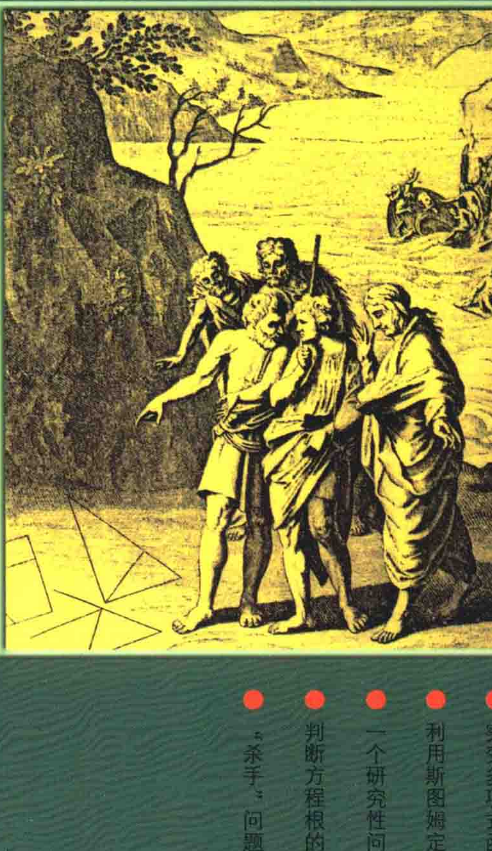
《数学中的小问题大定理》丛书（第五辑）

斯图姆定理

——从一道"华约"自主招生试题的解法谈起

佩捷 冯贝叶 王鸿飞 编译



- 实变多项式函数的中间值定理
- 利用斯图姆定理
- 一个研究性问题
- 判断方程根的其他方法
- "杀手"问题

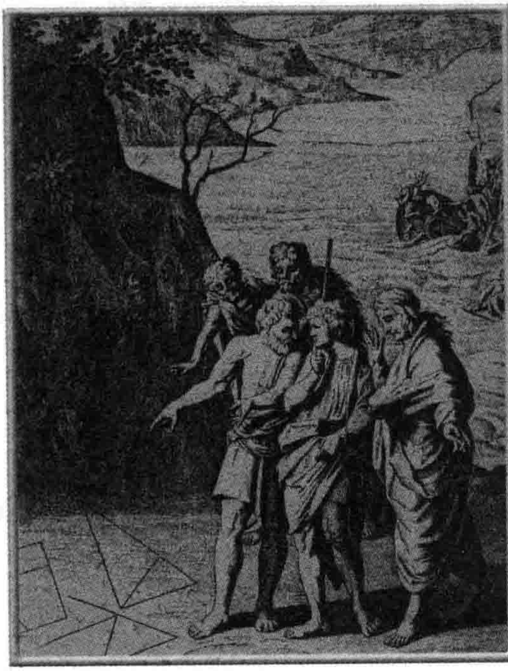
出版社

《数学中的小问题大定理》丛书（第五辑）

斯图姆定理

——从一道“华约”自主招生试题的解法谈起

佩捷　冯贝叶　王鸿飞　编译



◎实变多项式函数的中间值定理

◎利用斯图姆定理

◎一个研究性问题

◎判断方程根的其他方法

◎“杀手”问题

HITP

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书从一道"华约"自主招生试题的解法谈起，介绍了斯图姆定理的应用，本书共分为七章，并配有许多典型的例题.

本书适合高中生及数学专业本科生阅读.

图书在版编目(CIP)数据

斯图姆定理：从一道"华约"自主招生试题的解法谈起/佩捷，冯贝叶，王鸿飞编译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.3

ISBN 978-7-5603-4586-4

Ⅰ.①斯…　Ⅱ.①佩…②冯…③王…Ⅲ.①代数方程—研究　Ⅳ.①O151.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 010449 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　齐新宇
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 5.5　字数 66 千字
版　　次　2014 年 3 月第 1 版　2014 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-4586-4
定　　价　18.00 元

◎ 前言

这是一本"挂羊皮卖狗肉"的小册子.所谓的"羊皮"作为图书来讲一定要是当前图书市场的热点.作为一个专门出数学图书的机构,热点当然是和中高考挂钩.而在近10年来,高考中的黑马便是自主招生考试,于是我们便借此为由来带点数学精华的私货.

