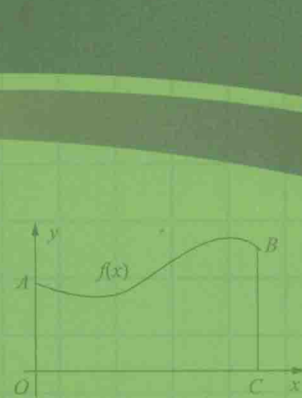
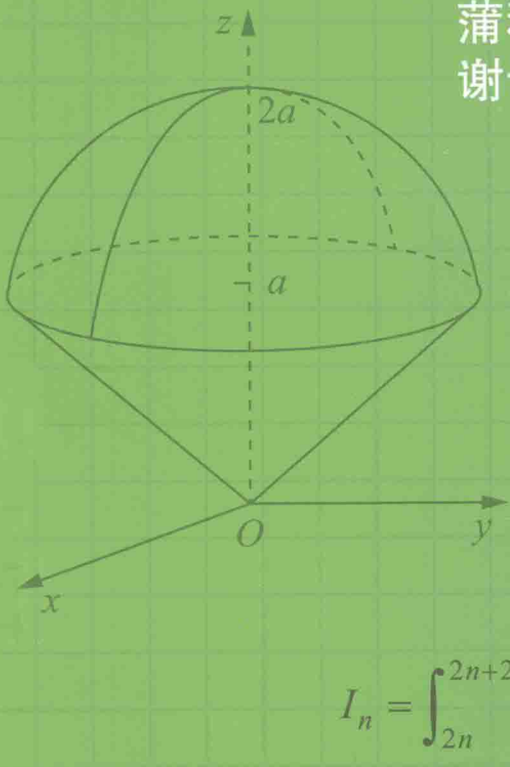
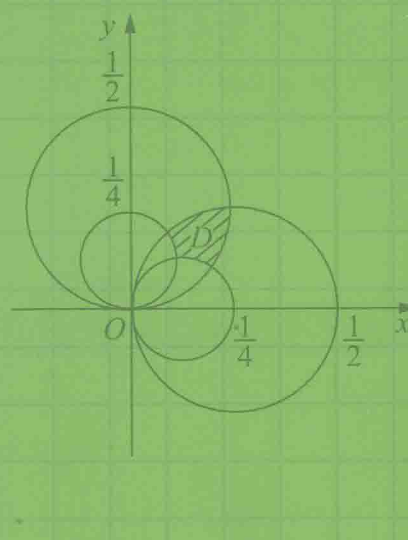
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\quad(x>0)$$



大学生
数学竞赛教程

蒲和平◎编著
谢云荪◎主审





$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\iint_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

$$I_n=\int_{2n}^{2n+2} f(x-2n)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x(n=2,3,\ldots)$$

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

大学生数学竞赛教程

蒲和平　编著

谢云荪　主审

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内容简介

本书是依据全国大学生数学竞赛（非数学类）考试大纲要求，与现行高等数学教材内容基本同步的一本学习指导书。全书精选例题、习题千余道，题目典型，题型丰富，涵盖面广，综合性强，极具代表性。书中对每个例题都给出了解题前的简要分析，并及时归纳总结一般性的数学方法，有益于读者的学习与提高。书中各章节都配有一定量的习题并附有答案与提示，对难度较大的题目归入“综合题”并附有详细解答。为使读者了解全国大学生数学竞赛（非数学类）的赛题难度，书中给出了近五年的全国赛题（初赛、决赛）及解答。为便于读者自我检测，本书还根据全国竞赛的难易度设计了十套“模拟试题”并配有解答。

本书适合作为大学生数学竞赛（非数学类）培训课程的教材。由于本书知识内容与现行高等数学教材基本同步，并且是教材内容的很好补充与拓展，所以也适合作为高等数学课程的学习指导书；本书对准备报考全国理工类硕士研究生的数学复习也有很好的帮助与指导作用。

图书在版编目 (CIP) 数据

大学生数学竞赛教程 / 蒲和平编著．一北京：电子工业出版社，2014.7
ISBN 978-7-121-23332-6

I. ①大⋯ II. ①蒲⋯ III. ①高等数学－高等学校－教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 110750 号

策划编辑：任欢欢
责任编辑：章海涛
印　　刷：三河市鑫金马印装有限公司
装　　订：三河市鑫金马印装有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：31　字数：892.8 千字
版　　次：2014 年 7 月第 1 版
印　　次：2014 年 7 月第 1 次印刷
定　　价：56.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010)88258888。

