21世纪高等学校
工科数学辅导教材

概率论与数理统计
学习指南

祝丹梅　姜凤利　于晶贤　等编著

化学工业出版社

21世纪高等学校
工科数学辅导教材

概率论与数理统计
学习指南

祝丹梅　姜凤利　于晶贤　等编著
聂　宏　主　审

化学工业出版社

本书以教育部制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》为依据，与浙江大学编写的《概率论与数理统计》教材相配套.

本书内容主要包括概率论内容5章，数理统计内容3章，每章包括基本要求、内容要点、精选题解析、重要知识和方法的注解和释疑解难，并附有A,B两类习题，有助于读者开拓思路加深理解教材。书后附有4套自测题，并给出参考答案.

本书可作为高等学校工科、管理、财经及非数学类有关专业的教学用书或教学参考书，也适合作为本科生考研学习参考.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指南/祝丹梅等编著. —北京：化学工业出版社，2014.8

21世纪高等学校工科数学辅导教材

ISBN 978-7-122-21199-6

Ⅰ.①概… Ⅱ.①祝… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第146582号

责任编辑：唐旭华　郝英华　　装帧设计：张　辉

责任校对：陶燕华

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm　1/16　印张11½　字数296千字　2014年8月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：22.00元

前　　言

概率论与数理统计是一门研究和探索客观世界随机现象规律的数学学科．它以随机现象为研究对象，是数学的分支学科，在金融、保险、经济与企业管理、工农业生产、医学、地质学、气象与自然灾害预报等方面都起到非常重要的作用．随着计算机科学的发展以及功能强大的统计软件和数学软件的开发，这门学科得到了蓬勃的发展，它不仅形成了结构宏大的理论，而且在自然科学和社会科学的各个领域应用越来越广泛．

作为一门应用数学学科，概率论与数理统计不仅具有数学所共有的特点：高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性，而且具有更独特的思维方法．为使初学者尽快熟悉这种独特的思维方法，更好掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论、基本运算以及处理随机数据的基本思想和方法，培养学生运用概率统计方法分析解决实际问题的能力和创造性思维能力，我们编写了本书．本书将概率论与数理统计诸多问题进行合理的归类，通过对精选典型例题的解析和方法归纳，帮助读者理解基本概念，增强运算能力，同时介绍一些方便快捷的解题方法，拓宽读者的解题思路．书中每章附有强化练习题以及参考答案．初学者只要求试做强化练习题中的（A）题，（B）题可作为学有余力的读者选做．

参加本书编写的有魏晓丽（第一章），祝丹梅（第二章），李阳（第三章），姜凤利（第四章），于晶贤（第五章），范传强（第六章），么彩莲（第七章），温立书、于晶贤（第八章），李金秋（自测题）．全书由祝丹梅组稿并修改定稿，聂宏教授主审．

本书适用于理工科、经管类高等院校的学生，特别适合使用浙江大学编写的《概率论与数理统计》作为教材的学生，对于有志报考研究生的学生也是一本有益的参考书．本书也可作为理工科、经管类高等院校数学教师的教学参考书．本书在编写过程中得到了辽宁石油化工大学教务处和理学院广大教师的支持和帮助，在此表示感谢！

由于水平所限，书中疏漏与不妥之处在所难免，恳请读者批评指正．

编　者

2014 年 5 月

目　　录

第一章 随机事件和概率

本章基本要求

1. 了解样本空间（基本事件空间）的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算.

2. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式，以及贝叶斯(Bayes)公式.

3. 理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

一、内容要点

（一）基本概念

定义 1 随机试验：(1) 相同条件下可重复试验；(2) 每次试验结果不唯一；(3) 试验的全部可能结果已知，但试验之前不知哪一个结果出现.

定义 2 样本空间：随机试验所产生可能结果的全体，一般记为 S. S 中的元素称为样本点，也称为基本事件. 样本点的集合称为随机事件，简称事件. 样本空间 S 称为必然事件，空集 $\varnothing$ 称为不可能事件.

设 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是样本空间 S 中的随机事件，它们之间的关系及运算如下：

定义 3 包含关系：$A\subset B$ 表示事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

定义 4 相等关系：$A=B$ 表示事件 A，B 相互包含.