21世纪教育研究院副院长熊丙奇曾写过一篇文章,题目叫自主招生标准为何重回分数原点.

> 前不久有传言称,2011年和2012年都参加北京大学"中学校长实名推荐制"的南京金陵中学,2013年没有参加推荐的资格,原因是去年的推荐生"裸分"没达到北大在江苏的录取线.而就在近日,清华大学明确,2013年"领军计划"增加了"学业成绩排名在全年级前1%的应届高中毕业生优先"的政策.

这一消息令舆论很是不解：自主招生提出这么高的学业成绩要求，这样的改革还有何意义？这些排名在重点高中前1%的学生不需要自主招生，照样可以进名校. 北大、清华如此操作不过是“抢生源”，而且也在自主招生中重复与高考一样的选拔标准.

舆论的不解源于误会了我国高校正在推进的自主招生，以为高校的自主招生建立了多元评价体系，会给一些偏才、怪才以进入大学的渠道. 其实我国大学目前的自主招生，其实质根本就不是自主招生. 目前自主招生操作的流程是，考生先要参加学校的笔试、面试，获得自主招生资格后，还要参加高考，填报志愿，必须把该校填报在第一志愿（传统志愿填报）或A志愿（平行志愿填报），高考成绩达到高校承诺的录取优惠方能被该校录取. 按照这一操作，考生的选择权并没有增加，自主招生还和高考集中录取嫁接，自主招生必定成为高校抢生源的手段.

这就是北大乐于推出“中学校长实名推荐制”的原因. 在2010年该制度推出时，北大还宣称这是给中学校长推荐权利，可以发现一些“怪才”，可说到底，这是把学校的高分学生提前揽到学校门下. 按照北大校长实名推荐的操作，获得推荐并通过学校面试的学生，必须承诺报考该校，这不摆明在抢生源吗？再就是，所有获得“校长实名推荐”资格的学校，实行的都是学校推荐，采用的都是以学业成绩为主的“综合指标”体系，因为一方面学校校长不愿意以教育声誉承担推荐责任；另一方

面，大学还是以被推荐参加者高考的成绩来评价学校的推荐是否得力.如果被推荐者参加高考分数不高，甚至将影响到来年大学是否给这所学校推荐指标.

自主招生高校显然明白北大的真实用意，因此，在北大之后，清华、人大等高校推出的计划貌似给学生更多的选择机会，其实是让学生更焦虑，在推荐阶段，就必须作出选择，一旦获得推荐，就不得再选其他学校.

正是由于学生没有选择权，所以北大、清华把学业成绩的标准进一步提高，也就十分正常.这是自主招生与集中录取制度嫁接的必然.而如果实行真正的自主招生，情况就完全不同.自主招生的实质，应当是学校和学生双向选择，一名考生可以申请若干所大学，可以获得多张大学录取通知书再作选择，在这种情况下，大学可以提出基本的学业成绩要求，但如果其把成绩要求提得太高，就将很大程度限制申请数量，结果是难以招收到适合本校的学生.在这种双向选择机制中，大学也会逐渐形成自己的办学特色和招生标准，而不是所有学校都用一个相同的学业成绩标准去评价、选择学生.

2013 年，我国高校的自主招生改革试点将进入第 11 个年头，10 年的自主招生实践，让高校的招生标准又回到分数原点，这值得深思.只有实行真正意义的自主招生，才能推进高校转变观点，多元评价体系也才有望形成.

自主招生的试题在短期内一定会是中学师生心目中的热点：多解加强的有之，引为例题论据的有之，但是随着时间的推移，它们一定会逐渐淡出人们的视野，但它们背后所应用到的某个数学定理却愈加凸显，更显历久弥新，就像在一个“拼爹的时代”，你是谁不重要，重要的是你的爹是谁.

