从数学观点看物理世界

——基本粒子与统一场理论

马天 著

科学出版社

从数学观点看物理世界
——基本粒子与统一场理论

马 天 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书主要系统介绍由作者和汪守宏教授合作建立的关于基本粒子的弱子模型与耦合四种相互作用的统一场理论. 这些物理结果是建立在这二人新发展的张量场正交分解、散度约束变分学以及统一场几何学理论的基础之上的. 整个工作的特点是物理与数学高度统一、内在逻辑协调一致、结果简单明了. 特别是, 根据新的数学理论提出两个物理基本原理 PID 和 PRI. 由这两个原理可导出统一场方程, 并在这个模型框架下推出大量与自然现象相吻合的物理结论.

本书适合于数学、理论物理学等专业的高年级本科生、研究生以及相关领域的研究人员, 既可作为研究生教材, 也可作为科研参考书.

图书在版编目(CIP)数据

从数学观点看物理世界: 基本粒子与统一场理论/马天著. —北京: 科学出版社, 2014.4

ISBN 978-7-03-040434-3

Ⅰ. ①从… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①数学物理方法 Ⅳ. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 075204 号

责任编辑: 徐园园 赵彦超 / 责任校对: 胡小洁
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 4 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2014 年 4 月第一次印刷 印张: 27
字数: 527 000

定价: 128.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

本书是“从数学观点看物理世界”专著系列的第二部, 第一部是《从数学观点看物理世界 —— 几何分析、引力场与相对论》(科学出版社, 2012). 本书涉及的主要内容是基本粒子与相互作用的统一场. 这两个方向都属于受人们普遍关注的领域, 也是物理学的中心课题.

最近, 作者与汪守宏教授合作新发展了 Riemann 流形上张量场的正交分解理论、散度约束变分学、$SU(N)$ 上的表示不变性理论、统一场几何学以及色代数五个方面的重要数学理论. 建立在前三个新的数学理论基础之上, 我们提出了物理学两个基本原理, 称为相互作用动力学原理 (PID) 和表示不变性原理 (PRI). PID 在许多方面得到物理事实的强有力支持. 而 PRI 是逻辑因果律的必然结论, 它的实质意思是, 相互作用的规范理论的正确性与表达它们的群表示坐标系的选择无关. 根据 PID 和 PRI, 我们建立了统一场几何学, 它与经典的几何学区别在于这个理论是以物理对称性原理决定背景空间 (数学上称为流形) 的几何结构, 而不是像传统做法那样, 流形的几何学是在事先赋予的结构 (如 Riemann 度量) 上展开. 统一场几何学为物理统一场理论提供了坚实的数学基础. 它给出了同时满足广义相对性原理、Lorentz 不变性、规范对称性、表示不变性 (PRI) 四个物理学基本原理的作用量, 此外也给出满足自发对称破缺的质量生成机制并且耦合四种作用力的统一场方程. 这种从原理自动导出自发对称破缺机制要比 Higgs 的人工机制更自然. 色代数是一种新的代数结构. 这个数学理论的产生完全是源于量子色动力学 (QCD). 在 QCD 中, 色量子数缺乏协调一致的运算规则, 同时关于夸克的胶子辐射理论也存在色指标的转换问题. 色代数的建立完全解决了 QCD 自身存在的这些色量子数不协调问题.

以往所有关于统一场的尝试全部都是朝着寻找统一的对称性方向, 以便在这种大对称性下将四种相互作用场耦合在一个统一的作用量中. 这种作用量的统一模式存在着如下几点不可克服的困难: ①高度复杂性; ②退耦困难; ③无法导出弱和强作用力公式; ④不能知道弱和强作用的力源是什么; ⑤ 破坏 PRI 对称性. 事实上, PRI 的发现某种意义上否定了在作用量上进行统一的方式. PRI 与 PID 一起给出了在场方程方面进行统一的道路. 这种模式被证明具有简单性和高度的逻辑协调性. 它能够在一个模型框架下同时解决暗物质暗能量问题 (不仅给出作用力公式, 而且也给出物质形式)、强和弱作用的力源问题, 给出与实验相吻合的强和弱作

用势公式, 合理解释了夸克禁闭与渐近自由, 为亚原子粒子提供了能级模型, 为基本粒子的弱子模型提供有力的理论基础, 合理地解释了所有的衰变、散射、辐射等粒子的跃迁现象.

