教材编写组认真总结了国家示范高职院校《高等数学》和《应用高等数学》教材编写和使用的经验,研究了高职高专教育面临的新形势和新问题,统一了编写指导思想:在进一步把握“必需,够用”的尺度,继续加强数学应用性的基础上,充分体现因材施教、以人为本的理念。

本教材具有以下特点:

1. 高职数学教学要为学生后续专业课程的学习服务,为专业课程提供理论支撑与计算方法,使学生能够用数学理论知识、思想方法解决专业实际问题。我们坚持“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则设置教材内容,体现高等数学的工具性与现实应用性。

2. 本教材同时充分考虑高等数学的文化属性与素质教育功能,力求突出基础性、工具性、文化性、应用性、实用性于一体。通过数学的学习为学习者专业发展提供支撑,并有效提升学习者的数学素质与创新能力。

3. 教材编写做到“两个面向”:“面向专业”,以应用为目的,与专业课程对数学的需求相适应;“面向学生”,内容设置具有一定的弹性,适应于学生的个体差异,与全人发展理念相适应。在编写过程中既体现服务于专业又高于专业,充分考虑学生的可持续发展,体现数学的发展性、潜在性功能。内容设置分为基础要求与较高要求,习题设置为 A、B 两个层次,以满足不同层次的学生对高等数学的个性需求。

4. 教材按模式化体系构建,优化知识结构,以“必需、够用”及“两个面向”为原则,对高等数学、线性代数、线性规划及概率与数理统计学科性的知识体系进行解构与重构,以能力为本位,重构“服务型”课程模块体系。根据学生后续专业课程的学习、社会对职业岗位要求以及适应科技进步的要求,将为学生提供“支持一生发展的‘文化数学’、为从业服务的‘实用数学’、为专业服务的‘工具数学’”构建到模块体系中。

本教材分为基础模块与专业应用模块,内容包括经济中常用的函

数、极限与连续、一元函数的导数与微分及其应用、一元函数的积分及其应用、矩阵代数、简单的线性规划、概率论初步、数理统计基础。

本教材由重庆城市管理职业学院胡先富与重庆工贸职业技术学院彭光辉任主编,重庆医药高等专科学校刘家英、重庆财经职业学院胡春健、重庆旅游职业学院周昌芹任副主编。

第1章由重庆电子工程职业学院冯国锋编写;第2章由重庆旅游职业学院张国丽、周昌芹编写;第3章由重庆医药高等专科学校张鸣、李亨蓉、姜理华、刘家英编写;第4章由重庆城市管理职业学院游诗远、李华平编写;第5章由重庆城市管理职业学院胡先富、薛颖编写;第6章由重庆工程职业技术学院燕长轩、陈善全编写;第7章由重庆工贸职业技术学院陈国栋、彭光辉编写;第8章由重庆财经职业学院胡春健编写。

本教材适用于高职高专、专科层次的各类成人教育文经管类专业,也可作为专升本教材。为了便于学生巩固所学知识,本教材配套的习题册也已同步出版。

本教材在编写过程中得到了重庆市数学学会高职高专专委会的指导,得到了在渝主要高职高专院校以及一些举办了高职高专教育的各级各类学校领导和教师的大力支持和帮助,在此表示诚挚的感谢。

由于本教材的编写具有创新模式的尝试,且编者水平有限,难免有缺点和错误,恳请读者批评指正。

《应用高等数学系列教材》编审委员会

2012年3月

目 录

基础 模块

1	经济中常用的函数	2
1.1	初等函数	2
1.2	经济中常用的函数	11
	MATLAB 应用案例 1	15
	数学实践 1	17
	数学人文知识 1	18
2	极限与连续	20
2.1	函数的极限	20
2.2	无穷小量与无穷大量	30
2.3	两个重要极限	33
2.4	函数的连续性	37
	MATLAB 应用案例 2	43
	数学实践 2	44
	数学人文知识 2	44
3	一元函数的导数与微分及其应用	48
3.1	导数的概念与基本求导公式	48
3.2	求导法则与高阶导数	54
3.3	洛必达法则	63
3.4	函数的单调性与极值	68
3.5	曲线的凹凸性	75
3.6	导数在经济分析中的应用	76
3.7	微分	82
	MATLAB 应用案例 3	87
	数学实践 3	88
	数学人文知识 3	89

