

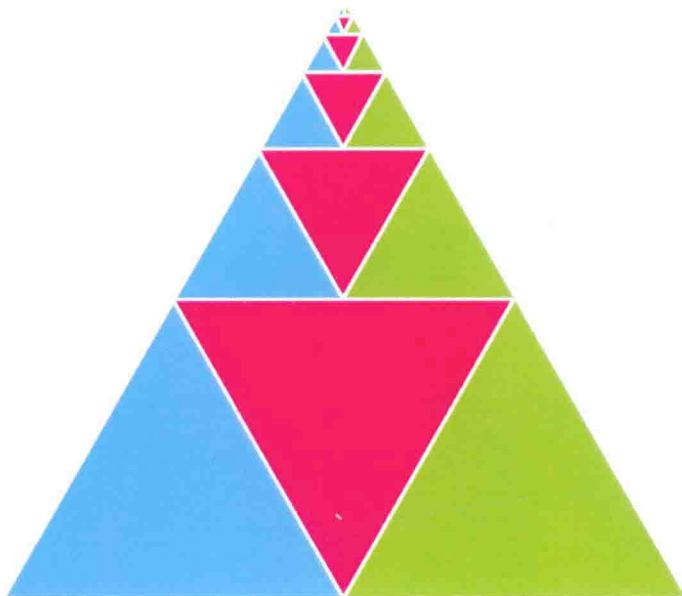


数学写真集

(第2季)

—— 无需语言的证明

(美) Roger B. Nelsen 编 肖占魁 符稳联 译



$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{3}$$



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



MAA
MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA

数学写真集 (第2季) ——无需语言的证明

[美] Roger B. Nelsen 编
肖占魁 符稳联 译



机械工业出版社

本书由 122 个“无需语言的证明”的图片组成，每个图片配有相关“证明”的数学结论。当从一个图片中悟出为何该图片证明了相应的数学结论时，读者便能够体会到数学绝妙的美，所以这本书取名为数学写真集。书中的素材选取自国际顶尖的数学杂志。

本书可以作为数学爱好者的休闲读物，也可作为学生的课外参考书，还可以作为中学和大学数学教师的教学素材。

Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking

© 2000 by The mathematical Association of America (Incorporated)

All Rights Reserved. Authorized translation from the English language edition published by Mathematical Association of America

北京市版权局著作权合同登记号：01-2013-1813

图书在版编目 (CIP) 数据

数学写真集. 第 2 季, 无需语言的证明 / (美) 尼尔森编; 肖占魁, 符稳联译. —北京: 机械工业出版社, 2014. 6

ISBN 978-7-111-46677-2

I. ①数… II. ①尼…②肖…③符… III. ①数学 - 通俗读物
IV. ①01 - 49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 097198 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 韩效杰 责任编辑: 韩效杰 汤 嘉

版式设计: 霍永明 责任校对: 张 薇

封面设计: 路恩中 责任印制: 乔 宇

北京机工印刷厂印刷 (三河市南杨庄国丰装订厂装订)

2014 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

169mm × 239mm · 8.75 印张 · 167 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-46677-2

定价: 29.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心: (010) 88361066 教材网: <http://www.cmpedu.com>

销售一部: (010) 68326294 机工官网: <http://www.cmpbook.com>

销售二部: (010) 88379649 机工官博: <http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线: (010) 88379203 封面无防伪标均为盗版

仅以此书怀念我的父亲和母亲

(Ann Bain Nelsen 和 Howard Ernest Nelsen)

前言

证明不是为了让你相信某些事物是正确的，而是向你展示它为什么是正确的。

——Andrew Gleason

一个好的证明可以使我们更聪明。

——Yu. I. Manin

许多工作都是在为那些已经有了证明方法的定理寻找新的证明方法，而这仅仅是因为现存的方法不够美观。许多数学的证明方法仅是让人信服，借用著名的数学物理学家 Lord Rayleigh 的名言，“他们迫使大家同意这些证明方法”。但其实还有许多其他优美和充满智慧的证明方法。“它们让人们欣喜并情不自禁地呐喊：阿门，阿门。”一个优美的证明方法就像一首诗，其结构就蕴含在这首诗里面。