本书介绍的弱子模型是彻底的基本粒子模型. 它给出的六个基本粒子被称作是弱子, 这是因为它们全部都带弱荷因而都参与弱相互作用. 六个弱子都没有静止质量, 其中三个带电荷, 只有一个带强荷. 所有粒子 (包括光子和胶子) 都是由这六种弱子构成. 从弱子模型的最基本层次看, 许多物理疑问已不再成为问题, 许多守恒律在这个层次已不再有意义. 最重要的一点是, 所有粒子衰变与散射反应式的左右两端各种类型的弱子数保持严格相等. 亚原子粒子的弱子组分是按量子数规则给出的, 而粒子反应式是由实验给出, 这两者之间表现出高度的协调一致性是对弱子模型有力的支持. 此外, 由统一场模型导出的弱作用和强作用势公式自然地给出弱子与夸克禁闭的机制, 为亚原子粒子的跃迁提供了弱子交换机理.

总之, 这部专著正如其名, 从数学与物理的相互关联中同时发现与建立这两个不同领域的新理论. 本书中介绍的五个数学理论与弱子模型、QCD 色指标理论、统一场模型这三个物理理论一起构成一个相互不可分割的整体, 它们表现出高度的逻辑相容性与一致性, 并且大范围地与自然现象相吻合. 我们深信这是一条正确道路.

最后就何为正确的科学研究道路以及如何进行知识能力训练与青年学者进行一些交流. 现如今科学研究已变得非常功利化了, 它已偏离了提高心智与升华心灵的方向, 成为一些人炫耀世智聪辩、追求名利地位的工具. 因此我们现在看到的是大量对人类毫无价值的研究工作：它们采用华丽的术语, 以复杂的概念充当深刻, 以人为制造的困难来突出成就, 在科学中创造出大量人造品, 它们是智力竞赛的产物. 科学本是寻求宇宙真谛的一个窗口, 因此探索大自然的优美旋律必须配以纯正的心灵、正直无为的心态, 如此才能使人走上正确的人生道路. 天道冥冥、自然有是, 心灵纯正才能自然感应、暗合道妙. 在为人要正的前提下, 下面五种能力的训练与提升也非常关键:

(1) 全局性的眼光与洞察力, 这需要宽广的知识作支撑.

(2) 自然现象与数学之间的相互转换能力, 这是一种双向的转换, 也即自如地将数学结构译成自然规律, 反过来再将观测与实验资料转化成数学理论.

(3) 将复杂问题简单化, 能直指事物本质. 一旦这种能力被训练出来, 在你的心智中就没有所谓深刻的概念. 所谓深刻是由于没有看透事物本质的能力所造成.

(4) 从平凡现象中发现不平凡规律的能力.

(5) 善于观察到不同事物之间的内在联系.

以上能力是每一个人都具有的潜力, 只是要用正确的方式和纯正的品格才能挖

掘出来.

本书得到国家自然科学基金 (No. 11271271) 的资助, 在此表示感谢. 同时也感谢所有参与本书校对的我的学生.

马　天

2014 年 1 月于成都四川大学

目　　录

第 1 章　理论物理基础

1.1　物理学的观念与方法

1.1.1　基本精神

物理学的主要研究对象就是物质结构、物质形态与运动以及它们之间的相互作用. 物理学的基本精神是实证, 具体地讲, 它要求所有的理论与观点必须具备两个条件:

(1) 它们能够以某种方式转化成数学形式, 并且通过数学手段可以获得一些可观测的数据与性质;

(2) 这些物理性质和数据能够被实验检验, 或者可以用来解释一些自然现象. 需要强调的是, 任何哲理式的理论和观点都不会被物理学接受.

在物理与数学转换方面, 普遍遵循下面的基本原理.

