

电磁场和光波传输线



电磁场和微波传输线

甘本祓 冯亚伯 编

江苏工业学院图书馆
藏书章

西北电讯工程学院

1978.9

序

在英明领袖华主席的领导下，我国人民正在为实现毛主席和周总理的遗愿而奋斗，四个现代化的光辉前景展现在我们面前。科学技术要大上，教育要大治，这是党的要求，是全国人民的共同愿望。为了适应这一新的要求，我们对试用了几届的教材进行了改编，在改编中注意了以下几点：

1. 加强了对基本概念和基本理论的讲述，着重培养分析问题和解决问题的能力。
2. 增加了反映目前发展的一些新的内容，有些地方也可能显得“深”了一点，但考虑到本教材要使用较多的届数，而目前形势的发展又十分迅速，这样作教材更有伸缩性。
3. 叙述较为细致，这样虽然增加了一些篇幅，但却更适应初学者的阅读能力，便于自学。

本教材分为两大部分，第一部分为“电磁场和微波传输线”，第二部分为“微波网络元件和天线”。并且，为了便于教学和科研的应用，还归纳国内外资料，编成了一本“微波传输线设计手册”。

本部分由甘本祓、冯亚伯同志分头执笔编写，而后由甘本祓同志串总。由于我们政治思想水平不高，业务能力有限，因此，缺点和错误一定不少，望同志们多提宝贵意见，以便将来进一步修改。

编 者

1978年6月

目 录

序

第一章 绪论	1
1.1 微波概述	1
1.2 本课程的特点和要求	2
第二章 静电场	6
2.1 概述	6
2.2 库仑定律	6
2.3 电场和电场强度	7
2.4 分布电荷及其电场	7
2.5 电力线	8
2.6 电场强度通量和高斯定理	9
2.7 电场力的功和电位	13
2.8 介质中的静电场	16
2.9 静电场中的导体和电容	20
2.10 镜像概念	25
2.11 静电场的能量	26
2.12 泊松方程和拉普拉斯方程	28
2.13 格林定理	28
第三章 恒定电流的磁场	30
3.1 概述	30
3.2 电流的有关概念	30
3.3 安培定律	32
3.4 毕奥—萨伐尔定律	33
3.5 磁感应线和磁通连续性原理	35
3.6 全电流定律	36
3.7 媒质中的恒定电流磁场	38
3.8 导体的电感	41
3.9 磁场的能量	43
3.10 静态场小结	43
第四章 交变电磁场	45
4.1 概述	45
4.2 位移电流和麦克斯威第一方程	45
4.3 电磁感应定律和麦克斯威第二方程	47
4.4 麦克斯威方程组	48
4.5 边界条件	50

4.6	电磁场的能量和乌莫夫—坡印亭矢量	52
4.7	自由空间的波动方程	55
4.8	复数符号法	57
4.9	矢位和标位	60
4.10	洛仑兹互易定理	62
4.11	交变电磁场边值型问题解的唯一性定理	63
第五章	长线	65
5.1	概述	65
5.2	长线的分布参数及等效电路	65
5.3	长线方程	68
5.4	长线的等效阻抗、输入阻抗和反射系数	72
5.5	无耗长线上的稳态行波	75
5.6	无耗长线上的稳态驻波	80
5.7	无耗长线上的稳态行驻波	86
5.8	圆图	96
5.9	圆图的基本应用	105
5.10	无耗长线上的暂态波	109
5.11	有耗长线	115
5.12	长线的尺寸选择	123
第六章	平面波及其反折射	126
6.1	概述	126
6.2	理想介质中的均匀平面波	126
6.3	均匀有耗媒质中的均匀平面波	132
6.4	导体中的平面波、集肤效应	134
6.5	电磁波的极化	140
6.6	平面波向理想导体表面的垂直入射	142
6.7	平面波向理想介质的垂直入射	147
6.8	平面波向平面分界面的斜入射	153
第七章	波导	163
7.1	概述	163
7.2	矩形波导的场方程	163
7.3	矩形波导的传输特性	169
7.4	矩形波导的场结构	178
7.5	矩形波导的功率传输	184
7.6	矩形波导的设计	192
7.7	圆形波导的场方程	194
7.8	圆形波导的传输特性和场结构	200
7.9	圆形波导的传输功率和衰减常数	205
7.10	同轴线中的高次模	206