前　　言

全国大学生数学竞赛自2009年开展以来吸引了各高校众多优秀学生的参加，这项活动对推动我国高校人才培养起到了十分积极的作用。为帮助广大本科学生学好数学，为有意参加全国大学生数学竞赛的学子复习准备之用，我们特编写了这本《大学生数学竞赛教程》，本书对准备报考全国理工类硕士研究生的数学复习也有很好的帮助与指导作用。

本书是**依据全国大学生数学竞赛（非数学类）考试大纲要求，结合作者多年的教学实践所编写的。为便于读者学习，书中各章节内容与现行高等数学教材内容基本同步**，但考虑到题目的综合性与解题方法的多样性，个别地方又不完全局限于教材内容的范围。

本书力图为读者系统地掌握高等数学的知识、提高分析问题解决问题的能力、掌握数学的基本方法、全面提高数学素养提供帮助。

考虑到读者已具备高等数学的基本知识，本书不再对高等数学教材中的概念与定理进行系统罗列，而是在每章开头以框图的形式简要概括本章的主要内容，读者可根据框图去梳理本章的知识，了解知识间的有机联系，掌握各章内容的知识体系。熟悉所学知识是提高解决问题能力的必要条件。

解决问题的关键是正确建立未知与已知的联系，将未知有效地转化为已知。这需要我们科学地分析，需要积累一些有效的数学方法。为此，**我们对书中的每个例题都给出了解题前的简要“分析”，对具有一般意义的方法则通过解题后的“评注”予以总结、归纳。对解题中用到的读者较为生疏的知识也放在了“评注”中，以便查阅参考。书中不少题目还给出了多种解法，其中不乏作者的独特见解，有些方法十分精妙，对启迪思维、开阔眼界很有帮助。**

书中题目多数选自国内外大学生数学竞赛的一些特色赛题，**部分来自全国考研试题和传统经典题目，还有不少是我们在多年教学中为培训学生，自己编创的题目，这些自编题都很有特色、很有新意。**全书精选例题、习题千余道，题目典型，题型丰富，涵盖面广，综合性强，极具代表性。

书中部分例题、习题相对竞赛来说略为简单，读者可根据自己的基础情况有选择地学习。选择这些题目是为了**不同程度学习者**的需要，更主要的是想通过这些例题来介绍数学中的一般性方法；此外，综合性问题也都需要拆分为一系列简单问题来解决。学好数学，需要一定的“简单”来铺垫。书中的多数例题、部分习题与各章综合题都适合竞赛选用。各章节的习题难度不是太大，读者可选择部分做练习（事实上，每次全国竞赛题中都有不少一般难度的题目，这个难度与“考研”试题相当），附录中给出了它们的答案与提示；各章的综合题具有一定的难度，为便于读者学习，附录中给出了它们的详细解答（部分题还给出了多种解法）。

为便于读者自我检测，附录中给出了**十套“模拟试题”**，其题型、题量与难易程度都与全国数学竞赛试题相当，并附有详细解答，读者可根据自身情况定时进行测试。**从今年开始，线性代数已纳入全国数学竞赛（非数学类）的范畴（占约20%的比例），所以在模拟题中也加入了线性代数的内容。考虑到本书的篇幅，在正文中没再纳入线性代数的内容。**

为便于读者了解全国大学生数学竞赛（非数学类）试题的要求，附录中列出了**近五年来全国竞赛（初赛、决赛）的试题与解答**，供读者参考。

本书是作者多年教学工作的积累与总结，也在学生的培养中收到了很好的效果。希望本书能对读者的学习，对教师的教学工作起到良好的帮助作用。

电子科技大学谢云苏教授负责本书的审读工作，并对本书的编写提供了不少的帮助与支持，提出了很多好的建议，在此表示诚挚的感谢！

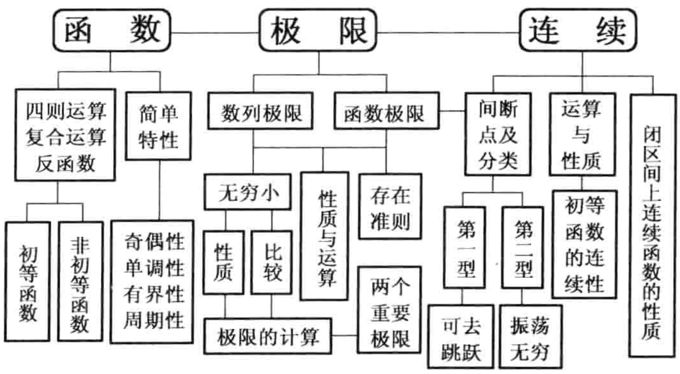
作　者

2014 年 6 月于成都

目　录

第 1 章　函数、极限、连续

知识结构



1.1　函数

微积分的主要任务是研究函数的性态及变化规律. 确定函数表达式是研究函数最基本的工作，它可涉及各种初等运算，也可涉及极限、导数、积分、级数等多种非初等运算；函数的单调性与有界性常借助于导数来作研究；确定函数表达式一般性的方法属于微分方程的范畴；这些内容我们将在以后的不同章节中作讨论，这里以初等方法为主介绍一些有关函数表达式及简单性质的问题. 这些问题虽然较为初等、简单，但它们是构成复杂或综合问题的基础.

