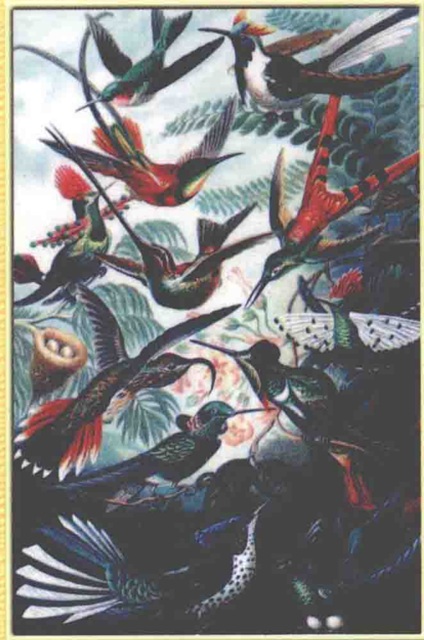
数论三角形

《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

邹叔鑫 著



◎ 数论三

◎ 数论三

◎ 与贾宪

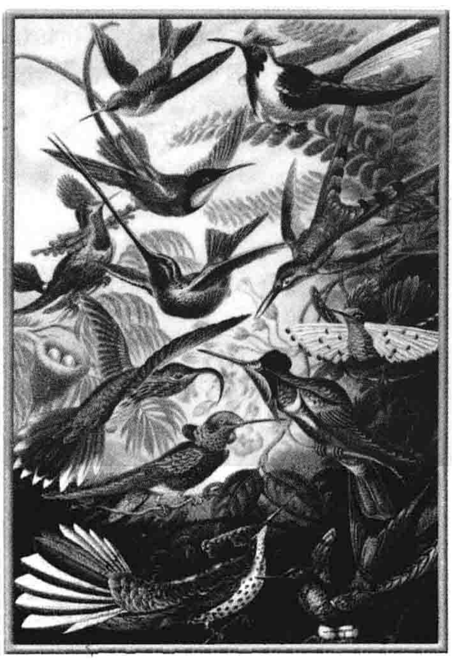
◎ 数论三

◎ 数论三

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

数论三角形



邹叔鑫 著

◎数论

◎数论

◎与贾

◎数论

◎数论

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书由麦比乌斯带联想，从正多棱柱体两端扭转相接的面数规律导出数字直角三角形，兼与贾宪三角形比较，阐述它的数字排式与性质，其中涉及初等数论中的许多内容.

本书适合于大、中师生以及数学爱好者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

数论三角形/邹叔鑫著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.4

(初等数学研究系列)

ISBN 978 -7 -5603 -4661 -8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①邹… Ⅲ.①数论 - 研究 Ⅳ.①O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 058788 号

安徽大学图书馆 藏书 www.lib.ahu.edu.cn

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘家琳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451 - 86414749
网　　址 http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 12 字数 129 千字
版　　次 2014 年 4 月第 1 版 2014 年 4 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978 -7 -5603 -4661 -8
定　　价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

◎

前 言

最古老的两个数学分支是数论和几何学.作为研究整数性质和不定方程(组)整数解的初等数论,几千年来一直是不断发展和十分活跃的研究领域,也离不开贾宪三角形(即帕斯卡三角形)数字排式的展现.我国数学家吴文俊谈对数学发展的认识而指出:“将来的数学,应该是中国古代数学道路,而不是国际道路,这是一条总的趋势”以及“中国古代数学是一种机械化数学,数学机械化思想是中国古代数学的精髓”.在对“哥德巴赫猜想”问题的求解热潮中,由于人们不懈地思考和探索,不乏津津乐道的数学兴趣,也不乏烁烁发光的数学思想,从而拓广了“计算数论”的新领域.而今,数论三角形和贾宪三角形有许多相似之处,并以它的对称性、循环性和欧拉函数性汇集在一个数字三角形上,可与初等数论中最基本的概念、方法和思想相联系,是在初等数论研究上属于一种新型的数字排式而待人去发掘与探索.