7.11 椭圆形波导的场方程	209
7.12 椭圆形波导的特性和应用	215
第八章 带状线和微带	220
8.1 概述	220
8.2 横电磁波的传输特性	221
8.3 保角变换法	225
8.4 用保角变换法解二度场	230
8.5 多角形变换	236
8.6 带状线特性阻抗的计算	239
8.7 空气微带的特性阻抗的计算	248
8.8 介质微带分析	256
8.9 带状线和微带的损耗	264
8.10 色散和高次模的影响	271
8.11 平行耦合线	276
附录	287
附录1 电磁单位制	287
附录2 立体角	289
附录3 电磁坐标系	290
附录4 矢量运算公式	293
附录5 电磁场中的位函数	295
附录6 椭圆函数简介	308
学员学习常用的中文参考书目	320

第一章 绪 论

1.1 微 波 概 述

伟大领袖毛主席教导我们：“在生产斗争和科学试验范围内，人类总是不断发展的，自然界也总是不断发展的，永远不会停止在一个水平上。因此，人类总得不断的总结经验，有所发现，有所发明，有所创造，有所前进”。

在电磁科学发展之初，人们只孤立的认识到一些电或磁的现象。后来才逐渐认识到电与磁的相互联系，从而使电投入实用，在三大革命运动中起着十分重要的作用，因而列宁曾经这样断言：“共产主义就是苏维埃政权加全国电气化”。这一发展，经过了漫长的实践认识、再实践再认识的过程，（从公元前几百年对摩擦生电吸小物现象的观察到今天电磁技术的广为应用）直到二十世纪三十年代，才进入到微波波段。从此无线电技术进入到了一个新阶段。

所谓“微波”，是指波长微小的这一部分无线电波，通常是指波长为1米到1毫米（相当于频率为300兆赫到300千兆赫）的电磁波段。由于其波长小到可与周围物体尺寸相比拟，于是量变引起了质变，使之与波长较长的无线电波有着显著不同的性质，正是由于这些特性，微波才为无线电技术开辟了许多崭新的应用领域，使人类在科学技术上的许多理想成了现实。

表1.1-1到表1.1-3为电磁波谱中常用的波段划分方法。由表可见，微波通常是研究分米波、厘米波和毫米波的问题，但有时也把它扩大到包括米波（10米到1米）和亚毫米波（1毫米以下）。在实用中常常还对微波作更细的划分，并用不同的拉丁字母作为各“分波段”的代号。表1.1-4即为一种在雷达和一般微波技术中常用的划分方法。

由表可见，微波既是一个频率很高又是一个频带很宽的无线电波段。频率高（波长短）使它可以定向辐射，这是雷达、接力通信等工作的基础。频带宽（比其他波段的总和还要宽千倍）这就使得它能容纳许多电子设备或完成多种任务。

表 1.1-1 电磁波谱的粗略划分

波段名称	中文	无线电波	红 外 线	可 见 光	紫 外 线	x 射 线	宇宙射线
英文		Radio Wave	Infrared	Visible Light	Ultra Violet	x - Ray	Cosmic Ray
波长范围		10^5 米~1毫米	1毫米~ $7600\text{\AA}$	$7600\text{\AA}$ ~ $4000\text{\AA}$	$4000\text{\AA}$ ~ $50\text{\AA}$	$50\text{\AA}$ ~ $10^{-4}\text{\AA}$	$10^{-4}\text{\AA}$ 以下

注： $\text{\AA}$ （埃）= 10^{-10} 米

表 1.1-2 无线电波的波段划分

波段称名		波 长 范 围	频 率 范 围	频段名称	
中 文	英 文			英 文	中 文
极长波	Extra-Long Wave	100000米以上	3千赫以下	Extra Frequency	极低频
超长波	Myriameter Wave	100000~10000米	3~30千赫	VeryLow Frequency	甚低频
长 波	Long Wave	10000~1000米	30~300千赫	Low Frequency	低频
中 波	Medium Wave	1000~100米	300~3000千赫	Medium Frequency	中频
短 波	Short Wave	100~10米	3~30兆赫	high Frequency	高频
超短波	Ultrashort Wave	10~1米	30~300兆赫	Very high Frequency	甚高频
微 波	Microwave	1米以下	300兆赫以上	Ultra high Frequency	特高频