——Morris Kline

什么是“无需语言的证明呢？”正如你将从这套丛书的第2季上看到的，这个问题并没有一个简单明了的答案（丛书的第1季，**Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking**，已经在1993由美国数学协会出版，中文版《数学写真集（第1季）——无需语言的证明》由机械工业出版社出版）。一般地，无需语言的证明（PWWs）就是用一些图和图表来帮助读者了解为什么一个具体的数学命题是正确的，同时也让读者了解怎样去证明它是正确的。有些时候在整个证明过程中会配有一两个等式来引导读者。然而，关键之处是所提供的可视化思维能够激发读者的数学思想。

在由美国数学协会出版的期刊中 PWWs 是王牌栏目。PWWs 首先是出现在约 1975 年的《数学杂志》上，十年后又出现在《数学校刊》上。

但无需语言的证明并不是最近的创新，它们已经有很长一段历史了。在本书中你会发现 PWWs 的许多现代思想来自于古代中国、10 世纪的阿拉伯和文艺复兴时期的意大利。PWWs 现在也会出现在其他的杂志和期刊里，包括美国以及海外出版的杂志，甚至还会出现在互联网上。

当然，有些人就认为 PWWs 并不是真正的“证明”（其实它们并不是“无需语言的，”因为等式都会配有一个 PWW）。在 James Robert Brown 最近的《数学哲学：有关证明与图形世界的介绍》（1999 年伦敦劳特利奇出版社）一书中有记载：

“数学家，就像我们中的一些人，会珍惜聪明的想法；特别地，他们会因为一个巧妙的图形而高兴。但这种欣赏并不会淹没一个普遍的怀疑。毕竟，一个图表（当然是最好的情况下）仅仅只是一种特殊情况，所以并不能建立一个一般的定理。更糟糕的是，它也许会成为一個彻底的误导。即使不是很普遍，但一般的观点就是图画确实没有启发式教育的受益多；它们在心理暗示方面和在教学方法上是很重要的，但是却没有证出任何结论。我要反对这种观点并且要说明图画在证明过程中真的有起到一个有效的作用——是一个比启发式教育还要好很多的角色。简而言之，图形能够证明定理。”

在 PWWs 的第 1 季的前言中，我建议老师能将 PWWs 介绍给学生们。第 1 季书的一些读者向我咨询，PWWs 在课堂上以何种方式使用。来自各个学习水平的师生对于使用 PWWs 均有回复，包括在高中学习微积分的必修课程，大学教育的微积分学、数论、组合数学，以及教师的课前预习和授课中都有。PWWs 经常用于补充或甚至用来代替教科书上的证明，例如：勾股定理、整数求和的公式、关于正方形以及立方体方面的问题。其他的就广泛地使用在常规作业中、额外加分的问题中、学生在课堂的自由发言当中、甚至是在单元考卷和课堂项目中。

需要指出的是，该书如第 1 季一样总有不完备的地方。它没有包含所有的 PWWs，它既没有全部包含自 1993 年第 1 季出版后出现在各类出版物上的 PWWs 也没有包含我编辑第 1 季书时搜集的所有 PWWs。数学协会期刊的读者们肯定已经发现，出现在出版物中新的 PWWs 更加频繁了，并且它们现在也会出现在互联网上并以优越的形式展示出来，其中包括动画和互动。

我希望阅读该书的读者在探索或再次探索一些数学思想优美的视觉示例时能够发现其中的乐趣；教师也能够将它们分享给學生；并且希望所有的读者能够得到鼓舞去创造新的不需要语言的证明。

致谢：我对所有将 PWWs 发表在数学杂志上的人表达感激和感谢之情，见书后的英文人名索引。没有他们的帮助，本书不会这么顺利地出版。感谢 Andy Sterrett 和教师资源材料（Classroom Resource Materials）编辑委员们对本书前稿的认真阅读，同时感谢他们提出的许多宝贵意见。还要感谢美国数学协会的成员 Elaine Pedreira, Beverly Ruedi 和 Don Albers 对我们的鼓励以及专业方面的意见和对出版本书做出的努力。

Roger B. Nelsen
路易克拉克大学
俄勒冈州，波特兰

注记：

1. 本书中的插图是重新画的，以达到一致的效果。少部分的实例标题有所改动，并且为了达到简练清楚的效果，阴影处和标记有所增加和减少。所有由以上过程而产生的错误都由我负责。