例 1　设　$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1 \\ x, & x\geqslant 1 \end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases} x+2, & x<0 \\ x^2-1, & x\geqslant 0 \end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$.

分析　引入中间变量 $u=\varphi(x)$，由外层函数定义域的各区间段，通过中间变量去得到自变量 x 的对应范围，进而确定出中间变量的具体表达式以得到复合函数.

解　记 $u=\varphi(x)$，则 $f[\varphi(x)]=f(u)=\begin{cases} e^u, & u<1 \\ u, & u\geqslant 1 \end{cases}$

当 $u<1$ 时：

$$\text{当 } x<0 \text{ 时，} u=x+2<1, \Rightarrow x<-1,\ f[\varphi(x)]=e^{x+2}$$

$$\text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时，} u=x^2-1<1, \Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2},\ f[\varphi(x)]=e^{x^2-1}$$

当 $u\geqslant 1$ 时：

$$\text{当 } x<0 \text{ 时，} u=x+2\geqslant 1, \Rightarrow -1\leqslant x<0,\ f[\varphi(x)]=x+2$$

$$\text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时，} u=x^2-1\geqslant 1, \Rightarrow x\geqslant\sqrt{2},\ f[\varphi(x)]=x^2-1$$

综上所述，得

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1\\ x+2, & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$$

评注 求分段函数的复合函数的关键是要确定外层函数的自变量在不同段的代入目标，引入中间变量作讨论是比较清晰的方法.

例 2 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}\ (x>0)$, 求 $f(x)$ 的显式表达式.

分析 只需算出极限即可.

解 由极限运算的夹逼法则可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}=\max\{a,b,c\}\quad(a,b,c>0)$$

所以

$$f(x)=\max_{(0,+\infty)}\left\{1,x,\frac{x^2}{2}\right\}=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant1\\ x, & 1<x\leqslant2\\ \dfrac{x^2}{2}, & x>2\end{cases}$$

评注 分段函数是微积分学中常涉及的非初等函数类，这类函数的形式除了明显的分段表示外，较常见的还有：绝对值函数、取整函数、最大（小）值函数，以及由极限形式给出的函数. 在研究这类函数的极限以及连续性、可导性、积分性质时，要特别注意分段点的特殊性.

例 3 设$F(x)$除$x=0$与1两点外，对全体实数都有定义并且满足等式 $F(x)+F\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1+x$, 求函数 $F(x)$.

分析 对所给等式（方程）作变量代换，得到$F(x)$的相关方程组，解代数方程组即可得到$F(x)$的表达式.

解 设已知等式为①，将①式中的x换为$\dfrac{x-1}{x}$得

$$F\left(\frac{x-1}{x}\right)+F\left(-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{2x-1}{x}\qquad ②$$

将②式中x换成$-\dfrac{1}{x-1}$得

$$F\left(-\frac{1}{x-1}\right)+F(x)=\frac{x-2}{x-1}\qquad ③$$

①+③−②得

$$2F(x)=1+x+\frac{x-2}{x-1}-\frac{2x-1}{x}$$

所以

$$F(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$$

评注 若待定函数及其复合形式包含在一个代数方程中，通常可作变量代换得到关联方程，再解方程组求出待定的函数.

例 4 设连续函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x)-\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{x}{2}\right)=x^2$，求 $f(x)$ 的表达式.

分析 已知方程给出了函数的递推关系式，逐次代入最后求极限就可得到 $f(x)$ 的表达式.

解　由已知条件有

$$f(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)+x^2$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2^2}\right)+\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)+\left(\frac{x}{2^n}\right)^2$$

将上面等式从后往前依次代入得

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2^{n+1}}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)+\frac{1}{2^n}\left(\frac{x}{2^n}\right)^2+\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)^2+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+x^2\\&=\frac{1}{2^{n+1}}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)+x^2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{3k}}\end{aligned}$$

取 $n\to\infty$，由 f 的连续性及 $f(0)=0$ 可得

$$f(x)=x^2\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{8}{7}x^2$$

评注　本例与例 3 是同类型问题，但作变量代换得不到能有效解出 $f(x)$ 的关联方程. 将递推关系式视为方程组（无穷个），求解时（依次代入）需用到处理无穷的方法——极限.