定义 5 和事件：(1) 两个事件的和事件 $A\cup B$，表示事件 A，B 至少有一个发生；(2) 多个事件的和事件 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$，表示事件 A_k 中至少有一个发生.

定义 6 积事件：(1) 两个事件的积事件 $A\cap B$ 或 AB；(2) 多个事件的积事件 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$.

定义 7 差事件：$A-B$ 表示事件 A 发生而事件 B 不发生.

定义 8 不相容（或互斥）事件：若事件 A，B 不同时发生，即如有 $AB=\varnothing$，则称事件 A，B 为不相容事件或互斥事件.

定义 9 互逆（或对立）事件：如有 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$，则称事件 A，B 为互逆（或对立）事件，记作 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$.

（二）事件的性质

1. 事件关系的性质

$A\subset A\cup B$；$B\subset A\cup B$；$A\cup A=A$；$A-B\subset A$；$A-B=A\overline{B}$；$(A-B)\cup A=A$；$(A-B)\cup B=A\cup B$；$(A-B)\cap B=\varnothing$；$\overline{\overline{A}}=A$；$A\cup\overline{A}=S$；$A\cap\overline{A}=\varnothing$；$A\cap A=A$；$A\cup\varnothing=A$；$A\cup S=S$；$A\cap S=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$.

2. 事件的运算性质

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3) 分配律：$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$；$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$；

(4) De Morgan 对偶定律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$；$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

（三）事件的概率及其计算

1. 概率的定义

概率的定义是公理化的，即 P 是从 S 的子集族到 $[0,1]$ 上的一个映射，若满足以下三个条件：① $P(A)\geqslant 0$；② $P(S)=1$；③ 若 $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots)$，有 $P(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(A_k)$，则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率.

2. 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2)（有限可加性）若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$；

(3) $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(4) 若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，一般的，若 $A\not\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB);$$

(5) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 且

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

3. 等可能概型

特征：每个样本点被取到的可能性相等.

(1) 古典概型　特征：样本空间是有限集，每个基本事件发生的可能性相同. 其计算公式为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中样本点数}}{S\text{ 中样本点数}}.$$

计算古典概型的基本公式是排列组合公式.

(2) 几何概型　特征：样本空间是 n 维欧氏空间的子集，且每个样本点的取得具有等可能性. 其计算公式为

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)}.$$

其中，$\mu(A),\mu(S)$ 分别表示 A 及 S 在 R^n 中的度量，如长度、面积、体积等.

4. 加法原理

设事件 A 有 n 类方法出现，若第 i 类方法包含 m_i 种方法，则 A 共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法出现.

5. 乘法原理

设事件 A 有 n 类方法出现，另一事件 B 对每一种 A 的出现方法又有 m 种不同的方法出现，则事件 AB 以 nm 种不同的方法出现.

（四）条件概率与事件的独立性

定义 10　条件概率：设 A，B 是两个事件，若 $P(A)>0$，称 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为 A 发生的条件下 B 发生的条件概率．

定义 11　事件的独立性：若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A，B 相互独立．这时，显然以下三对事件

$$\{\overline{A},B\},\{A,\overline{B}\},\{\overline{A},\overline{B}\}$$

也两两独立．

当 $P(A)>0$ 时，A，B 相互独立 $\Leftrightarrow P(B\mid A)=P(B)$．

若对任意的 k（$1<k\leqslant n$），任意 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立事件．

注意(1) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立事件时，定义中共有 (2^n-n-1) 个等式．

(2) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立 $\Rightarrow A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立，反之不然．

（五）重要公式

1. 乘法公式

若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，有

$$P(AB)=P(A\mid B)P(B)=P(B\mid A)P(A),$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1\cdots A_{n-1}).$$

2. 全概率公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，对任意 $A\subset S$，有 $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)$．

3. 贝叶斯公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，对任意 $A\subset S$，若 $P(A)>0$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