基本原理 1.1　宇宙中所有物理系统都要遵守一定的原理规则和定律, 它们具有如下特性：

(1) 这些原理、规则和定律可用微分方程或数学公式来表达, 即

$$\text{定律} = \text{微分方程};$$

(2) 定律应该具有普适性, 而普适性的具体体现就是要求具有某种对称性, 而对称性在很大程度上决定了微分方程的表达形式;

(3) 微分方程的解提供了相应物理系统的状态和性质. 包含了物理系统所有的物理信息.

可以说理论物理一直是在上述精神指导下发展的, 也就是说理论物理学家的注意力主要是集中在如下几个方面的研究上：

(1) 如何将新的物理观念和思想成功地转化成数学;

(2) 在各个物理系统中寻求基本原理、规则及定律;

(3) 根据物理原理、规则及定律建立数学模型及方程;

(4) 从这些模型与方程的计算中推导出所需的物理.

总之, 一个好的物理必须能够最终转化成可验证的数学.

大自然给我们展现出它的无比玄妙和神奇, 但是所有这些全都是表象, 真正产生这一切的根源都可归结到若干个极其简单而又朴素的普适性原理. 因此, 领悟和探索物理学的正确道路并不是突发奇想, 而是从芸芸万象中追踪宇宙的本源. 物理

学总的精髓可用一句话概括如下:

整个物理学理论大厦是被建立在若干个简单而又普适的基本原理之上.

这是 Einstein 留给我们的遗产. 这其中最根本的核心就是正确的物理理论一定满足如下准则:

朴实与简单.

我们必须牢记这一点! 这部著作自始至终都将体现这种精神, 贯穿性地展现物理与数学的有机融合与相互转化.

1.1.2　普适性的原理

根据上述精神, 了解和领悟普适性的基本原理是整体把握理论物理的关键. 下面将简要介绍物理学各学科分支的基本原理以及它们是如何转化成微分方程的.

首先要介绍的是 Lagrange 动力学原理, 它是物理学最为普适的原理, 适合于所有保守的物理系统, 如天体运动、波的传播量子物理以及所有四种相互作用. 该原理包含两个方面, 其一是关于物体运动的内容, 其二是关于相互作用的内容. 相互作用也称为相互作用动力学原理 (简称 PID). 该原理陈述如下.

基本原理 1.2(Lagrange 动力学原理)　每个独立的物理系统运动状态可用一组函数所描述

$$u=(u_1,\cdots,u_N).$$

同时也存在一个关于 u 的泛函, 称为 Lagrange 作用量, 表达为

$$L(u)=\int_M \mathcal{L}(u,Du,\cdots,D^m u)\mathrm{d}x, \tag{1.1.1}$$

式中 M 是 u 的时空定义域, Du 表示 u 关于时间与空间变量的导数. 关于作用量 (1.1.1), 下面结构成立.

(1) 对于运动系统, 状态函数 u 是 (1.1.1) 的极值点, 即 u 满足 $L(u)$ 的变分方程

$$\delta L(u)=0. \tag{1.1.2}$$

(2) 对于相互作用系统, 状态函数 u 是 (1.1.1) 在散度为零约束下的极值点, 即 u 满足如下方程

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}L(u+\lambda v)\right|_{\lambda=0}=0,\quad \forall\ \mathrm{div}_A v=0, \tag{1.1.3}$$

其中 $\mathrm{div}_A v=\mathrm{div}v-A\cdot v, A$ 是相互作用规范势.

这里需要解释一下, 方程 (1.1.2) 和 (1.1.3) 都是微分方程. 一旦 $L(u)$ 的函数形式被给定, 那么方程 (1.1.2) 或 (1.1.3) 的具体形式也被确定. 所谓独立系统是和外界没有关联的运动系统与相互作用系统的总称.

根据基本原理 1.1, 保守物理系统的动力学问题被归到 Lagrange 密度 $\mathcal{L}(u,\cdots,D^m u)$ 表达形式的寻求方向上. 后面将看到对称性原理对确定 $\mathcal{L}$ 的形式起到关键作用.

另一个物理学普适性的原理是关于守恒运动系统的 Hamilton 动力学原理. 该原理陈述如下.