例 5　设 $f(x)=(x^6+2x^5-10x^4-12x^3+18x^2+30x-210)^{2014}$，求 $f\left(\dfrac{\sqrt{45}-1}{2}\right)$.

分析　直接计算函数值很困难，若令 $t=\dfrac{\sqrt{45}-1}{2}$，则有 $t^2+t=11$，只需将 $f(t)$ 的表达式拼凑成以 t^2+t 为变量的形式即可.

解　记 $t=\dfrac{\sqrt{45}-1}{2}$，则 $(2t+1)^2=45$，从而知 $t^2+t=11$，于是

$$\begin{aligned}&t^6+2t^5-10t^4-12t^3+18t^2+30t-210\\&=(t^6+t^5)+(t^5+t^4)-(11t^4+11t^3)-(t^3+t^2)+(19t^2+19t)+11t-210\\&=(t^2+t)(t^4+t^3-11t^2-t+19)+11t-210\\&=11[(t^2+t)t^2-11t^2-t+19]+11t-210\\&=11(19-t)+11t-210=11\times19-210\\&=-1\end{aligned}$$

从而

$$f\left(\frac{\sqrt{45}-1}{2}\right)=f(t)=(t^6+2t^5-10t^4-12t^3+18t^2+30t-210)^{2014}=(-1)^{2014}=1$$

评注　该题的本质是求函数 g，使得 $f(x)=g(x^2+x)$，从而所求函数值为 $g(11)$.

例 6　已知定义在 $[0,4]$ 上的函数 $f(x)=3^x$，试先延拓至 $[-4,0]$ 使之成为偶函数，然后再把已延拓到 $[-4,4]$ 上的函数，延拓至整个实数轴上，使函数成为以 8 为周期的函数.

分析　由偶函数的定义 $f(-x)=f(x)$, 容易得到 $f(x)$ 在 $[-4,0]$ 上的表达式；若 $f(x)$ 以 8 为周期，由于对任意实数 x，都存在整数 k，使 $8k-4\leqslant x\leqslant 8k+4$，则有 $-4\leqslant x-8k\leqslant 4$，利用周期性，就容易得到 $f(x)$ 的表达式了.

解 当$x\in[-4,0]$时，$-x\in[0,4]$，若$f(x)$在$[-4,0]$上进行延拓后成为偶函数，则

$$f(-x)=f(x),(x\in[-4,4])$$

故$x\in[-4,0]$时，有

$$f(x)=f(-x)=3^{-x}$$

因此有

$$f(x)=\begin{cases}3^{x}, & x\in[0,4]\\ 3^{-x}, & x\in[-4,0]\end{cases}$$

如果再将$f(x)$延拓至整个实数轴上，使之成为以8为周期的函数，那么，对于任何实数x，都唯一地存在整数k，使

$$8k-4\leqslant x\leqslant 8k+4$$

当$8k-4\leqslant x\leqslant 8k$时，有$-4\leqslant x-8k\leqslant 0$，此时

$$f(x)=f(x-8k)=3^{-(x-8k)}=3^{8k-x}$$

当$8k\leqslant x\leqslant 8k+4$时，有$0\leqslant x-8k\leqslant 4$，此时

$$f(x)=f(x-8k)=3^{x-8k}.$$

因此得

$$f(x)=\begin{cases}3^{-x+8k}, & 8k-4\leqslant x\leqslant 8k\\ 3^{x-8k}, & 8k\leqslant x\leqslant 8k+4\end{cases}$$

例 7 设函数$y=f(x)\,(-\infty<x<+\infty)$的图形关于点$A(a,y_1)$和点$B(b,y_2)$ $(a<b)$对称，试讨论函数$f(x)$的周期性.

分析 由函数图形的对称性可知$f(a+x)+f(a-x)=2y_1, f(b+x)+f(b-x)=2y_2$，只需讨论是否存在常数$T\neq 0$，使得$\forall x\in\mathbf{R}$有$f(x)=f(x+T)$.

解 由于函数$y=f(x)$的图形关于点$A(a,y_1)$和点$B(b,y_2)$对称，则

$$f(a+x)+f(a-x)=2y_1,\quad f(b+x)+f(b-x)=2y_2,$$

于是

$$\begin{aligned}f(x)&=f[a+(x-a)]=2y_1-f[a-(x-a)]\\&=2y_1-f(2a-x)=2y_1-f[b+(2a-x-b)]\\&=2y_1-2y_2+f[b-(2a-x-b)]=2(y_1-y_2)+f[x+2(b-a)]\end{aligned} \tag{①}$$

由此可知，当$y_1=y_2$时，$f(x)$是周期函数，其周期为$2(b-a)$.