注意（1）贝叶斯公式是条件概率与全概率公式相结合的产物，其证明过程必须记住．

（2）使用贝叶斯公式的关键是找到划分 $\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$．

（六）可靠性问题

设每个元件独立，第 i 个元件正常工作的概率为 p_i $(i=1,2,\cdots,n)$．若一个系统由 n 个元件组成，则有：

（1）串联系统　可靠度为 $\prod\limits_{i=1}^{n}p_i$．

（2）并联系统　可靠度为 $1-\prod\limits_{i=1}^{n}(1-p_i)$．

特殊地，若元件结构相同，就有 $p_i=p$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则串联系统的可靠度为 p^n，并联系统的可靠度为 $1-(1-p)^n$，进而可以计算混联系统的可靠度．

二、精选题解析

1. 随机事件的概念及运算

【例 1】 投掷一枚骰子，设 $A=$“出现点数不超过 3”，则称 A 为（　　）.

(A) 不可能事件　　(B) 基本事件　　(C) 必然事件　　(D) 随机事件

【解析】 $A=\{1,2,3\}$，它不是空集，故不选(A)，不是单点集，故不选(B)，A 也不是全集，故不选(C)，A 可能发生也可能不发生，符合随机事件的定义，故应该选(D).

【例 2】 设 A，B 是样本空间 S 中的随机事件，则$(A\cup B)(\overline{A}\,\overline{B})$ 表示（　　）.

(A) 不可能事件　　(B) A,B 恰有一个发生

(C) 必然事件　　(D) A,B 不同时发生

【解析】 根据集合运算的性质，$(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})=\varnothing\cup(A\overline{B})\cup(B\overline{A})\cup\varnothing$，它表示 A 发生且 B 不发生，或者，B 发生且 A 不发生，故应该选(B).

【例 3】 设 A,B,C 是三个事件，试将下列事件用 A,B,C 的运算表示出来.

(1) 仅 A 发生；　(2) A，B 发生，但 C 不发生；　(3) 三个事件不都发生；

(4) 三个事件至少一个发生；　(5) 三个事件至多一个发生；　(6) 三个事件都不发生；

(7) 三个事件不多于一个发生；　(8) 三个事件恰有一个发生；

(9) 三个事件恰有两个发生；　(10) 三个事件至少两个发生.

【解析】 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$；(2) $AB\overline{C}$；(3) $\overline{ABC}$或$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；(4) $A\cup B\cup C$；(5) $\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{C}$；(6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$或$\overline{A\cup B\cup C}$；(7) $\overline{AB\cup BC\cup AC}$；(8) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；(9) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；(10) $AB\cup AC\cup BC$.

【例 4】 设 A,B 是两个事件，那么事件“A,B 都发生”，“A,B 不都发生”，“A,B 都不发生”中，哪两个是对立事件?

【解析】 上述三个事件可以表示为 AB，$\overline{AB}$，$\overline{A}\,\overline{B}$，显然，$AB$ 与 $\overline{AB}$ 是对立事件.

2. 随机事件的概率及运算

【例 5】 设 A,B 是随机事件，且 $P(AB)=0$，则下列命题正确的是（　　）.

(A) A,B 互斥　　(B) AB 是不可能事件

(C) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$　　(D) AB 不一定是不可能事件

【解析】 $AB=\varnothing\Rightarrow P(AB)=0$，反之未必. 如做连续区间上取点的试验，设 A,B 都表示恰好取到中点，由几何概率知，$P(AB)=0$，但是 $AB\neq\varnothing$，故(A)，(B)不对. 再如，进行投一枚硬币的试验，$A=$“正面向上”，$B=$“反面向上”，满足 $P(AB)=0$，但是，$P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，故(C)不对. 综上所述，应该选(D).

【例 6】 比较概率的大小：$P(B)$；$P(A\cup B)$；$P(AB)$；$P(A)+P(B)$，其中，$P(A)>0$，$P(B)>0$.

【解析】 因为 $AB\subset B\subset A\cup B$，就有

$$P(AB)\leqslant P(B)\leqslant P(A\cup B),$$

另外，

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant P(A)+P(B).$$

【例 7】 $P(A)=p_1$，$P(B)=p_2$，$P(A\cup B)=p_3$，则 $P(A\overline{B})=$（　　）.

(A) p_1-p_2　　(B) p_3-p_2　　(C) $p_1(1-p_2)$　　(D) p_2-p_1

【解析】 $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A\cup B-B)=P(A\cup B)-P(B)$，答案为(B).