表 1.1-3 微波的波段划分

波段名称		波 长 范 围	频 率 范 围	频段名称	
中文	英 文			英 文	中 文
米 波	Meter wave	1~10米	30~300兆赫	Very high Frequency	甚高频
分米波	Decimeter wave	10~100厘米	300~3000兆赫	Ultra high Frequency	特高频
厘米波	Centimeter wave	1~10厘米	3~30千兆赫	Super high Frequency	超高频
毫米波	millimeterwave	1~10毫米	30~300千兆赫	Extra-high Frequency	极高频
亚毫米波	Sub-millimeter wave	1毫米以下	300千兆赫以上	Far-end infrared Frequency	超极高频

我们伟大领袖毛主席历来就关怀无线电电子技术的发展。“你们是科学的千里眼和顺风耳”，“努力办好广播，为全中国人民和全世界人民服务”，“我们也要搞人造卫星”等一系列光辉指示照耀着我们前进的方向。解放以来，我国的微波技术，在毛主席“独立自主，自力更生”方针的指引下，从无到有，从小到大，在阶级斗争、生产斗争和科学实验三大革命运动中发挥着越来越大的作用。今天，我国不仅设计和制造了各种利用微波技术的雷达、导航、通信、遥测遥控、电子对抗以及工农业用、医用电子设备，而且若干与微波技术相结合的尖端科学技术分支（例如射电天文学、无线气象学、微波波谱学、量子电动力学、微波全息学、微波测地学、微波固体电子学等）也正在形成和壮大。让我们高举毛主席的伟大红旗，在英明领袖华主席的领导下，为多快好省的发展我国微波技术，为实现四个现代化贡献我们的力量吧！

1.2 本课程的特点和要求

为了使同学们能更好的学好本课，现将其特点、要求和学习方法简述如下，以供学习时注意。

一、本课程的任务是讨论微波技术的基本理论。毛主席说：“真正的理论在世界上只有

一种，就是从客观实际抽出来又在客观实际中得到了证明的理论。”（《整顿党的作风》）。所以在学习中希望大家注意如何从客观实际抽出来，形成一定的理论系统，又如何在客观实际中得到了证明和应用。即

1. 如何把基本的自然现象（或实验结果）用理论（定性和定量地）表达出来；
2. 如何根据这些基本实验定律，经过逻辑推演得到一个更完整、更普遍的系统理论。
3. 如何用这些理论去解决实际问题。

这就是分析问题和解决问题的能力。

二、毛主席说：“人的认识物质，就是认识物质的运动形式，因为除了运动的物质外，世界上什么也没有，而物质的运动则必取一定的形式。对于物质的每一种运动形式，必须注意它和其他各种形式的共同点。但是，尤其重要的，成为我们认识事物的基础的东西，则是必须注意它的特殊点，就是说，注意它和其他运动形式的区别。”（《矛盾论》）。

区别于其它场所，在微波技术课程中主要的是以一种特殊形式的物质—电磁场为本课程的研究对象。人们对电磁场物质性的认识，也是经过了唯物论对唯心论的长期斗争，直到实践证明电磁场不仅占据着空间，并且具有一切物质所具有的重要性质（如能量、动量和质量等）之后，才根本上粉碎了唯心主义的“超距”谬论，使对电磁技术的研究沿着正确的方向前进。但是电磁场这种物质不同于通常由电子、质子、中子等基本粒子构成的实物，而有其特殊性，表现在：

1. 电磁场的基本成分是光子，它没有静止质量；
2. 实物可以小于光速的任意的速度在空间运动，但电磁场在真空中永远以光速（ 3×10^8 米/秒）运动；
3. 实物的运动速度决定于观察者的运动速度，但电磁场的传递速度却不依赖于观察者的运动速度（迈克尔逊—莫雷实验）；
4. 实物的原子所占据的空间，不能同时为另一原子所占据，但几个电磁场可以互相叠加，可以同时占据同一空间。

再进一步来说，由于研究的对象不同，所用的方法也就不一样，在本课程中将引入一些新的物理量，它们虽与低频线路中常用的物理量（例如电流、电压）有一定对应关系，但却能更明确的反映电磁现象的本质。表 1.2-1 简略列出场与路间的对应情况。在经过了一段学习之后本表所说明的特点将更为清晰。