当$y_1\neq y_2$时，记$f(x)=px+q+\varphi(x)$，式中p,q为常数，由①得

$$\begin{aligned}2(y_2-y_1)&=f[x+2(b-a)]-f(x)\\&=p\cdot[x+2(b-a)]+q+\varphi[x+2(b-a)]-[px+q+\varphi(x)]\\&=2(b-a)p+\varphi[x+2(b-a)]-\varphi(x)\end{aligned}$$

取$p=\dfrac{y_2-y_1}{b-a}$，则有 $\varphi[x+2(b-a)]-\varphi(x)=0$，即$\varphi(x)$是以$2(b-a)$为周期的函数. 此时$f(x)$是一个线性函数与周期函数之和.

习题 1.1

1. 设$g(x)=\begin{cases}2-x, x\leqslant 0\\ x+2, x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, x<0\\ -x, x\geqslant 0\end{cases}$，求 $g(f(x))$.

2. 已知$f(x)$满足等式 $2f(x)+x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$，求$f(x)$的表达式.

3. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n-\mathrm{e}^x\right]$，求$f(x)$的显式表达式.

4. 设函数 $F(x)$是奇函数，$f(x)=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$，其中$a>0,a\neq 1$. 证明：$f(x)$是偶函数.

5. 设对一切实数 x，有 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，证明 $f(x)$ 是周期函数.

6. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足等式 $f(3-x)=f(3+x), f(8-x)=f(8+x)$，且 $f(0)=0$，试问：方程 $f(x)=0$ 在区间$[0,2014]$上至少有多少个根.

7. 设 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(x+T)=kf(x)$（其中 T 和 k 是正常数），证明 $f(x)$ 可表示为 $f(x)=a^x\varphi(x)$，式中 $a>0,\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

8. 若对任意 x,y，有 $f(x)-f(y)\leqslant(x-y)^2$，求证对任意正整数 n，任意 a,b，有

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{1}{n}(b-a)^2$$

1.2　极限

微积分是建立在极限理论的基础上的. 极限反映了变量的局部性态与变化趋势，是实现无穷运算的唯一方法. 极限理论主要包括其存在性、相关性质与极限的计算等方面的内容. 工科数学尤以极限的计算为主，下面将求极限的常用方法一一归类介绍.

1. 初等变形法

用初等运算、变量代换、恒等变形等方法将极限式化简，再由极限的四则运算、复合运算法则求出极限，是极限运算最基本的方法. 因为极限四则运算法则的条件是：有限项，各项极限均存在，分母的极限不为零，所以化简的过程就是使极限式满足运算条件的过程.

例 1　设 $x_n=\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1+2}{n^3}+\cdots+\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^3}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析　随着 n 的增加，x_n 表现为无穷项的和. 为求极限，需将 x_n 作初等运算或恒等变形化为有限项和的形式，再用极限的运算法则计算极限.

解　由于
$$\begin{aligned}x_n&=\frac{1}{2n^3}[1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)]\\&=\frac{1}{2n^3}[(1^2+1)+(2^2+2)+\cdots+(n^2+n)]\\&=\frac{1}{2n^3}[(1+2+\cdots n)+(1^2+2^2+\cdots+n^2)]\\&=\frac{1}{2n^3}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]=\frac{n(n+1)(n+2)}{6n^3}\end{aligned}$$
所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{6}$.

评注　求无穷和的极限有很多方法，其基本方法之一就是通过初等运算、数列求和公式或恒等变形等方法化为有限运算形式（又称“缩项”），再计算极限.

例 2　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\cos\dfrac{\pi}{4n}+\cos\dfrac{3\pi}{4n}+\cdots+\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{4n}\right]$.

分析　利用三角函数的积化和差公式先“分拆”，再“缩项”.

解 由于 $x_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}=\dfrac{1}{n\cdot 2\sin\dfrac{\pi}{4n}}\sum\limits_{k=1}^{n}2\sin\dfrac{\pi}{4n}\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}$

$$=\frac{1}{n\cdot 2\sin\dfrac{\pi}{4n}}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\frac{k\pi}{2n}-\sin\frac{(k-1)\pi}{2n}\right]=\frac{1}{n\cdot 2\sin\dfrac{\pi}{4n}}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right),$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{2}{\pi}$.