【例 8】 已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$

( ).

【解析】 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$，则 $P(A)+P(B)=1$，所以 $P(B)=1-p$.

【例 9】 设 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，则 A,B,C 全不发生的概率为（ ），A,B,C 至少有一个发生的概率为（ ）.

【解析】 A,B,C 全不发生的概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]\\&=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

A,B,C 至少有一个发生的概率为 $P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=\frac{5}{8}$.

3. 古典概率问题

【例 10】 袋子中有 7 只红球，5 只白球，不放回地陆续取出 3 只，求（1）顺序为红、白、红的概率；（2）有 2 只红球的概率.

【解析】 （1）样本空间中样本点数为 12 个球中取出 3 个的排列 P_{12}^3，以 A 表示所求事件，A 中共有 $7\times5\times6$ 个样本点，故

$$P(A)=\frac{7\times5\times6}{12\times11\times10}=0.1591.$$

（2）不放回地陆续取出 3 只，有 2 只红球，与取球的顺序无关. 以 B 表示所求事件——2 只红球且一只白球，B 中共有 $C_7^2C_5^1$ 个样本点，样本空间中样本点数为 12 个球中取出 3 个的组合数 C_{12}^3，故

$$P(B)=\frac{C_7^2C_5^1}{C_{12}^3}=\frac{21}{44}=0.4773.$$

【例 11】 n 对新人参加婚礼，现进行一项游戏：随机的把人分为 n 对，问每对恰为夫妻的概率是多少?

【解析】 把这 $2n$ 个人，从左到右排成一排，共有$(2n)!$ 种排法. 处在第 1,2 位的作为一对夫妻，第 3,4 位的作为一对夫妻，如此类推. 第一位可有 $2n$ 种排法，第二位只有 1 种排法，第三位有 $2n-2$ 种排法，第四位只有 1 种排法，如此类推. 故满足要求的排法总数是 $2n(2n-2)(2n-4)\cdots2=2^nn!$，以 A 表示所求事件，所以

$$P(A)=\frac{2^nn!}{(2n)!}=0.1591.$$

【例 12】 将 n 个人随机分到 N 个房间中（$n\leqslant N$），每个人分到哪个房间是等可能的，且设每个房间可容纳的人数没有限制，求

（1）某指定的一个房间（例如第一个房间）恰有 m 个人的概率（$m\leqslant n$）；

（2）每两个人都不在同一个房间的概率.

【解析】 （1）设 $A=\{$某指定的一个房间恰有 m 个人$\}$，由于每一个人分房间的时候都有 N 种分法，n 个人分完才算结束，所以样本点总数为 N^n. 对 A 中样本点数，房间是固定的，但哪 m 个人分到此房间是不确定的，也就是说哪 m 个人分到此房间都可以. 那么先从 n 个人中选出 m 个人来，让这 m 个人在此房间，剩下的 $n-m$ 个人分到其他的 $N-1$ 房间中，所以事件 A 中的样本点数为 $C_n^m(N-1)^{n-m}$.

故得

$$P(A)=\frac{C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

（2）设 $B=\{$每两个人都不在同一个房间$\}$，样本点数与（1）一致，为 N^n. B 中样本点数容易求出，为

$$N\cdot(N-1)\cdots\cdots(N-n+1)=C_N^n\cdot n!\ .$$

故得
$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}.$$

【例 13】 （抽签问题）设有 15 个人要去看电影，只有 7 张电影票，于是进行抽签决定谁去．求第 5 个抽签者抽到电影票的概率．

【解析】 设事件 $A=\{$第 5 个抽签者抽到电影票$\}$．

这是一个不放回抽样，且与次序有关，所以样本总数为

$$15\times14\times\cdots\times2\times1=15!\ .$$

事件 A 要求第 5 个人抽到电影票．我们可以先任取一张电影票“预留”给第 5 个人，其他 14 个人任意抽取，那么 A 的样本点数为

$$7\times14\times13\times\cdots\times2\times1=7\times14!\ .$$

所以
$$P(A)=\frac{7\times14!}{15!}=\frac{7}{15}.$$

【例 14】 求在桥牌比赛中，4 张 A 落在同一个人手中的概率．

【解析】 设事件 $B=\{$4 张 A 落在同一个人手中$\}$．

（1）样本点总数　样本点总数就是 52 张扑克牌的分法．52 张牌要分给 4 个人，每人 13 张，相当于将 52 个物体分成 4 组，每组 13 个，所以样本点总数为 $\frac{52!}{(13!)^4}$.