由表可见：

1. 电路中只用标量即可，而电磁场中还要用矢量；
2. 电路中的物理量只是时间的函数，而电磁场中却同时还是空间的函数。

因此，常常说电磁场理论是电路理论的推广。但是，事物总是一分为二的。微波技术的问题也并不是任何时候都是用电磁场理论分析最好。有时，在一定条件下，引入电路的概念进行分析，却能使问题更容易分析，设计更得以简化。这就是微波网络的概念。从这个角来说，可以说场的理论和广义的路的理论是等效的。总之，两者相辅相成，推动着电子科学技术向前发展。

三、毛主席教导我们说：“对情况和问题一定要注意到它们的数量方面，要有基本的数量分析。任何质量都表现为一定的数量，没有数量也就没有质量”。（《党委会的工作方法》）因此，在学习本课中我们一定要正确处理物理概念和数学推导的关系。当然根据时间和要求

表 1.1-4 微波分波段的划分及代号

波段	下标	波 长 (厘米)	频 率 (千兆赫)	波段	下标	波 长 (厘米)	频 率 (千兆赫)	波段	下标	波 长 (厘米)	频 赫 (千兆率)
L	P	133.2	0.225	X	A	9.62 8.82	3.100 3.400	→	C	2.10 1.95	14.25 15.36
		76.9	0.390		W	8.82 8.10	3.400 3.700		U	1.95 1.74	15.35 17.25
	P	76.9 64.5	0.390 0.465		H	8.10 7.69	3.700 3.900	→	T	1.74 1.46	17.25 20.50
		64.5 58.8	0.465 0.510		Z	7.69 7.14	3.900 4.200		Q	1.46 1.22	20.50 24.50
	C	58.8 41.4	0.510 0.725		D	7.14 5.77	4.200 5.200	→	R	1.22 1.13	24.50 26.50
	L	41.4 38.4	0.725 0.780		A	5.77 5.45	5.200 5.500		M	1.13 1.05	26.50 28.50
	Y	38.4 33.3	0.780 0.900		G	5.45 5.21	5.500 5.750	→	N	1.05 0.977	28.50 30.70
	T	33.3 31.6	0.900 0.950		Y	5.21 4.84	5.750 6.200		L	0.977 0.909	30.70 33.00
	S	31.6 26.1	0.950 1.150		D	4.84 4.80	6.200 6.250	→	A	0.909 0.833	33.00 36.00
	X	26.1 22.2	1.150 1.350		B	4.80 4.85	9.250 6.900		A	0.833 0.789	36.00 38.00
	K	22.2 20.7	1.350 1.450		R	4.35 4.28	6.900 7.000	→	B	0.789 0.750	38.00 40.00
	F	20.7 19.3	1.450 1.550		C	4.28 3.53	7.000 8.500		C	0.750 0.714	40.00 42.00
S	Z	19.3 18.2	1.550 1.650	V	L	3.53 3.33	8.500 9.000	→	D	0.714 0.681	42.00 44.00
	E	18.2 16.2	1.650 1.850		S	3.33 3.12	9.000 9.600		E	0.681 0.652	44.00 46.00
	F	16.2 15.0	1.850 2.000		X	3.12 3.00	9.600 10.00	→	A	0.652 0.625	46.00 48.00
		15.0 12.5	2.000 2.400		F	3.00 2.98	10.00 10.25		B	0.625 0.600	48.00 50.00
	C	12.5 11.5	2.400 2.600		K	2.93 2.75	10.25 10.90	→	C	0.600 0.577	50.00 52.00
	Q	11.5 11.1	2.600 2.700		P	2.75 2.45	10.90 12.25		D	0.577 0.555	52.00 54.00
	Y	11.1 10.3	2.700 2.900		S	2.45 2.26	12.25 13.25	→	E	0.555 0.535	54.00 56.00
	G	10.3 9.67	2.900 3.100		E	2.26 2.10	13.25 14.25				
	S										