现任广东省委书记汪洋喜欢谈历史，其中一个最生动的故事叫“落第秀才干大事”. 在 2011 年 1 月的广东省委全会上，他对干部说道：“《论语》有一句话，我看了很受启发，‘导千乘之国，敬事而信，节用而爱人，使民以时.’就是管理一个地方，要踏踏实实做事，这样才能得到群众的信任，要节俭用度，爱护民众，珍惜民力，动用民力要审时度势，恰到好处.”

“我最近还看了一个故事，现场要考考你们”，汪洋在会议现场给官员出历史题，他先念了一份名单：“傅以渐、王式丹、林召棠、王云锦、刘福姚、刘春霖. 你们知道这 6 个人是干什么的吗？”

现场沉默. 汪洋说：“我估计你们都不知道.”他接着念第二份：“洪秀全、顾炎武、吴敬梓、蒲松龄、金圣叹、黄宗羲.”

这时，现场有不少回应，汪洋笑语：“我估计你们都知道.”

“第一份名单写的全是清朝的科举状元，你们可能一个都记不住；第二份名单全是清朝的落第秀才，但大家都认识”，汪洋对官员们总结说：“一个人能被后人记住，不是你做多大的官，是看你做多大事，你做了什么事.”

下面简要介绍一下本书的主角斯图姆(Sturm, Charles-Francois, 1803—1855)，瑞士数学家、物理学

家，生于瑞士日内瓦，卒于法国巴黎. 曾在日内瓦高等专科学校(Geneva Aca demy)攻读，1823 年到日内瓦附近的科佩堡(Châteauof Coppet)当家庭教师. 随后投身于巴黎科学界. 在巴黎大学和法兰西学院向安培、柯西等人学习过物理、数学，与傅立叶、阿拉哥(Arago)等人也有交往. 1827 年，他同柯拉登(Colladon)因研究液体的压缩而获得巴黎科学院奖金，并被任命为安培的助手. 1829 年担任《科学与工业通报》(Bulletin des Sciences et de l'industrie)的数学主编. 1840 年，成为巴黎理工科大学分析和力学教授，还受聘为巴黎理学院力学教授. 先后被选为柏林科学院(1835)、彼得堡科学院(1836)、巴黎科学院(1836)院士，英国皇家学会会员(1840). 1840 年获得皇家学会科普利(Copley)奖章. 斯图姆在代数方程论、微分方程论、微分几何学等方面都有所贡献. 1829 年，他向巴黎科学院提交了论文"论数字方程解"(Mémoire sur la résolution des équations numériques)，其中深入地讨论了代数方程的根的隔离，提出了有名的斯图姆定理，也称为斯图姆判别法：设 $f(x)=0$ 为区间 (a,b) 内的无重根的方程，方程的系数以及 a,b 皆为实数. 作斯图姆函数序列 $f(x),f'(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m=$ 常数，此处 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数，$f_1(x)$ 为以 $f'(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式，但取相反符号，$f_2(x)$ 为以 $f_1(x)$ 除 $f'(x)$ 所得的余式，取相反符号，依此类推，f_m 为最后的余式，等于常数. 然后算出数列 $f(a),f'(a),f_1(a),f_2(a),\cdots,f_m$ 中符号变换(即由"+"变至"−"，以及其逆)的次数 A，以及数列 $f(b),f'(b),f_1(b),f_2(b),\cdots,f_m$ 中符号变换的次数 B，最后，差值 $A-B$ 即等于方程 $f(x)=0$

在区间(a,b)中的实根的个数. 1933年,斯图姆撰写了关于微分方程的一篇著名论文,文中研究了形为$L\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}+M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}+N\cdot V=0$的方程,其中$L,M$和$N$是$x$的连续函数,$V$为未知函数. 此外,斯图姆也写过许多力学和分析力学论文. 其《力学教程》(Cours de mécanique,1861)和《分析教程》(Cours d'analyse,1857～1859)在半个世纪内被视为经典之作.