4	一元函数的积分及其应用	91
4.1	不定积分的概念与基本积分公式	91
4.2	不定积分的积分方法	95
4.3	定积分的概念与性质	105
4.4	定积分的计算	112
4.5	无限区间上的广义积分	117
4.6	定积分的应用	119
	MATLAB 应用案例 4	124
	数学实践 4	124
	数学人文知识 4	125
5	矩阵代数	128
5.1	矩阵的概念与运算	128
5.2	矩阵的初等变换与矩阵的秩	135
5.3	逆矩阵	140
5.4	线性方程组	144
	MATLAB 应用案例 5	152
	数学实践 5	153
	数学人文知识 5	155
6	简单的线性规划	158
6.1	线性规划问题的数学模型	158
6.2	线性规划问题的图解法	169
	MATLAB 应用案例 6	177
	数学人文知识 6	178
7	概率论初步	180
7.1	随机事件及基本关系	180
7.2	随机事件的概率	184
7.3	独立试验概型	191
7.4	随机变量及其分布	194
7.5	随机变量的数字特征	205
	MATLAB 应用案例 7	211
	数学实践 6	214
	数学人文知识 7	215

8 数理统计基础	217
8.1 基本概念	217
8.2 参数估计	222
8.3 假设检验	231
MATLAB 应用案例 8	235
数学实践 7	237
数学人文知识 8	238
附录	239
主要参考文献	258

基础模块

JICHU MOKUA

经济中常用的函数

函数是数学中最重要的基本概念之一,是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映,也是经济数学的主要研究对象.本章在中学已有函数知识的基础上,进一步阐明函数的一般定义,总结了中学已学过的一些函数,并介绍经济学中的常用函数.

1.1 初等函数

1.1.1 函数的概念与基本性质

1) 函数的定义

人们在观察某一现象的变化过程时,常常会遇到各种不同的量,其中有的量在过程中不起变化,称之为常量;有的量在过程中是变化的,也就是可以取不同的数值,称之为变量.

定义 1.1 如果当变量 x 在其变化范围 D 内任意取定一个数值时,变量 y 按照一定的法则 f 总有唯一确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y = f(x)$$

其中,变量 x 的变化范围 D 称为函数的定义域, x 称为自变量, y 称为函数值(或因变量),函数值的全体组成的集合 Z 称为函数的值域.

构成一个函数的要素为定义域与对应关系.即两个函数的定义域和对应关系完全一致时,称两个函数相等,与变量用什么符号表示无关.例如, $y = |x|$ 与 $z = \sqrt{v^2}$,就是相同的函数.

函数的表示法主要有三种,即表格法、图像法、公式法.

【例 1.1】 据股市行情报导,个股“深宝安”某月上旬前 5 天的收盘价如下表所示.

时间/天	1	2	3	4	5
收盘价/元	5.34	4.97	4.44	4.21	3.85

按照上表,每一天都对应一个唯一的收盘价.若设时间为 t ,收盘价为 R ,对照函数的概念, R 就是 t 的函数.收盘价 R 与时间 t 的对应关系是靠表格来完成的,这就是函数的表格法.

【例 1.2】 有时人们可能会想,汽车开得快耗油量大,还是开得慢耗油量大?图 1.1 是公共汽车的耗油量图,横坐标表示车速(单位:km/h),纵坐标表示耗油量(单位:L/100 km).

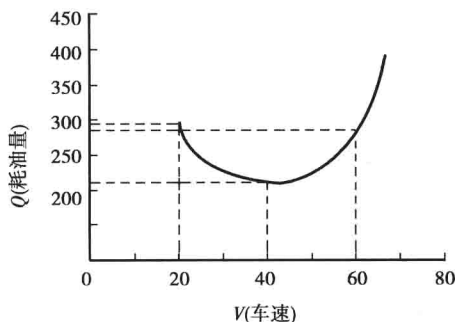


图 1.1

按照图 1.1 所示耗油量曲线图,对每一个车速 V ,都可以对应一个唯一的耗油量 Q . 因此耗油量 Q 是车速 V 的函数. 这里 V 与 Q 的对应关系是靠图像来完成的,这就是函数的图像法.

自变量与函数的对应关系如果是靠公式来完成的,称为函数的公式法表示. 用公式法表示的函数也称为函数的解析式.