表 1.2-1 场与路的对应

电 路 概 念	电 磁 场 概 念
电压 V 电流 i 磁通 ϕ 电荷 q	电场强度 $\vec{E}$ 电流密度 $\vec{J}$ 或 磁场强度 $\vec{H}$ 磁感应强度 $\vec{B}$ 电荷密度 ρ 或 电感应强度 $\vec{D}$
基尔霍夫电压定律 (广义的) $\sum V_a = - \frac{d\phi}{dt}$	麦克斯韦第二方程 $\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
基尔霍夫电流定律 (广义的) $\sum i_a = - \frac{dq}{dt}$	电流连续性方程 $\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$
元件定律 (线性的) 电阻器 $i = \frac{1}{R} V$ 电容器 $q = CV$ 电感器 $\phi = Li$	组成关系 (简单地称为线性的) 导体 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ 电介质 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ 磁介质 $\vec{B} = \mu \vec{H}$
功率 $P = Vi$	能流密度 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
电阻器中的功耗 $P = Vi = \frac{1}{R} V^2$	导体损耗 $P = \vec{E} \cdot \vec{J} = \sigma E^2$
电容器中的能量 $W_c = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} CV^2$	电能密度 $W_c = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$
电感器中的能量 $W_L = \frac{1}{2} \phi i = \frac{1}{2} Li^2$	磁能密度 $W_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu H^2$

我们不必要对任何问题都进行严格的数学推导，但必要的数学推演却是需要的，常常借助一些方程的定量描述，可以使物理形象更为鲜明。因此，在学习本课时，不能把数学推导理解为一个纯粹抽象的东西，而应把它看为从已有的物理概念达到更新的物理概念的桥梁。从而常常注意到“胸中有数”。这样，才能达到本课程的教学要求。

伟大领袖毛主席教导说：“我们的面前的工作是很艰苦的，我们的经验是很不够的。因此，必须善于学习”。（《八大开幕词》）让我们以“雄关漫道真如铁，而今迈步从头越”的精神投入到新的学习中去吧！

第二章 静电场

2.1 概 述

毛主席教导我们：“无论什么事物的运动都采取两种状态，相对地静止的状态和显著地变动的状态。”电磁场也不例外。所以我们先研究静态场（又称稳态场），再研究交变场。

进一步研究将表明，静态场只不过是交变场在时变率趋于零时的特例。但从静态场入手讨论有许多优点：其一，它简单易懂，所依据的实验较为经典，由浅入深，易于接受；其二，这种场在实际问题中也是碰得到的，例如在静电控制阴极射线管的聚焦与致偏系统中；其三，一些高频问题，常可作静电模拟，或者说，作为似稳场来处理。总之，静态场是后续内容的入门和基础。

在以下的讨论中，所研究的对象的尺寸远比原子尺寸为大，即研究的是宏观电磁现象。

2.2 库仑定律

我们从一个实验定律—库仑（Coulomb）定律开始，它是下面讨论的基础。

实验发现电荷之间有相互作用力。库仑定律给出了真空中两点电荷之间的相互作用力。在有理化米、千克、秒、安培（MKSA）单位制中^{*}，库仑定律可写成如下的矢量式：

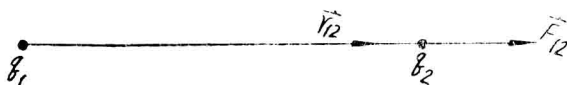


图 2.2-1 两点电荷间的作用力

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad \text{牛顿} \quad (2.2-1)$$

式中 $\vec{F}_{12}$ 是当 q_1 固定时 q_2 所受的力，单位是牛顿。

q_1 、 q_2 表示两个点电荷的电量，单位是库仑。

$\vec{r}_{12}$ 是由 q_1 指向 q_2 的距离矢量，其大小就是 r_{12} ，单位是米。

ϵ_0 是真空中介电常数，它的数值和单位是 $8.854 \times 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ 法拉/米。

要注意的是上式只适用于两个“点电荷”。所谓点电荷是指携带电荷 q_1 、 q_2 的两个物体本身的尺寸比起它们之间的距离来要小很多，这时式中的 r_{12} 才有确定的意义。

如果以因子 n 乘 q_1 ，则 q_2 所受力也乘同一因子 n ，即库仑定律是线性的。而且，几个点电荷作用于另一点电荷上的力等于每一点电荷单独作用于此点电荷上的力的和。

^{*}关于电磁单位制，详见附录 1。以下的讨论中均用 MKSA 制，不再说明。

2.3 电场和电场强度

库仑定律不仅是以数学形式总结的两带电体之间相互作用力的定量关系，而且还说明，一个带电体周围的空问，具有一种特殊的物理性质：它对在此空间内的其它带电体有作用力，或说它在周围空间建立了一个力场。人们便将这力场称为“电场”。进一步的实践表明，电场（更一般说是电磁场）是一种客观存在的物质形态。两点电荷间的作用力正是一个电荷通过电场、以一定速度传递到另一个电荷上的作用。