数学是文明的一个重要组成部分,它在某个文明中的地位,常能影响该文明在

整个社会中的地位以及该文明在整个历史上的地位.法国军事家拿破仑说:“数学的进步和完善与国家的繁荣和富强是紧密相连的.”我国都深感到当今中国正处在强盛的时期,理当是华人数学界被誉称的陈省身猜想“21世纪中国必将成为数学大国.”认识数学、了解数学和欣赏数学,是众多数学爱好者的浓厚兴趣;学习数学、研究数学和构造数学,是众多数学工作者的宏大志向.我是两者兼备(即兴趣与志向),为了阐明数论三角形的创新思绪,鉴于平时对数学的钟情和多年“搜数记”的积累,集腋成裘,现以“井蛙观天”之孔见而草撰此书稿,其目的是“使数学及其对世界的意义被社会所了解,特别是被普通公众所了解.”(即“国际数学年”宗旨)

数学教育是潜移默化的,从小受到数学的熏陶,将来很可能从事数学研究.本书稿是一本可当作“数学桥”的科普读物,是以数论三角形作为一条主线,串联着初等数论中的许多知识和问题,还穿插一些数论发展历史故事,能够使读者开阔眼界和增加悟性,也能够使读者感受到数论“原本是十分有趣的”,而到数海去拾贝.限于我学识浅薄,其中错误与缺点在所难避免,希望读者能给予指正,让此书稿达到“抛砖引玉”的目的吧!

邹叔鑫

2011年冬于福州

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

◎

目录

数论三角形的由来

第一章

德国数学家高斯说:“数学是科学之王,数论是数学之王,它常常屈尊去为天文学和其他自然科学效劳,但在所有的关系中,它都堪称第一.”数论是研究数的规律,特别是研究整数性质的一个数学分支.数论可分成初等数论、解析数论和代数数论.初等数论是用算术方法研究整除、不定方程和同余式等有关问题的数论分支,它区别于数论的其他分支.数论是一个具有几千年历史的经典学科,也是最富含人类智慧的一个纯数学分支,国内外许多著名数学家,都从事过数论问题的研究.数论的研究方法及其成果,对数学的其他分支及自然科学的不少学科一直都起着积极的推动作用.

在华盛顿地区史密斯森的历史和技术博物馆门口,建起了一座不锈钢制的麦比乌斯带雕塑.在2010年上海举办的世博会中国湖南馆里,也有麦比乌斯带那种大型单侧曲面展现在人们的视野之中.因此,大家所熟悉的麦比乌斯带,就是

把一个平面带扭转半圈再把两端相接而构成一个单侧曲面,它是德国数学家麦比乌斯在 1858 年发现的. 自那以后,这种带就以他的名字来命名(如图 1).

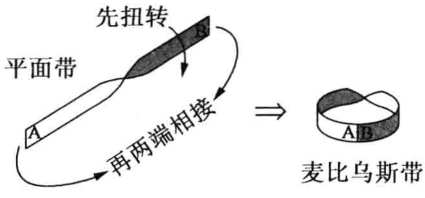


图 1

我们不需要用剪刀沿着麦比乌斯带的中间线破成“二分”后的条环状(即不会把麦比乌斯带剪成两半而得到两个纸圈,却是比原来的麦比乌斯带长一倍、窄一半而又是有两面的纸圈),去探索它的拓扑性质,而是从麦比乌斯带只有一个单侧曲面的现象进行启发性的联想,把平面带换成正棱柱体来扭转,也就是由一个正三棱柱体或一个正四棱柱体或一个正五棱柱体或一个正六棱柱体……按照顺时针方向扭转其横面正边形,再把两端横面相接就构成许多不同规格的环,这种环就称为正多棱环,也称为麦比乌斯环(如图 2).

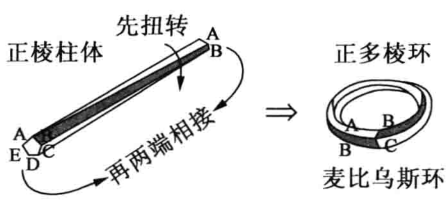


图 2

不同的思路,可以引向不同的境界,可以说是“别开生面”. 我们按此思路去探索:对于同一棱柱体,如

果按照不同顺序扭转其横面正边形而两端相接，就能构成许多的麦比乌斯环. 而且，它们在面数的形状与数量上也会有很多不相同之处. 例如：

我们从上述的棱柱体数和扭转顺序数而得到麦比乌斯环的面数规律如下：

平面带	1	$\boxed{2}$				
三棱柱体	1	1	$\boxed{3}$			
四棱柱体	1	2	1	$\boxed{4}$		
五棱柱体	1	1	1	1	$\boxed{5}$	
六棱柱体	1	2	3	2	1	$\boxed{6}$

拓广是人们认识世界、研究世界的重要手段，也是从具体到抽象、从特殊到一般、从表面到本质、从低维到高维等的过渡. 拓广是力求探索更广范围的概念、结论的统一，也是数学发展的缘由和根蒂.