函数的本质是指对应规则 f . 例如, $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ 就是一个特定的函数, f 确定的对应规则为 $f(\quad) = (\quad)^3 + 4(\quad)^2 - 10$. 就是一个函数.

【例 1.3】生产成本是产量的函数. 某化肥厂生产氮肥的成本函数为

$$C(x) = 1.5 + 2x - 2x^2 + x^3 \text{ (千元)}$$

其中 x 为产量,单位为 t. 求此函数的定义域.

由常理可知,产量 x 不可能为负数,因此 x 的取值范围为 $x \geq 0$ 的一切实数,函数定义域 D 为 $[0, +\infty)$.

由此可知,生产和生活实际中的函数,其定义域由问题的具体意义来决定.

【例 1.4】求函数 $y = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域.

【解】这是一个没有赋予实际意义的数学式子表示的函数,显然 $1 - x^2 > 0$. 因此,函数定义域 D 为 $(-1, 1)$.

由此可知,由数学式子表示的函数,其定义域是使得函数式有意义的 x 的取值范围.

【例 1.5】求下列函数的定义域.

$$(1) f(x) = \sqrt{x+5} - \frac{4}{3-x}$$

$$(2) f(x) = \ln(x^2 - 9)$$

【解】(1)要使函数式有意义,则

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 3-x \neq 0 \end{cases}, \text{解之得} \begin{cases} x \geq -5 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

所以,函数的定义域 D 为 $[-5, 3) \cup (3, +\infty)$.

(2)要使函数式有意义,对数的真数部分必须大于 0,即 $x^2 - 9 > 0$,解之得 $x < -3$ 或 $x > 3$.

所以,函数的定义域 D 为 $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

对于函数 $y=f(x)$, 如果当 $x=x_0 \in D$ 时, 对应的函数值为 y_0 , 则称 y_0 为函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值. 记作 $y \Big|_{x=x_0} = y_0$ 或 $f(x_0) = y_0$. 这时称函数在点 $x=x_0$ 处有定义. 如果函数在某个区间上每一点都有定义, 则说函数在该区间上有定义.

【例 1.6】 设函数 $g(t) = \sqrt{t^2 + 1}$, 求 $g(4), g(a), g(2 + \Delta t)$.

【解】 $g(4) = \sqrt{4^2 + 1} = 3$

$$g(a) = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$g(2 + \Delta t) = \sqrt{(2 + \Delta t)^2 + 1} = \sqrt{5 + 4\Delta t + (\Delta t)^2}$$

【例 1.7】 设 $f(x) = x + 1$, 求 $f(f(x) + 1)$.

【解】 因为 $f(x) + 1 = x + 1 + 1 = x + 2$

所以 $f(f(x) + 1) = f(x + 2) = x + 2 + 1 = x + 3$

在自变量的不同取值范围内, 用不同的式子表示的函数称为分段函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 2 \\ \ln x & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

就是一个定义在区间 $(-\infty, 5]$ 上的分段函数.

【例 1.8】 设有分段函数 $f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 求函数 $f(x)$ 的定义域, 并求 $f(-0.5)$ 和 $f(1)$.

【解】 函数 $f(x)$ 的定义域即是自变量 x 各个不同取值范围的并集, 因此函数的定义域 D 为 $[-1, 2]$.

$$f(-0.5) = -0.5 + 1 = 0.5, f(1) = 1 - 1 = 0.$$

2) 函数的几种基本性质

• 函数的有界性

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果对于所有的 $x \in I$, 恒有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 其中 M 是一个与 x 无关的正数, 那么称 $f(x)$ 在区间 I 上有界, 否则称为无界.

一个函数在区间 I 上有界是指其所有的函数值都能夹在两个常数之间.

• 函数的单调性

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 对于 (a, b) 内的任意两点 x_1 及 x_2 , 如果当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调增加, 区间 (a, b) 称为函数的单调增加区间; 如果当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调减少, 区间 (a, b) 称为函数的单调减少区间.

函数的单调性与其定义区间的范围密切相关, 它具有局部性.

• 函数的奇偶性

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 对任意 $x \in D$, 且 $-x \in D$. 如果 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数, 偶函数的图形关于 y 轴对称; 如果 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数, 奇函数的图形关于原点对称. 既不是奇函数也不是偶函数的函数称为非奇非偶的函数.