（2）事件 B 中样本点数　事件 B 要求 4 张 A 落在同一个人手中，哪一个人是不确定的，于是先从 4 个人中任选一人，让此人手中有 4 张 A，那么这时还有 48 张牌要分给这 4 个人，其中再分给有 4 张 A 的这个人 9 张牌，其他 3 人每人 13 张牌，于是 B 中样本点数为

$$C_4^1\frac{48!}{9!\times(13!)^3}.$$

所以
$$P(B)=\frac{C_4^1\frac{48!}{9!\times(13!)^3}}{\frac{52!}{(13!)^4}}=\frac{132}{5\times2499}\approx0.01056.$$

【例 15】 某市的电话号码由 8 位数构成，设 0～9 这 10 个数字在每位数中出现是等可能的．求以下概率：（1）8 位数全不同的概率；（2）至少 2 个数字相同的概率；（3）恰好有两个位置上号码相同而其他位置上号码各不相同的概率．

【解析】 （1）8 位数全不同的概率 $p_1=\frac{P_{10}^8}{10^8}=0.0181$；

（2）“至少 2 个数字相同”与“8 位数全不同”是对立事件，故概率为

$$p_2=1-p_1=0.9819;$$

（3）要满足事件“恰好有两个位置上号码相同而其他位置上号码各不相同”，可以这样安排：从 8 位中任意取两个位置，有 C_8^2 种取法；从 0～9 这 10 个数字任意取一个数字，有 C_{10}^1 种取法，放在这两个位置上；其余 6 个位置由其他 9 个数字作全排列，得

$$p_3=\frac{C_8^2C_{10}^1P_9^6}{10^8}=0.1693.$$

【例 16】 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，这 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率是多少？

【解析 1】 样本点总数为 P_{10}^4，设 $A=$ “4 只鞋子中至少有 2 只配成一双”，考虑对立事件 $\overline{A}=$ “4 只鞋子都不构成一双”．第一只鞋子可从 10 只中任取一只，有 10 种取法；第二只鞋子从余下的 8 只中任取一只，有 8 种取法；第三只鞋子从余下的 6 只中任取一只，有 6 种取法；同理，第四只鞋子 4 种取法，故 $\overline{A}$ 中共包含了 $10\times8\times6\times4$ 个样本点，得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10\times8\times6\times4}{P_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

【解析 2】 $\overline{A}=$ “4 只鞋子都不构成一双”，也可以这样考虑：从 5 双不同的鞋子中任取 4 双，再从每双中任取一只，可得 $\overline{A}$ 中样本点数为 $C_5^4\times2^4$，得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^4\times2^4}{P_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

【例 17】 在 1500 个产品中有 400 个次品，1100 个正品，任取 200 个，求（1）恰有 90 个次品的概率；（2）至少有 2 个次品的概率．

【解析】 样本点总数为 C_{1500}^{200}.

（1）设 $A=$ “恰有 90 个次品”，它的样本点数为 $C_{400}^{90}C_{1100}^{110}$，于是 $P(A)=\dfrac{C_{400}^{90}C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}$；

（2）设 $B=$ “至少有 2 个次品”，$\overline{B}=$ “没有次品或有 1 个次品”，$\overline{B}$ 中样本点数为 $C_{1100}^{200}+C_{400}^{1}\cdot C_{1100}^{199}$，因此

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{1100}^{200}+C_{400}^{1}C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}.$$

4. 条件概率与乘法公式

【例 18】 已知 $P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，求 $P(B|A\cup\overline{B})$.

【解析】 $P(B\mid A\cup\overline{B})=\dfrac{P[B(A\cup\overline{B})]}{P(A\cup\overline{B})}=\dfrac{P(AB)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}$，

由于 $A=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$，$(AB)(A\overline{B})=\varnothing$；故

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}).$$

$$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=(1-0.3)-0.5=0.2.$$

$$P(B\mid A\cup\overline{B})=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}=\frac{0.2}{0.7+0.6-0.5}=\frac{1}{4}.$$

【例 19】 已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，$P(A|\overline{B})=0.6$，求 $P(AB)$,$P(A|A\cup\overline{B})$.