2. 在一些 PWWs 的标题中用到的罗马数字是用来区分相同定理的多样 PWWs 的，并且该编号方式是从第 1 季中延续下来的。例如，因为在第 1 季中有六个 PWWs 讲勾股定理，所以在本书中的“几何与代数”中的题目就继续保留为“勾股定理 VII”。

3. 在本书中一些以“解”的形式展示的 PWWs 是摘自一些数学竞赛中的题目，例如威廉·洛威尔普特南数学竞赛和加拿大数学奥林匹克竞赛。不过，这样的解在竞赛中可能得不到多少分数，比如在威廉·洛威尔普特南竞赛中“对于一个证明的所有步骤都必须全部详细地简练地列出来。”

4. 在前言开头的那三条引用语是来自 Rosemary Schmalz 发表的《Out of the Mouths of Mathematicians》（1993 年，华盛顿，美国数学协会出版）的第 75 页、62 页和 135 - 136 页。

目 录

前言

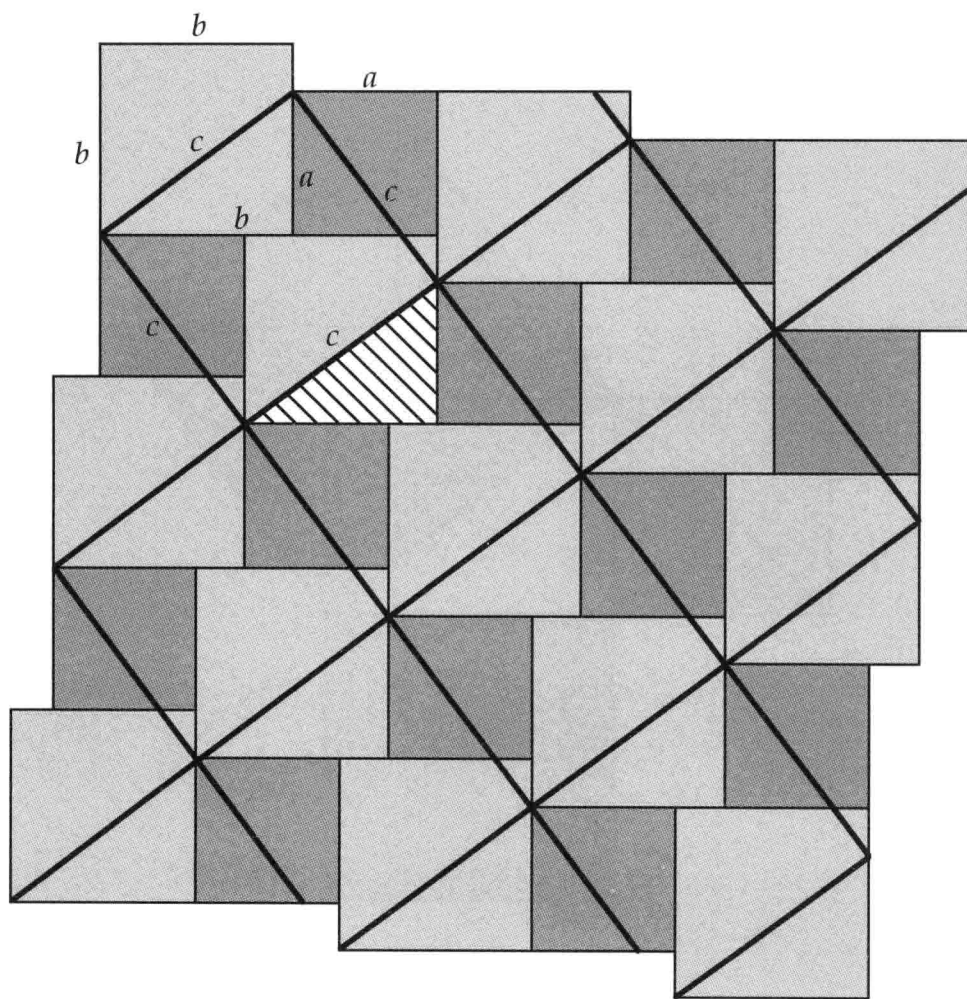
几何与代数	1
三角, 微积分与解析几何	37
不等式	69
整数求和	81
无穷级数, 线性代数及其他议题	109
文献索引	125
英文人名索引	129
中文人名索引	131