• 函数的周期性

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个不为零的常数 T , 使得对任意的 $x \in D$, 恒有 $f(x+T) = f(x)$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 为 D 上周期函数, 称常数 T 为函数 $f(x)$ 的一个周期. 周期函数的周期通常是指最小正周期.

【例 1.9】 判断下列函数的奇偶性.

$$(1) f(x) = x \sin x \quad (2) f(x) = \sin x - \cos x \quad (3) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

【解】 (1) 因为 $f(-x) = -x \sin(-x) = x \sin x = f(x)$, 所以 $f(x) = x \sin x$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) = -\sin x - \cos x$, 所以 $f(x) = \sin x - \cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

$$(3) \text{ 因为 } f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \ln \left[(\sqrt{x^2 + 1} - x) \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right]$$

$$= \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -f(x)$$

所以 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函数.

【例 1.10】 确定函数 $f(x) = 3 \sin(4x + \frac{\pi}{3})$ 的周期.

$$\text{【解】 周期 } T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

3) 反函数

定义 1.6 设函数 $y = f(x)$, $x \in D$, $y \in Z$. 若变量 y 在函数的值域 Z 内任取一个值 y_0 时, 变量 x 在函数的定义域 D 内必有唯一的值 x_0 与之对应, 即 $y_0 = f(x_0)$, 那么变量 x 是变量 y 的函数, 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 记作

$$x = f^{-1}(y)$$

习惯上, 把函数 $y = f(x)$ 的反函数记作 $y = f^{-1}(x)$, 其定义域为 Z , 值域为 D .

关于反函数, 有以下结论:

(1) 在区间 (a, b) 内严格单调的函数一定存在反函数, 其反函数的单调性与已知函数一致.

(2) 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

(3) 若 $y = f(x)$, $x \in D$, $y \in Z$, 则 $y = f^{-1}(x)$, $x \in Z$, $y \in D$.

从定义可知, 求反函数的过程可以分为两步: 第一步, 从 $y = f(x)$ 中解出 $x = f^{-1}(y)$; 第二步, 交换字母 x 和 y , 得 $y = f^{-1}(x)$.

【例 1.11】 求 $y = \frac{2x-3}{3x+2}$ 的反函数.

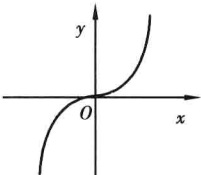
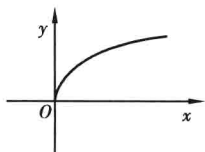
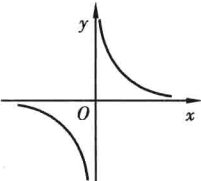
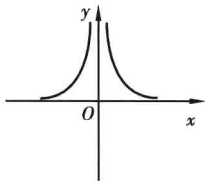
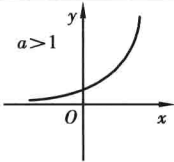
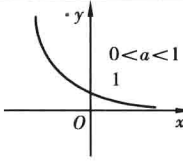
【解】 由 $y = \frac{2x-3}{3x+2}$, 得 $x = -\frac{2y+3}{3y-2}$. 所以反函数为 $y = -\frac{2x+3}{3x-2}$.

1.1.2 初等函数

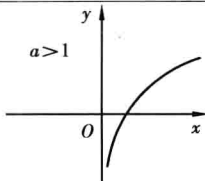
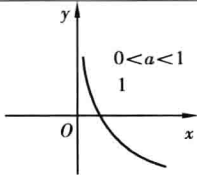
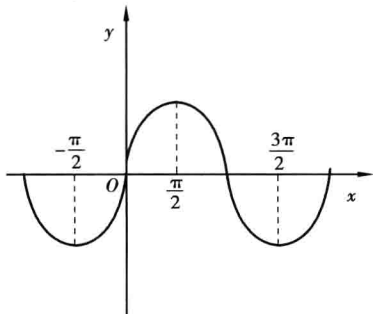
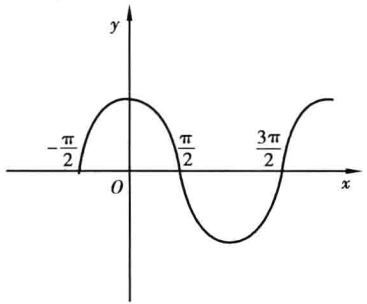
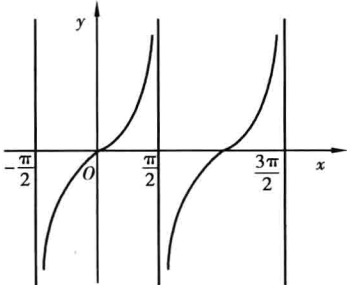
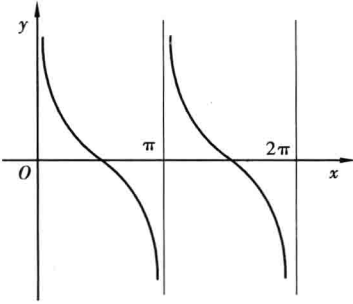
1) 基本初等函数