我们拓广出下列直角三角形的数字排式：

$\boxed{0}$

$\boxed{1}$

1 $\boxed{2}$

1 1 $\boxed{3}$

1 2 1 $\boxed{4}$

$\boxed{5}$ 1 1 1 1 $\boxed{5}$

1 2 3 2 1 $\boxed{6}$

1 1 1 1 1 1 $\boxed{7}$

1 2 1 4 1 2 1 $\boxed{8}$

1 1 3 1 1 3 1 1 $\boxed{9}$

$\boxed{10}$ 1 2 1 2 5 2 1 2 1 $\boxed{10}$

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 $\boxed{11}$

1 2 3 4 1 6 1 4 3 2 1 $\boxed{12}$

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 $\boxed{13}$

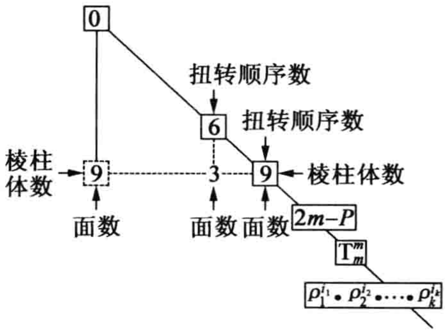
1 2 1 2 1 2 7 2 1 2 1 2 1 $\boxed{14}$

$\boxed{15}$ 1 1 3 1 5 3 1 1 3 5 1 3 1 1 $\boxed{15}$

1 2 1 4 1 2 1 8 1 2 1 4 1 2 1 $\boxed{16}$

⋮

注解　(1)“□”内的数在横向上表示棱柱体数，在竖向上表示扭转顺序数；当棱柱体数和扭转顺序数重合相等时，则方框内的数也就是面数.“⬚”在某种特殊情况下使用，其扭转顺序数可视为零，理解是正多边棱柱体没有扭转而两端相接的特殊的麦比乌斯环.“□”内的数，有时用数值表示，有时用代数式表示. 例如：



(2)“·”上的数在横向上表示面数排列的单、双对称中心点. 例如：

12 棱柱体：1　2　3　4　1　$\underset{\cdot}{6}$　1　4　3　2　1

（单对称中心点）

15 棱柱体：1　1　3　1　5　3　$\underset{\cdot}{1}$　$\underset{\cdot}{1}$　3　5　1　3　1　1

（双对称中心点）

单对称中心点是某个偶数的横向排式的一个对称中心点，其数值是这个偶数值的一半；双对称中心点是某个奇数的横向排式的两个对称中心点，其数值都是 1.

(3)“____”上的数在横向上表示十位数以上的面数值，有时也用来表示代数式的整体. 例如：

360 棱柱体：1 2 3 4 5 6 1 8 9 $\underline{10}$ 1 $\underline{12}$ 1 2 $\underline{15}$ 8 1 $\underline{18}$ 1 $\underline{20}$⋯ $\boxed{360}$ 以及 $\underline{6m}$，$\underline{T_m^m}$，$\underset{\cdot}{\underline{2^{n-1}}}$ 等等.

翻阅数学资料，我们就会知道一些数字三角形. 其

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

中，大家最熟悉的贾宪三角形（即帕斯卡三角形，或称算术三角形）：

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&2&&1&&&&&\\
&&&&1&&3&&3&&1&&&&\\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&&\\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&\\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&\\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1\\
&&&&&&&\vdots&&&&&&&
\end{array}
$$

生成规则

$$\boxed{a}+\boxed{b}=\boxed{c}$$

德国数学家莱布尼茨发现的分数数字三角形，人称莱布尼茨三角形（或称调和三角形）：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&\frac{1}{1}&&&&&&\\
&&&&&\frac{1}{2}&&\frac{1}{2}&&&&&\\
&&&&\frac{1}{3}&&\frac{1}{6}&&\frac{1}{3}&&&&\\
&&&\frac{1}{4}&&\frac{1}{12}&&\frac{1}{12}&&\frac{1}{4}&&&\\
&&\frac{1}{5}&&\frac{1}{20}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{20}&&\frac{1}{5}&&\\
&\frac{1}{6}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{60}&&\frac{1}{60}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{6}&\\
\frac{1}{7}&&\frac{1}{42}&&\frac{1}{105}&&\frac{1}{140}&&\frac{1}{105}&&\frac{1}{42}&&\frac{1}{7}\\
&&&&&&\vdots&&&&&&
\end{array}
$$

生成规则

$$\boxed{a}=\boxed{b}+\boxed{c}$$

英国数学家斯特林的直接计算第二类斯特林数排成数字三角形，人称斯特林三角形：

0	1						
0	1	1					
0	1	3	1				
0	1	7	6	1			
0	1	15	25	10	1		
0	1	31	90	65	15	1	
0	1	63	301	350	140	21	1

⋮

生成规则

$$\boxed{a}+\boxed{b}\times k = \boxed{c}$$

美国数学家贝尔的直接计算贝尔数排成数字三角形,人称贝尔三角形:

1							
1	2						
2	3	5					
5	7	10	15				
15	20	27	37	52			
52	67	87	114	151	203		
203	255	322	409	523	674	877	
877	1 080	1 335	1 657	2 066	2 589	3 263	4 140

⋮

生成规则

$$\boxed{a}+\boxed{b}=\boxed{c}$$

数字三角形还有许多是依照一定规律产生的,由于它们生成或简单、或规律,且使用方便快捷,又性质奇妙生动,因而备受人们的青睐.