【解析】 由 $P(A\overline{B})=P(\overline{B})P(A|\overline{B})=[1-P(B)]P(A|\overline{B})=(1-0.4)\times0.6=0.36$，而 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.5-P(AB)$，所以

$$P(AB)=0.5-0.36=0.14.$$

由
$$P(A|A\cup\overline{B})=\frac{P[A(A\cup\overline{B})]}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(A)}{P(A\cup\overline{B})},$$

其中
$$P(|A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0.5+0.6-0.36=0.74,$$

所以
$$P(A|A\cup\overline{B})=\frac{0.5}{0.74}=\frac{25}{37}.$$

【例 20】 设 A，B 为随机事件，且 $P(B)<0$,$P(A\mid B)=1$，则必有（　）．

(A) $P(A\cup B)>P(A)$　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$

(C) $P(A\cup B)=P(A)$　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$

【解析】 选(C)，根据条件概率公式和加法公式，即可得答案．

【例 21】 甲、乙两人独立的向同一靶子射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5，现已知目标被击中，则它是被甲射中的概率为（　）．

【解析】 设 $A=\{$甲命中目标$\}$，$B=\{$乙命中目标$\}$，$C=\{$目标被命中$\}$，则由题意知 A,B 相互独立，且 $P(A)=0.6, P(B)=0.5, C=A\cup B$，故

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$
$$=0.6+0.5-0.6\times 0.5=0.8.$$

由条件概率公式的所求概率为

$$P(A\mid C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(C)}=\frac{0.6}{0.8}=0.75.$$

【例 22】 已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$，随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$，条件概率 $P(B\mid A)=0.8$，则和事件 $A\cup B$ 的概率 $P(A\cup B)$ 是（ ）.

【解析】 由题设有 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=0.5\times 0.8=0.4$，故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7.$$

【例 23】 一盒电子元件有 10 只，其中 7 只正品，3 只次品，从中不放回地抽取 4 次，每次 1 只，求第一、二次取得次品且第三、四次取得正品的概率.

【解析】 设 $A_i=$ “第 i 次取得正品”（$i=1,2,3,4$），由条件概率有

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4)=P(A_4\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)P(A_3\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(\overline{A_1})$$
$$=\frac{6}{7}\times\frac{7}{8}\times\frac{2}{9}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{20}.$$

5. 全概率公式与贝叶斯公式

【例 24】 某厂仓库存有 1,2,3 号箱子分别为 10,20,30 个，均装有某产品．其中，1 号箱内装有正品 20 件，次品 5 件；2 号箱内装有正品 20 件，次品 10 件；3 号箱内装有正品 15 件，次品 10 件．现从中任取一箱，再从箱中任取一件产品，问：(1) 取到正品及次品的概率各是多少？(2) 若已知取到正品，求该正品是从 1 号箱中取出的概率.

【解析】 (1) 设 $A_i=$ “取到第 i 号箱子”（$i=1,2,3$），则 $\{A_1,A_2,A_3\}$ 构成样本空间的一个划分，且

$$P(A_1)=\frac{10}{60}=\frac{1}{6},\quad P(A_2)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3},\quad P(A_3)=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}.$$

设 $B=$ “取得正品”，$\overline{B}=$ “取得次品”，则由全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{1}{6}\times\frac{20}{25}+\frac{1}{3}\times\frac{20}{30}+\frac{1}{2}\times\frac{15}{25}=\frac{59}{90},$$
$$P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{31}{90}.$$

(2) 已知取到正品，求该正品是从 1 号箱中取出的概率，这是一个条件概率问题.