高等数学研究的对象主要就是初等数学中学习过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数以及它们的组合. 为了后续课程能顺利进行, 有必要把上述 5 类函数系统地整理在一起. 这 5 类函数统称为基本初等函数.

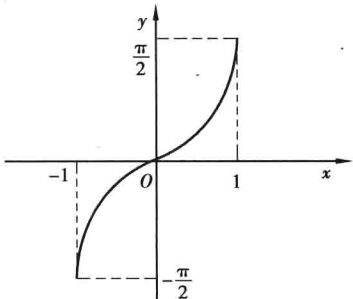
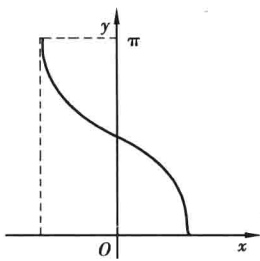
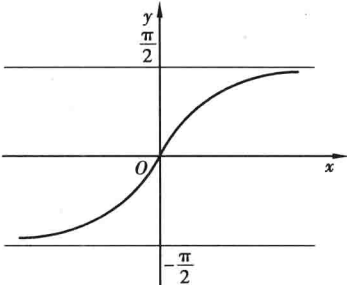
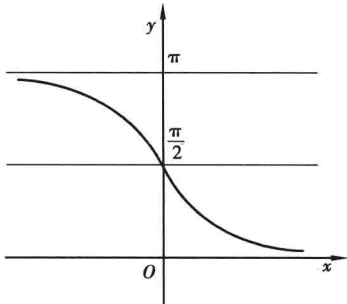
基本初等函数的图形与性质如下表所示:

1. 幂函数 $y = x^\alpha$	
(1) $y = x^3$ (指数 $\alpha = 3$)  定义域: $(-\infty, +\infty)$, 值域: $(-\infty, +\infty)$ 奇函数 单调增加	(2) $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (指数 $\alpha = \frac{1}{2}$)  定义域: $[0, +\infty)$, 值域: $[0, +\infty)$ 非奇非偶函数 单调增加
(3) $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ (指数 $\alpha = -1$)  定义域: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 值域: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 奇函数 在 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$ 内均单调减少	(4) $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ (指数 $\alpha = -2$)  定义域: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 值域: $(0, +\infty)$ 偶函数 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少, 在 $(-\infty, 0)$ 内单调增加
2. 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)	
 (如 $y = 2^x, y = 10^x, y = e^x$) 定义域: $(-\infty, +\infty)$, 值域: $(0, +\infty)$ 单调增加 图像过 $(0, 1)$ 点	 (如 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \left(\frac{1}{10}\right)^x, y = e^{-x}$) 定义域: $(-\infty, +\infty)$, 值域: $(0, +\infty)$ 单调减少 图像过 $(0, 1)$ 点