由不同棱柱体数与不同扭转顺序数所构成的麦比乌斯环的面数值,可以组成一种特殊的直角三角形的数字排式.这种特殊的数字三角形即含有上述的几种数字三角形排式,又具有数论的部分内容及其性质,因此我们就把它称为数论三角形.

高斯还说:“在数论中,由于意外的幸运颇为经常,所以用归纳法可以萌发出极漂亮的新真理.”归纳是从特殊例子推出一般规律,或者从提出事实到证明一般命题的过程. 在数论三角形的探索过程中,我们确实是采用归纳法来推出它的一般规律.

第二章

数论三角形的性质

瑞士数学家欧拉曾经说过:“在仍然是很不完善的数论中,还得把最大的希望寄托在观察之中;这些观察将导致我们继续获得以后尽力予以证明的新的性质.”因此,我们探索的是将思维引向对面前出现的一切材料作出有充分根据的正确判断的清晰理论——数论三角形的性质.

如何进一步了解数论三角形呢?我们可以从它的性质谈起.

一、对称性

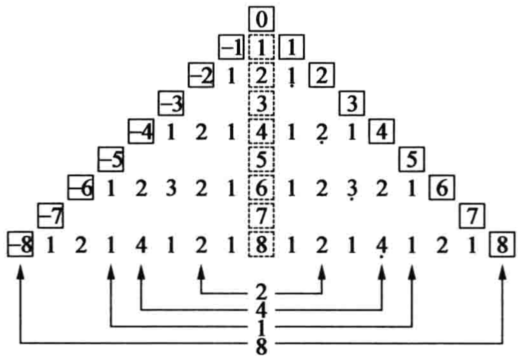
1. 点对称

在相对于单对称中心点或双对称中心点的横向上,首末两端“等距离”的两个数值相等. 例如:

$$\overbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 1}^{\text{前半排}}\ \dot{6}\ \overbrace{1\ 4\ 3\ 2\ 1}^{\text{后半排}}\qquad \overbrace{1\ 1\ 3\ 1\ 5\ 3\ \dot{1}}^{\text{前半排}}\ \overbrace{\dot{1}\ 3\ 5\ 1\ 3\ 1\ 1}^{\text{后半排}}$$

2. **轴对称**

在相对轴对称中心(即竖向的零扭转顺序数轴)的横向上,正反向两端“等距离”的两个数值相等.例如:



二、等值性

横向、竖向和斜向的数字排式都相同,可构成等值三边形排式(其证明后见最大公因数);斜半向的数字排式是横向的前半排的数字排式.例如:

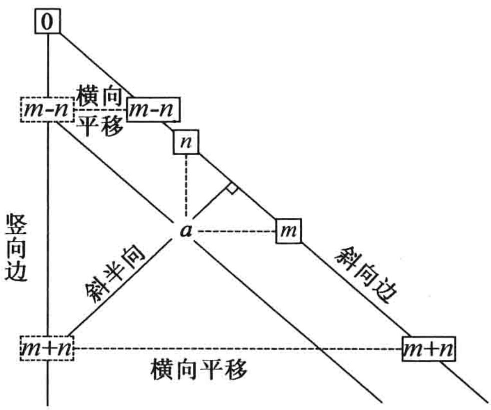
三、循环性

斜向和竖向的数字排式都是横向的数字排式的不

断循环. 例如:

四、加减性

m 横向数字排式和 n 横向数字排式的加减不是它们之间简单的排式数字的加减,而是通过棱柱体数 m 与扭转顺序数 n 的唯一面数 a,找出垂直于斜向边的斜半向的首端 $\boxed{m+n}$ 和平行于斜向边的斜向的首端 $\boxed{m-n}$,再由它们横向平移至斜向边的 $\boxed{m+n}$, $\boxed{m-n}$ 为末端,从而得出 $\boxed{m}+\boxed{n}=\boxed{m+n}$ 或 $\boxed{m}-\boxed{n}=\boxed{m-n}$ 横向加减法的数字排式. 例如:



此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com