评注 这里应用了三角公式：$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$. 其目的是将乘积转化为两项之差（分拆），从而在求和中达到缩项的效果. 常见的情况还有：

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n+b}\right)$$

$$\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+l)}=\frac{1}{l}\left[\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+l-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+l)}\right].$$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

分析 这是 $\dfrac{0}{0}$ 型极限. 应将分子有理化，进而约去分母中的零因子再求极限. 由于分子的有理化因式较繁，所以作变量代换效果更佳.

解 令 $\sqrt[6]{\cos x}=u$，则 $\sin^2 x=1-u^{12}$，

$$原式=\lim_{u\to1}\frac{u^3-u^2}{1-u^{12}}=-\lim_{u\to1}\frac{u-1}{u^{12}-1}=-\lim_{u\to1}\frac{u-1}{(u-1)(u^{11}+u^{10}+\cdots u+1)}$$

$$=-\lim_{u\to1}\frac{1}{u^{11}+u^{10}+\cdots+u+1}=-\frac{1}{12}$$

评注 对 $\dfrac{0}{0}$ 型的无理分式，分子、分母有理化是消去分母中零因子的有效方法. 当有理化因式较复杂时，作变量代换是比较好的有理化方法.

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)(1-x^{\frac{1}{3}})\cdots(1-x^{\frac{1}{n}})}{(1-x)^{n-1}}$.

分析 由于极限式为 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1-x^{\frac{1}{3}}}{1-x}\cdot\dfrac{1-x^{\frac{1}{4}}}{1-x}\cdots\dfrac{1-x^{\frac{1}{n}}}{1-x}\right)$，只需算出各因子 $\dfrac{1-x^{\frac{1}{i}}}{1-x}(i=3,\cdots,n)$ 的极限.

解 令 $x^{\frac{1}{i}}=t$，则 $\dfrac{1-x^{\frac{1}{i}}}{1-x}=\dfrac{1-t}{1-t^i}=\dfrac{1}{1+t+\cdots+t^{i-1}}$，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^{i}}{1-x}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{1}{1+t+\cdots+t^{i-1}}=\dfrac{1}{i}$.

所以 $$\lim_{x\to1}\frac{(1-x)(1-x^{\frac{1}{3}})\cdots(1-x^{\frac{1}{n}})}{(1-x)^{n-1}}=\lim_{x\to1}\left(\frac{1-x^{\frac{1}{3}}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{\frac{1}{4}}}{1-x}\cdots\frac{1-x^{\frac{1}{n}}}{1-x}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{n}=\frac{2}{n!}$$

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right)$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

分析 $[x]$是分段函数，$x=0$ 是分段点，需计算左右极限.

解 $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+2\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}+2=\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}+2=2$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+0\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left[e^{\frac{2}{x}}(e^{-\frac{2}{x}}+1)\right]}{\ln\left[e^{\frac{1}{x}}(e^{-\frac{1}{x}}+1)\right]}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2}{x}+\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})}{\frac{1}{x}+\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})}=\lim_{x\to0^+}\frac{2+x\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})}{1+x\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})}=2.$$

所以　原式=2.

评注　求分段函数在分段点的极限，或 $x\to x_0$ 的极限式中含有 $a^{\frac{1}{x-x_0}}(a>0,a\neq1)$，或 $\arctan\dfrac{1}{x-x_0}$、$\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x-x_0}$ 的，要分别讨论左右极限.

例 6　试确定 a，b，c 的值，使极限等式 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0$ 成立.

分析　利用分子是分母的高阶无穷小，可得到几个不同的极限式，从而解出所求的常数.

解　因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0$　①

所以
$$a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}=o((x-1)^2) \qquad ②$$

则有
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1}\left(a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}\right)=0 & ③\\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{x-1}=0 & ④\end{cases}$$

由③式得 c=2，代入④式得

$$b=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\frac{1}{2}$$

将 $c=2, b=\dfrac{1}{2}$ 代入①式得

$$a=-\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}(x-1)+2-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{x+3-2\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x+3+2\sqrt{x^2+3})}=\frac{3}{16}.$$

评注　若一个 $\dfrac{0}{0}$ 型极限式中有几个待定常数，可利用分子、分母无穷小的比较以及原极限式建立与待定系数个数相同的等式（方程组），再解方程组求得所需的常数. 为得到不同的等式，常使用洛必达法则. 对不是 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式，可作恒等变形或变量代换化为 $\dfrac{0}{0}$ 型来求.

例 7　设 $x_1,x_2,\cdots$ 为方程 $\tan x=x$ 的全体正根按增序排成的数列，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-1})$.