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{20}{25}}{\frac{59}{90}}=\frac{12}{59}.$$

【例 25】 设某种病菌在人口中的带菌率为 0.03，当检查时，设 P(阳性|带菌)$=0.99$，P(阴性|带菌)$=0.01$，P(阳性|不带菌)$=0.05$，P(阴性|不带菌)$=0.95$，现设某人检查是阳性，问他带菌的概率是多少？

【解析】 令 $A=$ “检查呈阳性”，$B=$ “该人带菌”，由贝叶斯公式，所求概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\mid B)P(B)}{P(A\mid B)P(B)+P(A\mid\overline{B})P(\overline{B})}=\frac{0.99\times 0.03}{0.99\times 0.03+0.05\times 0.97}=0.380.$$

6. 相互独立问题

【例 26】 设 A,B,C 是两两独立且不能同时发生的随机事件，且 $P(A)=P(B)=$

$P(C)=x$，则 x 的最大值为（　　）.

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) 1　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】 考虑式 $P(AB\cup AC\cup BC)$，而

$$\begin{aligned}P(AB\cup AC\cup BC)&=P(AB)+P(AC)+P(BC)-3P(ABC)+P(ABC)\\&=P(AB)+P(AC)+P(BC)=3x^2.\end{aligned}$$

而 $P(AB\cup AC\cup BC)\leqslant 1$，故答案为(D).

【例 27】 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为$\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$（　　）.

【解析】 由题设有 $P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{9}$，$P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$ 及 A，B 独立，于是

$$P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB),$$

即 $P(A)=P(B)$，此外

$$\frac{1}{9}=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-2P(A)+P^2(A),$$

解此一元二次方程，得 $P(A)=\frac{2}{3}$.

【例 28】 设两两相互独立的三事件 A，B，C 满足 $ABC=\varnothing$，$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则 $P(A)=$（　　）.

【解析】 结合题设，$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，且 A，B，C 两两独立，则有

$$\frac{9}{16}=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)=3P(A)-3P^2(A),$$

从而 $3P^2(A)-3P(A)+\frac{9}{16}=0$，解得 $P(A)=\frac{1}{4}$.

【例 29】 掷一均匀硬币两次，令 $A_1=\{$第一次为正面$\}$，$A_2=\{$第二次为反面$\}$，$A_3=\{$正反面各一次$\}$．试判断 A_1,A_2,A_3 任何两个事件是否相互独立.

【解析】 由于

$$P(A_1)=\frac{1}{2},\ P(A_2)=\frac{1}{2},\ P(A_3)=\frac{1}{2},$$

且

$$P(A_1A_2)=\frac{1}{4},\ P(A_1A_3)=\frac{1}{4},\ P(A_2A_3)=\frac{1}{4}.$$

所以 A_1,A_2,A_3 中任何两个事件都相互独立.

【例 30】 如果一危险情况 C 发生时，一电路闭合并发出警报，我们可以借用两个或多个开关并联以改善可靠性，在 C 发生时这些开关每一个都应闭合，且若至少一个开关闭合了，警报就发出．如果两个这样的开关并联连接，它们每个具有 0.96 的可靠性(即在情况 C 发生时闭合的概率)，问这时系统的可靠性(即电路闭合的概率)是多少？如果需要有一个可靠性至少为 0.9999 的系统，则至少需要用多少只开关并联？设各开关闭合与否是相互独立的.

【解析】 令事件 A_i 表示“第 i 个开关闭合”（$i=1,2$），则依题意可知：$P(A_1)=P(A_2)=$

0.96．再令事件 B 表示“电路闭合”．因为两个开关是并联连接的，故有 $B=A_1\cup A_2$．

由 A_1 与 A_2 相互独立可知，系统的可靠性（即电路闭合的概率）为

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)\\&=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2)=0.96+0.96-(0.96)^2=0.9984.\end{aligned}$$

三、强化练习题

☆ A 题 ☆

1. 填空题

(1) 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1%和 2%，现从由 A 厂和 B 厂的产品分别占 60%和 40%的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，则该次品属 A 厂生产的概率是________．

(2) 设两两相互独立的三事件 A，B，C 满足条件：$ABC=\varnothing, P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则 $P(A)=$________．

(3) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为$\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$________．

(4) 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品，任意抽两次，每次抽 1 个，抽出后不再放回，则第二次抽出的是次品的概率为________．

(5) 袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个是白球．今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第二个人取得黄球的概率是________．

(6) 设 A,B,C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB\mid\overline{C})=$________．

2. 选择题

(1) 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 p $(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为（　　）．