自主招生考试对大城市重点校学生有利,对农村学生及普通校的学生不利,表面上看因为视野的原因,根本上说是体制原因. 日本作家村上春树有高墙与鸡蛋之喻,他表示要站在鸡蛋一边. 在现实中,我们大部分人都会选择高墙. 而我们今天的大学,基本上也成了"高墙"的一部分,并以为既有体制提供"人力资源"为第一要务,而非以培养出具价值意识和反思意识的公民为本.

在二元体制格局下,农村考生为脱离生存地拼命复习高考中大概率出现的内容. 对自主招生考试中这样需要更高数学素养、更广泛数学阅读、更高层次数学视野的东西无缘相见,即便相见也无暇顾及. 这也正是本书出版的意义之一.

20世纪初,赵缭(负沉)在上海编《数学辞典》,交群益书局出版,老板给了他一笔钱. 他把这钱为儿女买了玩具,说:"人世间的事,原是玩玩而已,玩来的尽可玩去."

这或许应该是我们做书的态度.

刘培杰

2014年1月8日

于哈工大

目录

第0章 引言

在2012年“华约”自主招生考试中有一道令中学师生感到困难的试题：

试题1 请证明：方程 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=0$ 在 n 为偶数时没有实数根，在 n 为奇数时有且仅有一个实数根.

其实这是一道大学考研题目，最早出现于1983年四川师范学院招收硕士学位研究生的试题中.近年来又在大学生数学竞赛试题中出现，如2008年浙江省大学生高等数学竞赛试题中.其实类似的试题在各国的数学试题中都出现过，如1976年前苏联大学生数学竞赛试题、《美国数学月刊》征解问题，最早甚至可以追溯到20世纪

20 年代的德国数学文献中.所以说,这不是一道新题,但这是一道好题.

为了加深对此类试题的理解,下章再给出三种不同的解答,并介绍相应的背景知识以及提出几个相似问题和一个研究问题供读者进行深入探讨,使高等数学的思想与方法更好地渗透到中学数学中去.

第1章 试题1的三个不同证法

证法1 我们先来证明两个简单的引理.

引理1 设函数值 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异于0,则按 $f(a)$ 与 $f(b)$ 同号或异号,区间 $a < x < b$ 分别包含 $f(x)$ 的偶数个或奇数个零点.

证明 因为 $f(x)$ 是解析函数,所以区间 (a,b) 只能含有有限个零点. 当经过一个零点时,按此零点的重数分别为奇数或偶数, $f(x)$ 的符号改变或不改变.

注 解析函数这个概念可能中学师生不易理解,换成可导函数或连续函数均可,对本题来讲只要是多项式函数即可.

引理 2　设 a 和 b 为 $f(x)$ 的相邻的两个零点($f(a)=f(b)=0$,对 $a<x<b,f(x)\neq 0$),则导数 $f'(x)$ 在区间 $a<x<b$ 内有奇数个零点(从而至少有一个零点).

证明　取 $\varepsilon>0$,ε 充分小,有

$$f(a+\varepsilon)=f(a+\varepsilon)-f(a)=\varepsilon f'(a+\varepsilon_1)$$
$$(0<\varepsilon_1<\varepsilon)$$
$$-f(b-\varepsilon)=f(b)-f(b-\varepsilon)=\varepsilon f'(b-\varepsilon_2)$$
$$(0<\varepsilon_2<\varepsilon)$$

从
$$\operatorname{sign} f(a+\varepsilon)=\operatorname{sign} f(b-\varepsilon)\neq 0$$

可推出

$$\operatorname{sign} f'(a+\varepsilon_1)=-\operatorname{sign} f'(b-\varepsilon_2)\neq 0$$

对 $f'(x)$ 在区间 $(a+\varepsilon_1,b-\varepsilon_2)$ 应用引理 1 得证.

下面我们来证明试题 1.

证法 1　只要证明

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=f_n(x)$$

没有两个相邻负零点即可.倘若 a 和 b 为相邻负零点,则将有

$$f_n(a)=f'_n(a)+\frac{a^n}{n!}=0$$
$$f_n(b)=f'_n(b)+\frac{b^n}{n!}=0$$
$$\operatorname{sign} f'_n(a)=\operatorname{sign} f'_n(b)\neq 0$$

由引理 1,$f'_n(x)$ 在区间 $a<x<b$ 内将有偶数个零点.而按引理 2,$f'_n(x)$ 在区间 $a<x<b$ 内将有奇数个零点.矛盾.