基本原理 1.3(Hamilton 动力学原理) 一个能量守恒的物理系统存在一对共轭函数组 $u=(u_1,\cdots,u_N)$ 和 $v=(v_1,\cdots,v_N)$, 以及能量密度函数 $\mathcal{H}(u,v,\cdots,D^m u,D^m v)$, 使得系统总能量为

$$H=\int_M \mathcal{H}(u,v,\cdots,D^m u,D^m v)\mathrm{d}x,$$

H 称为 Hamilton 能量, 则该物理系统的状态函数满足下面动力学方程, 也称作 Hamilton 系统

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{\delta}{\delta v}H(u,v),\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=-\frac{\delta}{\delta u}H(u,v),\end{aligned}\tag{1.1.4}$$

其中 $\delta H/\delta v$ 和 $\delta H/\delta u$ 分别代表 H 关于 v 和 u 的变分导算子.

对一个保守的运动系统, Lagrange 动力学原理与 Hamilton 动力学原理是等价的, 它们之间可通过一种变换相互转换. 但在实际应用中方程 (1.1.2) 和 (1.1.4) 各有它们的方便之处.

下面我们再列出一些重要原理及其作用, 而不再陈述这些原理的具体内容. 阅读时不要纠缠数学和物理细节.

(1) Lorentz 不变性原理. 该原理是 Einstein 相对性原理与光速不变性原理这两个原理的一种等价形式, 它是狭义相对论的核心. 描述 Fermi 子状态的 Dirac 方程和描述 Bose 子状态的 Klein-Gordon 方程就是由该原理在量子规则下获得的. 量子力学的三个主要方程, Schrödinger 方程、Dirac 方程和 Klein-Gordon 方程全部满足 Lagrange 动力学原理和 Hamilton 动力学原理, 可参见 (马天, 2011, 2012).

(2) 广义相对性原理与等效原理. Einstein 的广义相对论引力场理论就是建立在这两个原理和 Lagrange 动力学原理基础之上的. 从这两个原理可得出结论: 引力场空间是一个弯曲的 Riemann 空间 $(M,g_{\mu\nu})$, 其 Riemann 度量 $g_{\mu\nu}$ 代表引力势. 再由广义相对性原理和 Riemann 几何知识可唯一地 (差一个常数) 确定关于 $g_{\mu\nu}$ 的作用量为

$$L=\int_M\left(R+\frac{8\pi G}{c^4}S_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\mathrm{d}x,\tag{1.1.5}$$

其中 R 为标量曲率, $S_{\mu\nu}$ 为能量动量应力张量, $g=|g_{\mu\nu}|$ 是度量矩阵的行列式. 等式 (1.1.5) 称作是 Einstein-Hilbert 作用量, 由它产生的变分方程 (1.1.2) 取如下形

式:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{1.1.6}$$

其中 $R_{\mu\nu}$ 为 Ricci 曲率张量, $T_{\mu\nu}$ 为能量动量张量. 方程 (1.1.6) 称作是 Einstein 场方程, 它是关于 $g_{\mu\nu}$ 的一个二阶偏微分方程组.

作用量 (1.1.5) 的约束变分方程 (1.1.3) 取如下形式:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi, \tag{1.1.7}$$

∇_μ 为协变导数, ϕ 为标量函数. 关于由 (1.1.5) 导出 (1.1.6) 和 (1.1.7) 的过程可参见 (马天, 2012).

(3) 规范不变性原理. 电磁相互作用、弱相互作用、强相互作用, 这三种相互作用都受这个原理的支配. 该原理与 Lorentz 不变性原理一起由 Yang-Mills 理论唯一地 (差一个常数) 确定上述三种相互作用场的作用量.

(4) 相互作用动力学原理 (PID) 与群表示不变性原理 (PRI). PID 即基本原理 1.2 的第二部分. 引力场、电磁场、弱作用场、强作用场, 这四种场作用量的组合在 PID 与 PRI 的支配下唯一地 (差若干参数) 确定了耦合四种相互作用的统一场方程. 本书重点介绍的便是这个理论.