续表

3. 对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$	
 (如 $y = \log_2 x, y = \lg x, y = \ln x$) 定义域: $(0, +\infty)$, 值域: $(-\infty, +\infty)$ 单调增加 图像过 $(1, 0)$ 点	 (如 $y = \log_{\frac{1}{2}} x, y = \log_{\frac{1}{10}} x$) 定义域: $(0, +\infty)$, 值域: $(-\infty, +\infty)$ 单调减少 图像过 $(1, 0)$ 点
4. 三角函数	
(1) 正弦函数 $y = \sin x$  定义域: $(-\infty, +\infty)$, 值域: $[-1, 1]$ 奇函数, 周期为 2π 在 $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$ 内单调增加 在 $(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$ 内单调减少	(2) 余弦函数 $y = \cos x$  定义域: $(-\infty, +\infty)$, 值域: $[-1, 1]$ 偶函数, 周期为 2π 在 $(2k\pi - \pi, 2k\pi)$ 内单调增加 在 $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$ 内单调减少
(3) 正切函数 $y = \tan x$  定义域: $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 值域: $(-\infty, +\infty)$ 奇函数, 周期为 π, 单调增加	(4) 余切函数 $y = \cot x$  定义域: $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 值域: $(-\infty, +\infty)$ 奇函数, 周期为 π, 单调减少

续表

5. 反三角函数	
(1) 反正弦函数 $y = \arcsin x$  正弦函数 $y = \sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数 定义域: $[-1, 1]$, 值域: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 奇函数, 单调增加	(2) 反余弦函数 $y = \arccos x$  余弦函数 $y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的反函数 定义域: $[-1, 1]$, 值域: $[0, \pi]$ 非奇非偶, 单调减少
(3) 反正切函数 $y = \arctan x$  正切函数 $y = \tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数 定义域: $(-\infty, +\infty)$, 值域: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 奇函数, 单调增加	(4) 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$  余切函数 $y = \cot x$ 在 $(0, \pi)$ 上的反函数 定义域: $(-\infty, +\infty)$, 值域: $(0, \pi)$ 非奇非偶, 单调减少

2) 复合函数

通常接触到的函数并非都是单纯的基本初等函数,更多的是多个函数的组合. 这里介绍一种组合形式的函数——复合函数.

设 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, 通过 u 的联系, 如果 y 是 x 的函数, $y = f[\varphi(x)]$, 则这个函数称为由 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数, 简称复合函数, 其中 u 称为中间变量.

【例 1.12】 将下列复合函数分解成基本初等函数或简单函数.

$$(1) y = \sin^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(2) y = \ln(\tan e^{x^2 + 2 \sin x})$$

$$(3) y = 3^{\tan^2 x}$$

$$(4) y = \sqrt[3]{(1+2x)^2}$$

【解】 (1) y 由 $y = u^2, u = \sin v, v = w^{-\frac{1}{2}}, w = x^2 + 1$ 组成.

(2) y 由 $y = \ln u, u = \tan v, v = e^t, t = x^2 + 2 \sin x$ 组成.

(3) y 由 $y = 3^u, u = v^2, v = \tan x$ 组成.

(4) y 由 $y = u^{\frac{2}{3}}, u = 1 + 2x$ 组成.

3) 初等函数

一般地, 由基本初等函数和常数经有限次四则运算或有限次复合过程所构成的, 能用一个式子表示的函数称为初等函数. 例如: $y = 3x^2 - 2x + 1, y = (\sec 3x + \cot 2x)^2, y = \frac{3 \ln x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$ 等都是初等函数.

【例 1.13】 求函数 $y = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域.

【解】 因为 $\begin{cases} x-1 > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$, 所以 $1 < x < 2$. 即函数的定义域为 $D = (1, 2)$.

习题 1.1

A 组

1. 下列各题中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一函数?

$$(1) f(x) = |x|, g(x) = \sqrt{x^2}$$

$$(2) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ 与 } g(x) = x + 1$$

2. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = 2x - 5 + \frac{3x^2}{x+4}$$

$$(2) y = \frac{1}{2x-1} + \sqrt{2x+3}$$

$$(3) y = \frac{x^4 - 3x}{\sqrt{x^2 - 9x - 10}}$$

$$(4) y = 7 \ln(\ln x)$$

3. 设函数 $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$, 求函数值 $f(4), f\left(\frac{1}{2}\right), f(x_0), f\left(\frac{1}{a}\right)$.

4. 设函数 $f(x) = \log_a x$, 求 $f(x_0), f(x_0 + \Delta x)$ 及 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

5. 设有分段函数如下:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 3 \\ 3 & 3 \leq x < 5 \\ 8-x & 5 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

(1) 求定义域; (2) 求函数值 $f(0), f(2.5), f\left(\frac{7}{2}\right), f(6)$.

6. 判断下列函数的奇偶性.