这种证明由来已久,早在 20 世纪初的德国就出现了.下面的证法依赖于罗尔(Rolle)定理.

证法 2　用数学归纳法证明：

(1) 当 $n=1,2$ 时，结论显然成立；

(2) 现在假定 $n=k$ 时结论成立.

当 $k=2m$ 时，由 $f_{k+1}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ 易知 $f'_{k+1}(x)=f_k(x)$，由于 $f_k(x)=0$ 无实根，故 $f'_{k+1}(x)>0$（或 <0）. 注意到 $f_k(x)$ 的最高次幂项 x^{2m} 的系数为正，故 $f'_{k+1}(x)>0$. 这说明 $f_{k+1}(x)$ 是递增的. 而 $f_{k+1}(x)$ 是奇次多项式，故 $f_{k+1}(x)=0$ 只有一个实根.

当 $k=2m+1$ 时，即 $k+1=2(m+1)$，而 $f_{k+1}(x)$ 是偶次多项式，它在 $[0,+\infty)$ 上无实根.

当 $x<0$ 时，由

$$\lim_{x\to-\infty} f_{k+1}(x)=+\infty, f_{k+1}(0)=1$$

可知，若 $f_{k+1}(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有零点，其个数必为偶数. 因为 $f'_{k+1}(x)=f_k(x)$ 是奇次多项式，所以根据罗尔定理以及归纳法的假设可知，存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $f_k(\xi)=0$，由此我们有

$$f_{k+1}(\xi)-f_k(\xi)=\frac{\xi^{k+1}}{(k+1)!}\quad(k+1\text{ 是偶数})$$

这说明 $f_{k+1}(\xi)>0$，而 $f_{k+1}(x)$ 在极小值点上的值为正，从而有 $f_{k+1}(x)\neq 0, x\in(-\infty,0)$.

证法 3　依赖于函数的级数展开.

如果 $p(x)$ 是一个多项式函数，即

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

那么对于任何数 x，$p(x)$ 都能够容易地计算出来. 但对于像 e^x 这样的函数来讲，计算其函数值就很不方便. 由于 $e^x=\ln^{-1}(x)$，所以我们必须对于 a 的许多值算

出 $\ln a$,直到我们找出一个数 a,使 $\ln a$ 近似的等于 x 为止. 这时 a 就近似的等于 e^x. 所以我们想办法将 e^x 的计算转化为多项式函数的计算.

假设

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \quad ①$$

我们注意到系数 a_i 能用 p 及其各阶导数在 0 处的值来表示. 首先,我们注意到 $p(0)=a_0$,对式 ① 两边求导得

$$p'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$$

所以
$$p'(0)=p^{(1)}(0)=a_1$$

两端再次求导,得

$$p''(x)=2a_2+3\times 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}$$

所以
$$p''(0)=p^{(2)}(0)=2a_2$$

一般的,我们有

$$p^{(k)}(0)=k!a_k \text{ 或 } a_k=\frac{p^{(k)}(0)}{k!}$$

如果我们约定 $0!=1$,$p^{(0)}=p$,那么此公式对 $k=0$ 也成立.

这样我们就可以用一个多项式函数来近似地代替一个不易计算的函数.

因为对于所有的 k,有

$$\exp^{(k)}(0)=\exp(0)=1$$

所以

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

当我们要计算近似值时,就可以取前 $n+1$ 项

$$f_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

这就是我们这个试题出现的背景.

下面我们就利用 e^x 的级数展开给出证明.

《美国数学月刊》的一道征解问题为：

试题 2　多项式

$$p(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

没有实根.

证明　若 $p(x)$ 有实根 y，则由于 $p(x)$ 的常数项不为 0，各项系数为正知 $y<0$. 设 $y=-z(z>0)$，因而有

$$0=p(-z)=1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$(e^{-z^2}>0)$$

这是矛盾的. 从而 $p(x)$ 无实根.

这种方法高等数学的味道更重一些.