上面说明了电荷要在其周围空间建立（激发）电场，即电荷是电场的源。如果电场是由静电荷激发的，则为静电场。在宇宙间不存在绝对静止的物质，所谓静电荷是指对观察者处于相对静止状态、且是就宏观现象而言的。

如果将同一个点电荷（称作“试探电荷”）置于电场中不同点，则受到的作用力不同，于是我们定义电场中空间某一点的电场强度 $\vec{E}$ 为：在试探电荷 q_0 的引入不使原来的电荷分布发生变化的条件下，单位正试探电荷在该点所受的力。单位是牛顿/库仑或伏特/米。

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad \text{伏/米} \quad (2.3-1)$$

由库仑定律，点电荷 q 在距其为 r 处的 p 点（称“观察点”）的电场强度为

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (2.3-2)$$



图 2.3-1 点电荷的电场强度

由 n 个固定的点电荷 $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ 组成的系统在空间某点 p 所产生的电场，等于各点电荷分别在该点产生的电场的矢量和：

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \vec{r}_i \end{aligned} \quad (2.3-3)$$

式中 $\vec{E}$ 为 p 点的总场强， $\vec{E}_i$ 为 q_i 的场强， $\vec{r}_i$ 为 q_i 到 p 的矢径。式（2.3-3）为电场的叠加定律。

2.4 分布电荷及其电场

前面的讨论均是对点电荷的，如果所考虑的带电体之间距离较近，或是观察点到带电体之间的距离不是远大于带电体的尺寸时，就不能将它们看作点电荷。但对宏观的电现象，可认为电荷是连续地分布于带电体之中或带电体的表面上的。这样的电荷称为分布电荷。电荷可以是连续地但不一定均匀地分布于一体积 V 之内，或是分布于一个面 s ，一条线 l 上。分别将这几种情况称为体电荷、面电荷、线电荷。为了说明电荷在带电体中的分布情形，引进

电荷密度的概念。并由之计算分布电荷的场。

如果电荷是连续地分布于体积 V 内，则在 V 中任取一体元 ΔV ，其中电量为 Δq ，定义

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dv} = \rho \quad \text{库/米}^3 \quad (2.4-1)$$

为带电体中某点的体电荷密度。它是该点位置的函数。

注意，此地的 $\Delta V \rightarrow 0$ 是所谓物理无限小，它是有限度的。

知道 V 中 ρ 的分布，欲求 p 点的 $\vec{E}$ ，只须将每个 ΔV 中的电荷 $\rho \Delta V$ 在 p 点的场用点电荷的场强公式 (2.3-2) 求出并相加即可，如图

2.4-1。

设 ΔV 中的电荷在 p 点的场为 ΔE ，则

$$\Delta \vec{E} = \frac{\rho \Delta V}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

而 V 内总电荷的场是

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum \Delta \vec{E} \\ &= \int_V \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \end{aligned} \quad (2.4-2)$$

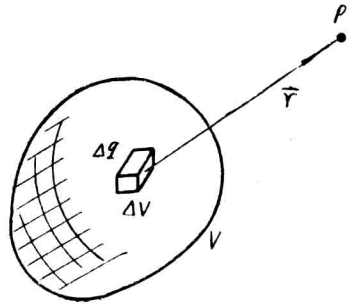


图 2.4-1 计算体电荷的电场用图

类似地，可定义面、线电荷密度：

$$\rho_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds} \quad \text{库/米}^2 \quad (2.4-3)$$

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad \text{库/米} \quad (2.4-4)$$

上式中 Δs 、 Δl 为面和线的单元，而 Δq 是单元上的电荷。已知 s 或 l 上的电荷分布，即可求出场强：

对面电荷

$$\vec{E} = \int_s \frac{\rho_s ds}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (2.4-5)$$

对线电荷

$$\vec{E} = \int_l \frac{\rho_l dl}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (2.4-6)$$