(A) $3p(1-p)^2$　　(B) $6p(1-p)^2$　　(C) $3p^2(1-p)^2$　　(D) $6p^2(1-p)^2$

(2) 对于任意二事件 A 和 B，（　　）．

(A) 若 $AB\neq\varnothing$，则 A,B 一定独立　　(B) 若 $AB\neq\varnothing$，则 A,B 有可能独立

(C) 若 $AB=\varnothing$，则 A,B 一定独立　　(D) 若 $AB=\varnothing$，则 A,B 一定不独立

(3) 设 A,B 是随机事件，$B\subset A$，且 $P(A)\neq P(B)$，$P(B)>0$，则下列命题正确的是（　　）．

(A) $P(B|A)=1$　　(B) $P(B|\overline{A})=1$

(C) $P(A|B)=1$　　(D) $P(A|\overline{B})=0$

(4) 设 A,B 是随机事件，$B\supset A$，且 $P(B)>0$，则下列命题正确的是（　　）．

(A) $P(A)<P(A|B)$　　(B) $P(A)\leqslant P(A|B)$

(C) $P(A)>P(A|B)$　　(D) $P(A)\geqslant P(A|B)$

(5) 设 A,B,C 是随机事件，且有 $P(C\mid AB)=1$，则下列命题正确（　　）．

(A) $P(AB)=P(C)$　　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C) $P(A\cup B)=P(C)$　　(D) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$

(6) 设 A,B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$P(B)>0$，$P(B\mid A)=P(B\mid \bar{A})$，则必有（　　）.

(A) $P(A\mid B)=P(\bar{A}\mid B)$　　(B) $P(A\mid B)\neq P(\bar{A}\mid B)$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$

(7) 假设 $B\subset A$，则下列命题正确的是（　　）.

(A) $P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A)$　　(B) $P(\bar{A}-\bar{B})=P(\bar{A})-P(\bar{B})$

(C) $P(B\mid A)=P(B)$　　(D) $P(A\mid \bar{B})=P(A)$

(8) 设事件 A 与 B 互不相容，则（　　）.

(A) $P(\bar{A}\bar{B})=0$　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A)=1-P(B)$　　(D) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$

3. 计算题

(1) 设 A,B 是两事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$，问：① 在什么条件下，$P(AB)$取到最大值，最大值是多少？② 在什么条件下，$P(AB)$取到最小值，最小值是多少？

(2) 设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\dfrac{1}{8}$，则 A,B,C 至少有一个发生的概率为多少？

(3) 在一标准英语词典中，有 55 个由两个不相同的字母所组成的单词，若从 26 个英文字母中任意取两个字母予以排列，问能排成上述单词的概率是多少？

(4) 在电话号码簿中任取一个电话号码，求后面四个数全不相同的概率（设后面四个数中的每一个数都是等可能的取 $0,1,\cdots,9$）.

(5) 在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选三个记录其纪念章的号码．求① 最小号码是 5 的概率；② 最大号码是 5 的概率．

(6) 设 $P(A)=p$，$0<p<1$，$P(B)=1-\sqrt{p}$，求证：$P(\bar{A}\bar{B})>0$.

(7) 设 A，B 是两个事件，满足 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$.

(8) 已知 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$，$P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$，求 $P(A\cup B)$.

(9) 已知 $P(B)=0.3$，$P(\bar{A}|B)=0.2$，$P(A|\bar{B})=0.75$，求 $P(B|A)$.

(10) 研究生入学考试面试时由考生抽签答题．已知 10 支考签中有 4 支难题签，甲、乙两人各抽一签，甲先抽（不放回）．① 求甲、乙两人各自抽到难签的概率；② 若已知乙抽到了难签，求甲抽到难签的概率．

(11) 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1% 和 2%，现从由 A 和 B 的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，求该次品属 A 生产的概率．

(12) X 型汽车在 A,B,C 三个车场中分别占 $\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{2}$. 所有汽车出售的机会均等，某人随机选一车场并随机选一车试开．若此车恰巧是 X 型的，求他是在车场 A 选的概率．

(13) 已知在 10 只晶体管中有 2 只次品，在其中任取两次，每次任取一只，作不放回抽