几何与代数

勾股定理Ⅶ	3
勾股定理Ⅷ	4
勾股定理Ⅸ	5
勾股定理Ⅹ	6
勾股定理Ⅺ	7
勾股定理Ⅻ	8
勾股定理的推广	9
希俄斯的希波克拉底定理.....	10
带有锐角 $\pi/12$ 的直角三角形的面积	11
直角三角形的不等式.....	12
直角三角形的内接圆半径.....	13
一个三角形的周长与其内接圆半径的积等于该三角形面积的两倍.....	14
四个面积相等的三角形.....	15
由三角形的中线构成的三角形的面积等于原三角形面积的 $\frac{3}{4}$	16
三角形的等分切割与重组.....	17
月刊上的黄金分割问题.....	18
由正方形与平行四边形构成的图形.....	19
四边形的面积Ⅰ	20
四边形的面积Ⅱ	21
内含正方形的正方形.....	22

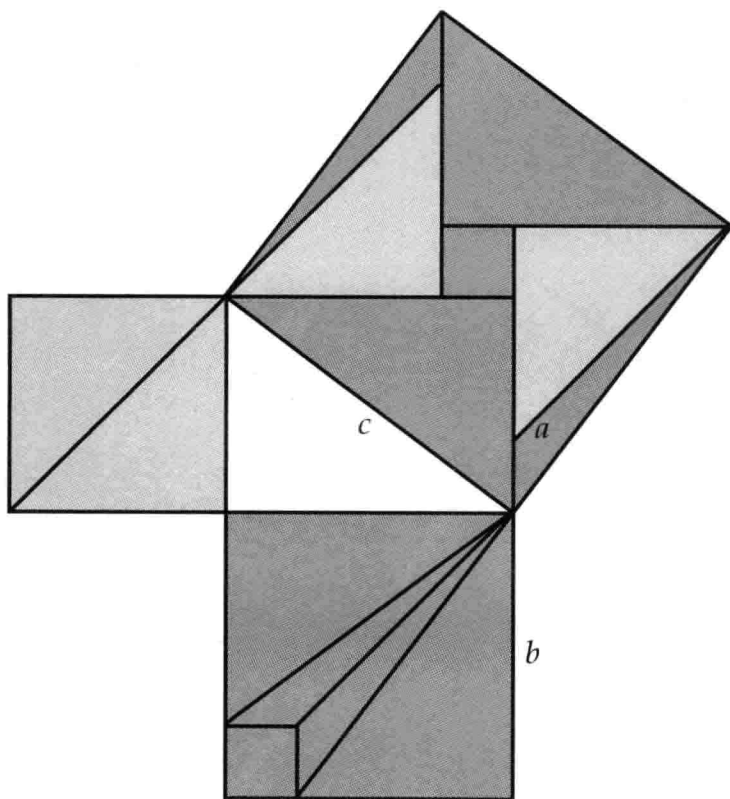
正多边形的周长与面积·····	23
普特南八角形的面积·····	24
普特南十二边形·····	25
正十二边形的面积·····	26
比萨的公平分配·····	27
三圆定理·····	28
一条固定的弦·····	29
一个普特南面积问题·····	30
多边形拱的面积·····	31
多边形拱的长度·····	32
一个金字塔形锥体的截头锥体的体积·····	33
四个满足等差数列的数之积总是可以表示为两个数的平方差·····	34
代数领域Ⅲ：平方和的因式分解·····	35