和点电荷的概念一样，面、线电荷的概念也是相对的，并不是几何学上的面和线。

2.5 电力线

为了形象地描绘电场的分布，引入假想的电力线。

在电场中各点沿电场强度方向画一些小箭头，并把相邻的、方向几乎一致的小箭头连成连续的曲线，叫做电力线。所以电力线上任一点的切线方向表示该点的场强方向。为了用电力线的疏密程度来表示各点电场的强弱，故规定：在电场中某点取一面元 Δs 与该处的电场垂直，如该点的电场为 $\vec{E}$ ，就通过 Δs 并与它垂直画上 ΔN 条力线，并使

$$|\vec{E}| = \frac{\Delta N}{\Delta s} \quad (2.5-1)$$

所以电场强的地方电力线就密。根据以上关于电力线的方向和密度的规定画出电力线图以后，即可清楚地看出电场的分布情况。这是一个以后常用的表示电场分布的方法。

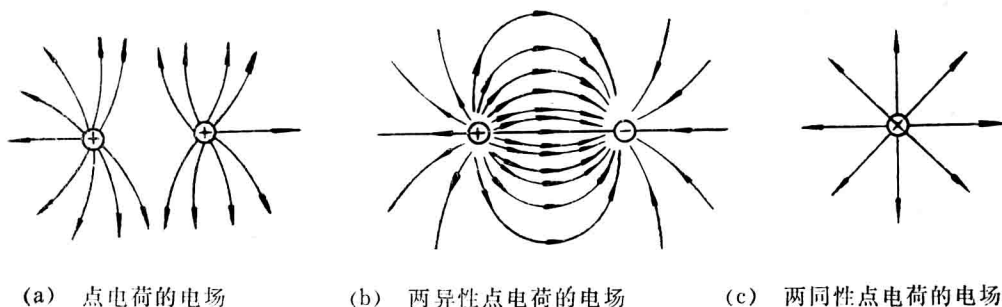


图 2.5-1 电力线图

图 2.5-1 就是一个孤立正点电荷、两个等值异性及两等值同性的点电荷在一个平面上的电力线图。

由定义和上图可见电力线有如下特点：

1. 电力线是一族从正电荷出发而终止于负电荷的非闭合曲线，即电荷是激发场的源。
2. 电力线在无电荷区域互不相交。因为在一点电场强度不能同时有两个不同的方向，即场强是位置的单值函数。

2.6 电场强度通量和高斯定理

如果已知空间的电荷分布，可以由 2.4 节的公式来计算它们所激发的电场（也称为“库仑场”）。这种直接用矢量积分的方法概念上较直接但却往往比较麻烦。然而，如果应用阐明电场基本性质的定理，可使电场的计算大为简化。现即从电场强度通量入手来介绍这些定理。

一、电场强度通量

垂直通过某点处面积单元 Δs 的电力线数，称为通过该面元 Δs 的电场强度通量（简称通量）。但由式电 (2.5-1) 的规定，电场中任一点的电力线密度等于该点的电场强度 E ，故电通量和场强间就有了如下关系：

$$\Delta N = E \Delta s$$

此处用 ΔN 表示电通量。当 $\vec{E}$ 和面元不垂直时，上式应写成

$$\Delta N = E \Delta s \cos \alpha = \vec{E} \cdot \vec{\Delta s}$$

其中 α 为 $\vec{E}$ 与 $\vec{\Delta s}$ 的夹角，如图 2.6-1。

对于电场中任一面积 s ，通过它的电通量便为

$$N = \int_s \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad (2.6-1)$$

因为 $\vec{E}$ 是由电荷激发的，故由上式可知电通量必与激发电场的电荷有一定的关系。这就是下述高斯定理的基础。现即以电通量为媒介，建立电场和电荷之间的本质联系。

二、真空中的高斯定理

我们先讨论真空中点电荷 q 的电通量。

包围 q 作任意封闭面 s ，并规定面上任一点处面元 $\vec{ds}$ 的方向为该点表面的外法线 $\vec{dn}$ 的方向，则穿过 s 的电通量由式 (2.6-1) 应为

$$\begin{aligned} \oint_s \vec{E} \cdot \vec{ds} &= \oint_s \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \cdot \vec{ds} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_s \frac{ds \cos \theta}{r^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_s d\Omega \end{aligned}$$