分析 先判断方程各根所在的范围，再讨论相邻两根差的极限.

解 令 $f(x)=\tan x-x$，由于 $\lim\limits_{x\to\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)=-\infty$， $\lim\limits_{x\to\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=+\infty$

故在区间$\left(n\pi-\dfrac{\pi}{2},n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$内方程 $f(x)=0$有根；

又 $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1>0$， $f(x)$在每个子区间$\left(n\pi-\dfrac{\pi}{2},n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$内均严格单增，故根$x_n$唯一.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$， 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-n\pi)=\dfrac{\pi}{2}$，

因此

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-x_{n-1})=\lim_{n\to\infty}(x_n-n\pi)-\lim_{n\to\infty}(x_{n-1}-(n-1)\pi)+\pi=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\pi=\pi .$$

也可用以下方法求得极限：

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan(x_n-x_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan x_n-\tan x_{n-1}}{1+\tan x_n\tan x_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{1+x_n x_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/x_{n-1}-1/x_n}{1/x_n x_{n-1}+1}=0$，

再由①式知 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-1})=\pi$.

例 8 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{-n}}{n(n+1)}\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k\cdot k^2$.

分析 这是无穷和问题，需转化为有限运算形式的极限. 涉及组合数，可考虑用二项公式来处理.

解 对二项公式$(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k x^k$两边求导得：

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}C_n^k kx^{k-1}$$

两边乘 x 得：

$$nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}C_n^k kx^k$$

两边再求导得：

$$n((1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}=\sum_{k-1}^{n}C_n^k k^2x^{k-1}$$

令$x=1$得,

$$\sum_{k=1}^{n}C_n^k k^2=n(n+1)2^{n-2}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-n}}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}C_n^k\cdot k^2=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-n}}{n(n+1)}n(n+1)2^{n-2}=\frac{1}{4}$$

2. 利用两个重要极限及等价无穷小计算

（1）两个重要极限的等价形式：

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1\ ,\qquad \lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=\mathrm{e}$$

（2）等价无穷小替换定理：设 $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

（3）几个常用的等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，有

$$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1,\ (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x, 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2.$$

例 9　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

分析　将分子中的幂指函数转化为指数函数，再用等价无穷小替换.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}$

评注　若极限式中有幂指函数 $f(x)^{g(x)}$，常用换底公式 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$ 将其化为指数函数来处理.

例 10　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.

分析　这是 1^∞ 型，可利用三角公式将底数化为 1 加无穷小的形式，再用公式 $\lim[1+f(x)]^{g(x)}(1^\infty)=e^{\lim f(x)\cdot g(x)}$ 计算.

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+\tan\dfrac{2}{n}}{1-\tan\dfrac{2}{n}}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{2\tan\dfrac{2}{n}}{1-\tan\dfrac{2}{n}}\right]^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}}$，

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n\tan\dfrac{2}{n}}{1-\tan\dfrac{2}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{1-\tan\dfrac{2}{n}}=4$．所以，原极限 $=e^4$.

评注　对 1^∞ 类型的极限 $\lim f(x)^{g(x)}$，通常有两种变形方式：一是化为 $e^{\lim g(x)\cdot\ln f(x)}$，二是化为 $e^{\lim(f(x)-1)\cdot g(x)}$，后两者的指数均为的 $0\cdot\infty$ 型不定式. 通常，第二种形式的计算更为简便.

例 11　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[n]{\cos 2n\pi x}}{(x-1)(x^x-1)}$.

分析　作变量代换 $t=x-1$，化为 $t\to 0$ 的情况，再用等价无穷小替换.

解　令 $t=x-1$，则

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{\cos 2n\pi t}}{t[(t+1)^{t+1}-1]}=-\lim_{t\to 0}\frac{[1+(\cos 2n\pi t-1)]^{\frac{1}{n}}-1}{t[e^{(t+1)\ln(t+1)}-1]}\\&=-\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{n}(\cos 2n\pi t-1)}{t(t+1)\ln(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}(2n\pi t)^2}{t^2(t+1)}=2n\pi^2.\end{aligned}$$

评注　注意等价无穷小：若 $f(x)\to 1$，则 $\sqrt[n]{f(x)}-1\sim\dfrac{1}{n}(f(x)-1)$.

例 12　计算 $\lim\limits_{x\to 0}x^{-2}\left(1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}\right)$.

分析　这是 $\dfrac{0}{0}$ 型，将括号中的乘积因子作分拆，再求各项的极限. 为此可在括号中插入 $(-\cos x+\cos x-\cdots)$ 来达到分拆的目的.