勾股定理VII



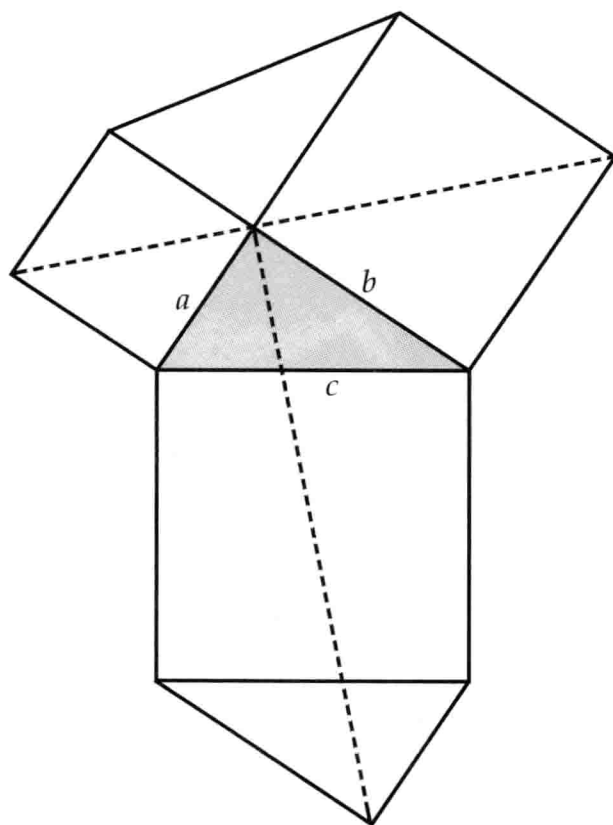
——阿拉伯的安奈瑞兹（Annairizi）（大约在公元 900 年）

勾股定理VIII



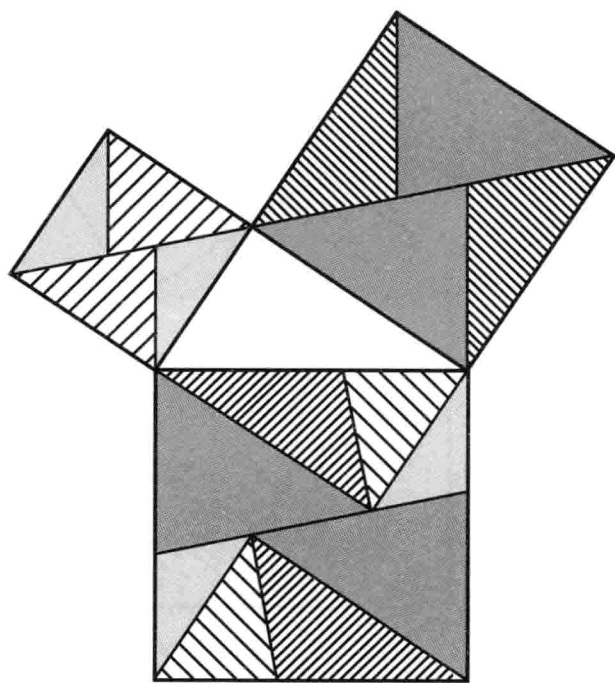
——刘辉 (Liu Hui) (公元3世纪)

勾股定理 IX

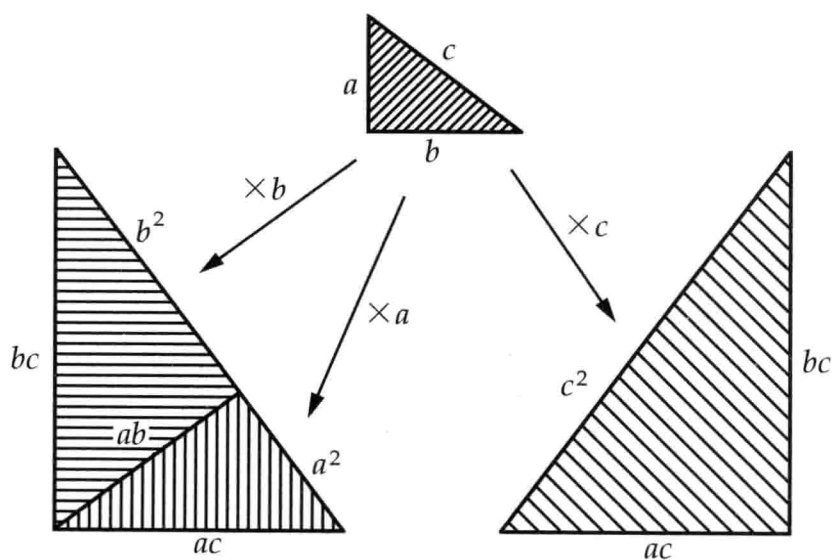


——莱昂纳多·达芬奇 (Leonardo da Vinci) (1452 ~ 1519)