式中 $d\Omega$ 为面元 ds 所对的以点电荷 q 为顶点的立体角，图 2.6-2，整个封闭面在 0 点所张立体角可以证明为 (见附录 2)

$$\oint_s d\Omega = 4\pi$$

所以穿过封闭面 s 的电通量为

$$\oint_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.6-2)$$

如果 s 没有包围着 q ，则上式变为

$$\oint_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = 0$$

因此时 q 发出的电通量穿进封闭面 s 的等于穿出的，故它穿过 s 的总通量为零。

假如空间有 m 个点电荷，作封闭面 s 包围其中的 n 个 ($n < m$)，如图 2.6-3。则由式 (2.6-2) 及叠加定理，容易证明：

$$\oint_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = Q/\epsilon_0 \quad (2.6-3)$$

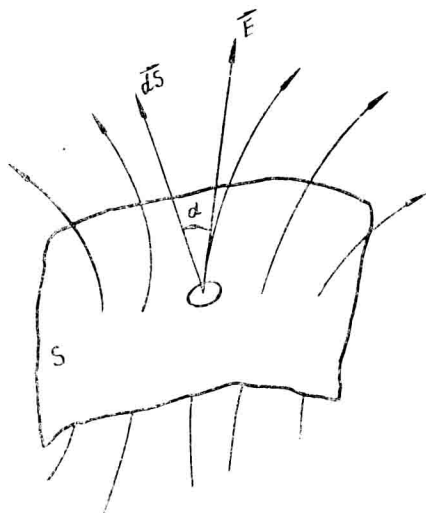


图 2.6-1

式中 $\vec{E}$ 为所有 m 个电荷在 s 上激发的场强, 而 Q 是 s 所包围着的 n 个点电荷的总电量。

对于分布电荷, 可看成是点电荷的叠加, 故式 (2.6-3) 也适用。

(2.6-3) 式就是真空中的高斯定理。它的意义是: 真空中穿出任意封闭面的电通量等于封闭面内的总电荷除以 ϵ_0 。

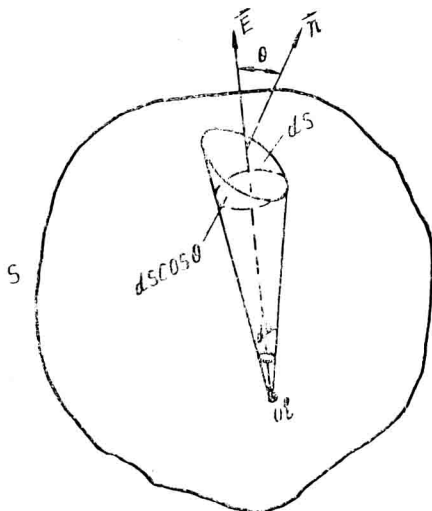


图 2.6-2 立体角

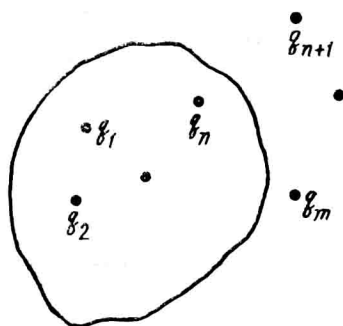


图 2.6-3 点电荷系的高斯定理

应用数学中的散度定理 (高斯公式), 式 (2.6-3) 可写成

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv$$

式中 v 是 s 面所围之体积。上式右边是电荷密度在 v 中的积分, 即 s 面内的总电荷。

因为 $s(v)$ 是任意的, 故必有

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.6-4)$$

式 (2.6-4) 是高斯定理的微分形式。

高斯定理是静电场中的重要定理。它反映了静电场的一个基本性质: 有源场、电荷是场源。以后讨论介质中的电场时还要对之作进一步的阐述。

三、高斯定理的应用

高斯定理, 如前述, 反映了静电场的基本性质。除此之外, 还可直接用来计算某些静电场问题。

在电荷分布对称, 因而场分布也是对称的情况下, 如能找到闭合面 s , 满足:

1. 在 s 上任一点均有 $\vec{E}$ 与 $d\vec{s}$ 平行 ($\vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds$), 或在 s 的一部分上 $\vec{E}$ 与 $d\vec{s}$ 平行而另一部分上 $\vec{E}$ 与 $d\vec{s}$ 垂直 ($\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$)
2. 在 $\vec{E} \cdot d\vec{s} \neq 0$ 处, E 为常数。