(5) Newton 第二定律. 该定律在许多经典物理领域, 如天体力学、连续介质弹性波、孤立系统的刚体运动等, 是与基本原理 1.2 以及基本原理 1.3 是等价的. 然而在流体动力学领域, Newton 第二定律起到不可取代的作用. 它表述为

$$ma = F. \tag{1.1.8}$$

这个公式是按如下方式转化成流体动力学方程. 令 ρ 为质量密度, $u = (u_1, u_2, u_3)$ 是单位体积的流体颗粒速度场, 则流体颗粒遵循的 Newton 第二定律 (1.1.8) 变为

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right] = \mu\Delta u - \nabla p + f, \tag{1.1.9}$$

式中左端为质量与加速度乘积, 右端为所受总力, 其中 $\mu\Delta u$ 为摩擦力, $-\nabla p$ 为压力差, f 为外力. 再加上质量守恒定律:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \tag{1.1.10}$$

这组方程 (1.1.9) 和 (1.1.10), 称为 Navier-Stokes 方程, 完全支配了流体的运动状态.

(6) 支配热传导与物质扩散运动的是 Fourier 定律与 Fick 定律再加上热量守恒与质量守恒定律. 这些定律的数学表达为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\Delta u + f, \tag{1.1.11}$$

式中 u 为温度或物质密度, κ 为扩散系数, f 为外源.

(7) 极小能量原理. 该原理支配了热力学系统和弹性介质力学等领域. 这些系统的状态方程可由内能与势能泛函在这个原理基础上推导出来, 它们包含了所有基本的物理信息.

(8) 统计物理的 Le Châterlier 原理. 应用该原理可以导出热力学系统平衡相变的动力学方程如下. 根据 Ginzburg-Landau 平均场理论, 任何热力学系统的相变 (称为平衡相变) 可以被一组序参数函数 ψ 所描述

$$\psi = \{\psi_1, \cdots, \psi_k\},$$

由它们决定的自由能可表达成如下形式:

$$G(\psi, \lambda) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\mu|\nabla\psi|^2 + g(\psi, \nabla\psi, \lambda)\right] \mathrm{d}x, \tag{1.1.12}$$

式中 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ 是控制参数, 代表温度、压力、外力强度等. Le Châterlier 原理意味着平衡相变动力学方程取如下形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_i}{\partial t} &= -\beta_i \frac{\delta}{\delta\psi_i} G(\psi, \lambda) + \Phi_i(\psi, \lambda), \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \\ \frac{\partial\psi_j}{\partial t} &= \nabla \cdot \left[\sum_{l=k+1}^{K} L_{jl} \nabla \left(\frac{\delta}{\delta\psi_l} G(\psi, \lambda) + \phi_l(\psi, \lambda)\right)\right], \quad k+1 \leqslant j \leqslant K, \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

式中 $\psi_1, \cdots, \psi_k$ 是非守恒量, $\psi_{k+1}, \cdots, \psi_K$ 是摩尔数守恒量, L_{jl} 是 Onsager 输运系数并且 (L_{jl}) 是正定对称的, Φ_i 和 ϕ_l 满足下面约束条件:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \sum_{i=1}^{k} \Phi_i(\psi, \lambda) \frac{\delta}{\delta\psi_i} G(\psi, \lambda) \mathrm{d}x = 0, \\ &\int_\Omega \sum_{j,l=k+1}^{K} \nabla \cdot (L_{jl} \nabla\phi_l) \frac{\delta}{\delta\psi_j} G(\psi, \lambda) \mathrm{d}x = 0, \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

方程 (1.1.12)-(1.1.14) 包含了对应系统的全部热力学性质.

上面所列的原理和定律基本上覆盖了物理学所有领域, 从这些内容也可进一步体会到物理学原理 1.1 的意义. 它明确告诉我们, 熟练地掌握物理与数学的转换是理解与探索理论物理的关键. 在物理和数学发展到今天的深度和广度, 任何单一视角来发展各自学科的方式已受到越来越大的局限, 并且是根本性的. 只有真正深入和广泛掌握这两大学科的知识, 并将它们融合在一起, 物理现象与数学概念自如相互翻译, 才能够以全局性的眼光来发展数学和物理. 建立在 PID 与 PRI 基础之上的统一场理论正是从这种全局视角发现的. 任何局部知识和局部角度都不可能建立这个理论.