解 原式$=\lim\limits_{x\to0}x^{-2}\left[(1-\cos x)+\cos x\cdot(1-\sqrt{\cos 2x})+\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot(1-\sqrt[3]{\cos 3x})\right]$

$$=\lim_{x\to0}x^{-2}(1-\cos x)+\lim_{x\to0}x^{-2}(1-\sqrt{\cos 2x})+\lim_{x\to0}x^{-2}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to0}x^{-2}(1-\cos 2x)+\frac{1}{3}\lim_{x\to0}x^{-2}(1-\cos 3x)$$

$$=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3.$$

例 13 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}-x\right]$.

分析 这是 $\infty-\infty$ 型，令 $x=\dfrac{1}{t}$，通分化为 $\dfrac{0}{0}$ 型，再用等价无穷小替换.

解 令 $x=\dfrac{1}{t}$，则原式$=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sqrt[k]{(1+a_1t)(1+a_2t)\cdots(1+a_kt)}-1}{t}$.

因
$$(1+a_1t)(1+a_2t)\cdots(1+a_kt)=1+\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)t+\left(\sum_{1=i<j}^{k}a_ia_j\right)t^2+\cdots+(a_1a_2\cdots a_k)t^k,$$

故
$$\sqrt[k]{(1+a_1t)(1+a_2t)\cdots(1+a_kt)}-1=\sqrt[k]{1+\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)t+o(t)}-1\sim\frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)t+o(t),$$

于是
$$\text{原式}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{k}\left(\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\right)t+o(t)}{t}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}.$$

3．利用无穷小的性质计算

（1） $\lim f(x)=a\Leftrightarrow f(x)=a+o(1)$.

（2）无穷小与局部有界函数的乘积是无穷小.

（3） $f(x)$是无穷小$(f(x)\neq0)\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大.

例 14 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+\sqrt{e^x}\sin x}{x^2(1+e^x)}$.

分析 将极限拆分为两项，易得两项的极限均存在.

解 $\dfrac{3x+\sqrt{e^x}\sin x}{x^2(1+e^x)}=\dfrac{3}{x}\cdot\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\sqrt{e^x}\sin x}{1+e^x}$

因为
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0,\quad \text{而}\left|\frac{1}{1+e^x}\right|\leqslant1,\quad\left|\frac{\sqrt{e^x}\sin x}{1+e^x}\right|\leqslant\frac{1}{2}$$

所以
$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{1+e^x}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\frac{\sqrt{e^x}\sin x}{1+e^x}=0.$$

评注 因为极限式中有函数 e^x，若直接计算，需分别讨论 $x\to-\infty$ 与 $x\to+\infty$ 的情形.

例 15 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=4$，求 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

分析 利用极限与无穷小的关系得到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的局部表达式，再代入所求极限式计算.

解　方法 1　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}=4$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2,\quad \frac{f(x)}{x^2}=2+o(1)，即\quad f(x)=2x^2+o(x^2)$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x+o(x))^{\frac{1}{x}}=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{2x+o(x)}{x}\right]=e^2.$$

方法 2　由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$.

评注　利用已知极限得到极限式中抽象函数的局部表达式，再作相关运算，这是处理局部问题（如极限、极值等）较常用的方法.

4．利用极限存在的两个原理计算

（1）夹逼原理：

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$，若 $\exists M\in\mathbf{N}$，当 $n>M$ 时，恒有 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

（2）单调有界原理：单调增（减）有上（下）界的数列必定收敛.

例 16　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{[x]}$，其中$[x]$为取整函数.

分析　将$[x]$用 x 去估计得到不等式，再用夹逼原理求极限；也可用$[x]$去表示 x，再用无穷小的性质求极限.

解　方法 1　因为 $x-1\leqslant[x]\leqslant x,(\forall x\in\mathbf{R})$，则

当 $x>1$ 时，有

$$1\leqslant\frac{x}{[x]}\leqslant\frac{x}{x-1}$$

当 $x<-1$ 时，有

$$1\geqslant\frac{x}{[x]}\geqslant\frac{x}{x-1}$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$，由夹逼原理知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{[x]}=1$.

方法 2　因为 $x=[x]+r,(0\leqslant r<1)$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{[x]}=\lim_{x\to\infty}\frac{[x]+r}{[x]}=1$$

例 17　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

分析　这是无穷和形式的极限. 为化简数列，可将各分式的分母作适当的放大与缩小（形成公分母）达到通分化简的效果，再用夹逼原理求极限.

解　记 $x_n=\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$，则

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<x_n<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$$

因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{n^2+2n}=\frac{1}{2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}.$$