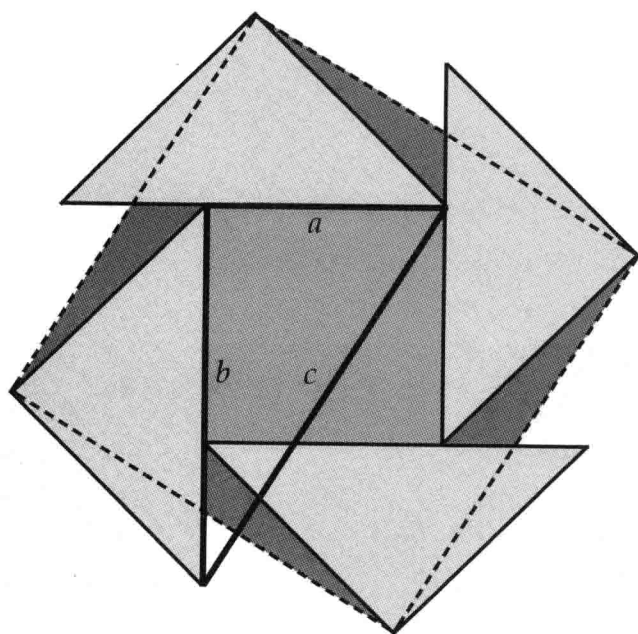
勾股定理 X



勾股定理 XI



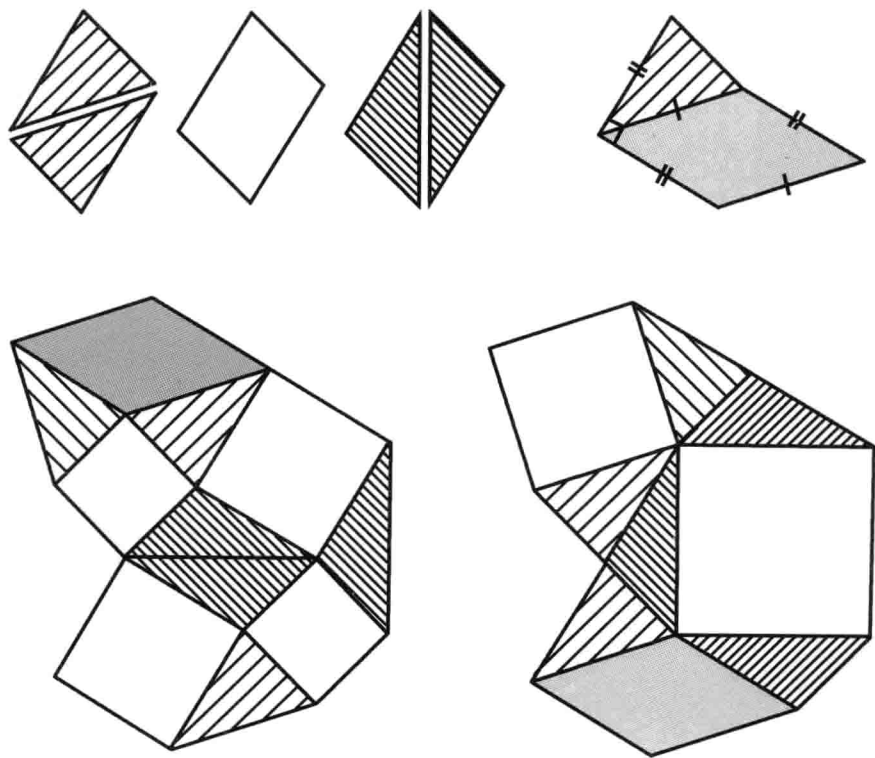
勾股定理XII



$$a^2 + b^2 = c^2$$

勾股定理的推广

给出两个正方形，它们的边长分别是给定平行四边形的两条对角线的长度；再由平行四边形的四条边构成四个正方形，则前两个正方形的面积和等于后四个正方形面积的和。



推论：勾股定理（当平行四边形是矩形的时候）

——大卫 S. 怀斯 (David S. Wise)